ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVI

1959

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXVII

(2° semestre 1959)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1959

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1959 – Luglio-Agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Geometria algebrica. — *Sulle irregolarità delle varietà algebriche.* Nota [(*)] del Socio FRANCESCO SEVERI.

Riassumo in quanto segue i risultati d'una ricerca compiuta a complemento delle mie precedenti, dirette a costruire, come vado facendo da oltre mezzo secolo, i fondamenti della Geometria sulle varietà algebriche nell'ordinario corpo complesso [(1)].

1. Introduciamo anzitutto alcune notazioni.

V_d è una forma irriducibile di dimensione $d > 1$ e di ordine m dello spazio S_{d+1}, modello birazionale della varietà che vogliamo studiare, dotata di singolarità ordinarie (una varietà doppia W_{d-1}, denotata pure con W°, simboleggiata altresì qualche volta soltanto da W, costituita da punti doppi della V_d; e sopra W° una varietà ∞^{d-2} di punti tripli per V_d e per W°; ecc.).

Indichiamo inoltre con E una generica sezione iperpiana di V_d; la sua varietà doppia $W^1 = (W^\circ, E)$, intersezione di W° con l'iperpiano S_d di E, contiene una varietà di punti tripli per W^1 ed E, ecc.

La *postulazione effettiva* di W°, rispetto alle forme di ordine l di S_{d+1}, è il numero delle condizioni lineari indipendenti che W° presenta ad una forma

(*) Presentata nella seduta del 9 maggio 1959.

(1) La Memoria estesa comparirà negli «Annali di Matematica» in un volume che prossimamente pubblicheremo, pel giubileo scientifico di GIOVANNI SANSONE, in onore del nostro valente Condirettore, alla cui opera tecnico organizzativa dobbiamo quasi per intero l'odierno prestigio degli «Annali» e l'attuale loro larga diffusione.

d'ordine l che debba contenerla; quando l è abbastanza grande (ad esempio $l \geq \mu$; μ intero conveniente) la postulazione effettiva è data dal polinomio di grado $d-1$ in l:

$$(1) \qquad \varphi(l, W^{\circ}) = k_{0}\binom{l+d-1}{d-1} + k_{1}\binom{l+d-2}{d-2} + \cdots + k_{d-1},$$

ove le k sono caratteri numerativi di W°, indipendenti da l, esprimibili mediante i generi aritmetici (effettivi o virtuali) di W° e delle sue sezioni spaziali lineari (2).

Il polinomio $\varphi(l, W^{\circ})$, che può benissimo non coincidere con la postulazione effettiva di W° per valori bassi di l, *viene detto postulazione virtuale* o *regolare* di W°, rispetto alle forme di ordine l.

Tra le postulazioni virtuali di W° e della sua generica sezione iperpiana W^{1} intercede la nota relazione

$$(2) \qquad \varphi(l-1, W^{\circ}) = \varphi(l, W^{\circ}) - \varphi(l, W^{1}).$$

2. Consideriamo ora su V_{d} il sistema canonico impuro $|K|$ ed il sistema lineare completo

$$|C_{l}^{\circ}| = K + \lambda E = (\lambda E)'$$

aggiunto al sistema λE, con $\lambda = l - (m-d-2)$.

Il sistema $|C_{l}^{\circ}|$ è tagliato su V_{d} dalla totalità delle sue aggiunte d'ordine l, cioè dalle forme d'ordine l passanti per la varietà doppia W°.

La *dimensione virtuale* di $|C_{l}^{\circ}|$ (3) è data, *per ogni valore di* l, dall'espressione:

$$(3) \qquad \rho_{l}^{\circ} = \binom{l+d+1}{d+1} - \varphi(l, W^{\circ}) - 1 - \binom{l-m+d+1}{d+1};$$

in particolare per $l = m-d-2$, ($\lambda = 0$; $|C_{m-d-2}^{\circ}| = |K|$), si ha

$$(4) \qquad \rho_{m-d-2}^{\circ} = \binom{m-1}{d+1} - \varphi(m-d-2, W^{\circ}) - 1 + (-1)^{d} = P_{a}^{d} - 1 + (-1)^{d}$$

ove P_{a}^{d} è il genere aritmetico di V_{d} (4).

Indichiamo inoltre con R_{l}° la *dimensione vera* (od *effettiva*) del sistema $|C_{l}^{\circ}|$, e con ε_{l}° l'*irregolarità* di $|C_{l}^{\circ}|$, cioè la differenza

$$(5) \qquad \varepsilon_{l}^{\circ} = R_{l}^{\circ} - \rho_{l}^{\circ}.$$

In virtù delle (3), (5), possiamo scrivere:

$$(6) \qquad R_{l}^{\circ} = \binom{l+d+1}{d+1} - \varphi(l, W^{\circ}) - 1 - \binom{l-m+d+1}{d+1} + \varepsilon_{l}^{\circ}.$$

(2) Ved. F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie o varietà algebrica* (Roma, Cremonese. L'intera opera è in tre volumi con titoli diversi, pubblicati rispettivamente, nel 1942, vol. I; nel 1958, vol. II; e nel 1959, vol. III), vol. III, p. 175.

(3) Loc. cit., in (2) vol. III, p. 204.

(4) Loc. cit. in (2), vol. III, p. 218.

Per $l = m - d - 2$, si ha notoriamente

$$R^{\circ}_{m-d-2} = P^{d}_{g} - 1 , \tag{7}$$

ove P^{d}_{g} è il genere geometrico di V_d; epperò l'irregolarità del sistema canonico $|K|$ è data da

$$\varepsilon^{\circ}_{m-d-2} = P^{d}_{g} - P^{d}_{a} + (-1)^{d+1} = q_d + (-1)^{d+1} \tag{8}$$

essendo q_d l'irregolarità d–dimensionale di V_d.

Per $l > m - d - 2$, il sistema $|C^{\circ}_l|$ risulta non speciale, e l'irregolarità ε°_l coincide con quella che altri chiama la *sovrabbondanza* di $|C^{\circ}_l|$ (5).

3. Analogamente si può introdurre il sistema completo $|C^{1}_l|$ segato su E dalla totalità delle sue aggiunte d'ordine l (tali aggiunte sono forme d'ordine l dell'iperpiano S_d di E, le quali passano per la varietà doppia W^1 di E); ed indicate con R^{1}_l, ρ^{1}_l, ε^{1}_l rispettivamente la dimensione effettiva, la dimensione virtuale, e l'irregolarità di $|C^{1}_l|$, ($\varepsilon^{1}_l = R^{1}_l - \rho^{1}_l$), si avrà una formula simile alla (6):

$$R^{1}_l = \binom{l+d}{d} - \varphi(l, W^1) - 1 - \binom{l-m+d}{d} + \varepsilon^{1}_l . \tag{9}$$

L'irregolarità del sistema canonico impuro di E, che è segato su E dalle sue aggiunte d'ordine $m - d - 1$, è data da

$$\varepsilon^{1}_{m-d-1} = q_{d-1} + (-1)^{d} \tag{10}$$

ove q_{d-1} è l'irregolarità $(d-1)$–dimensionale di E, che coincide con l'irregolarità $(d-1)$–dimensionale di V_d (6).

Il sistema completo $|C^{\circ}_l|$ di V_d taglia su E un sistema lineare $\overline{C}^{1}_l$, il quale individua su E il sistema completo $|C^{1}_l|$, ma non sempre coincide con quest'ultimo.

Dette $\overline{R}_l$ e $\overline{\delta}_l$ rispettivamente la dimensione e la deficienza di $\overline{C}^{1}_l$, sussistono le ovvie relazioni

$$\overline{R}^{1}_l = R^{1}_l - \overline{\delta}_l ,$$

$$R^{\circ}_{l-1} = R^{\circ}_l - \overline{R}^{1}_l - 1 ,$$

epperò

$$R^{\circ}_{l-1} = R^{\circ}_l - R^{1}_l + \overline{\delta}_l - 1 .$$

Di qui, tenuto conto delle (6), (9), si ricava

$$R^{\circ}_{l-1} = \binom{l+d}{d+1} - \{\varphi(l, W^{\circ}) - \varphi(l, W^{1})\} - 1 - \binom{l-m+d}{d+1} + \varepsilon^{\circ}_l - \varepsilon^{1}_l - + \overline{\delta}_l . \tag{11}$$

(5) Cfr. ad esempio, loc. cit. in (2), vol. III, p. 396.

(6) Detti P^{d-1}_g, P^{d-1}_a i generi geometrico ed aritmetico di E si ha per definizione $q_{d-1} = P^{d-1}_g - P^{d-1}_a$.

D'altra parte, se nella (6) si cambia l con $l-1$, si ottiene

$$R^{\circ}_{l-1} = \binom{l+d}{d+1} - \varphi(l-1, W^{\circ}) - 1 - \binom{l-m+d}{d+1} + \varepsilon^{\circ}_{l-1}; \tag{12}$$

ed infine, ricordata la (2) e confrontate le (11), (12), si giunge all'espressiva relazione:

$$\varepsilon^{\circ}_{l-1} = \varepsilon^{\circ}_{l} - \varepsilon^{1}_{l} + \bar{\delta}_{l}. \tag{13}$$

Per $l = m - d - 1$, la (13) diventa

$$\varepsilon^{\circ}_{m-d-2} + \varepsilon^{1}_{m-d-1} = \varepsilon^{\circ}_{m-d-1} + \bar{\delta}_{m-d-1}$$

di qui – ricordate le (8), (10) – si deduce la fondamentale relazione

$$q_d + q_{d-1} = \varepsilon^{\circ}_{m-d-1} + \bar{\delta}_{m-d-1}\,^{(7)}, \tag{14}$$

cioè il

TEOREMA I. – *La somma delle due ultime irregolarità di* V_d *eguaglia la somma della sovrabbondanza* $\varepsilon^{\circ}_{m-d-1}$ *del sistema* $|K+E|$, *aggiunto ad una sezione iperpiana* E, *e della deficienza* $\bar{\delta}_{m-d-1}$ *del sistema lineare segato su* E *dal sistema* $|K+E|$.

4. Molto più significativo diviene il teorema precedente, tenuto conto dei seguenti risultati sulle forme differenziali di 1ª specie appartenenti a V_d e sugli integrali multipli di 1ª specie ad esse relativi.

In quanto segue, denoteremo con $x_0, x_1, \cdots, x_d$ le coordinate cartesiane non omogenee di punto in S_{d+1}; con $f(x_0, \cdots, x_d) = 0$ l'equazione di V_d d'ordine m; con $P(x_0, \cdots, x_d) = 0$ l'equazione di un'aggiunta di ordine $m-d-1$ a V_d. Assumeremo $x_0, \cdots, x_{d-1}$ quali variabili indipendenti e x_d

(7) Avvertiamo che la (14) è già stata dimostrata per altra via – pure algebrico-geometrica – da E. MARCHIONNA, in rapporto ad una generica ipersuperficie E *non singolare* tracciata sopra una V_d irriducibile e priva di punti multipli. (Cfr. « Rend. Lincei », Vol. XXIV, p. 673).

Inoltre Marchionna – appoggiandosi al teorema di Kodaira sulla regolarità dell'aggiunto – mostra che, quando E varia in un sistema « ampio » (nel senso di Kodaira), la deficienza δ del sistema lineare segato su E dal suo sistema aggiunto vale:

$$\delta = q_d + q_{d-1}$$

mentre negli altri casi sussiste la disuguaglianza

$$\delta \leq q_d + q_{d-1}.$$

(Si veda anche l'Appendice VI del vol. III dell'Opera citata in (2)). Per $d = 3$ il teorema I fu in precedenza indicato da SEVERI in *Fondamenti I* del 1909 (n. 22, relazione (40)); anzi, sempre per $d = 3$, nel n. 22 c'è anche un teorema più espressivo: il teorema XIII. La sovrabbondanza costante che figura nel teor. XIII è nulla (come risulta dal n. 9 della stessa Memoria). Così pure la disuguaglianza $\delta \leq q_d + q_{d-1}$ è contenuta, per $d = 3$, in *Fondamenti I* (n. 20, teorema X).

Circa la relazione $\delta = q_d + q_{d-1}$, ved. il seguito della presente Nota, (n. 8) dove la relazione è ottenuta nell'ambito della geometria algebrica classica.

funzione algebrica delle d variabili indipendenti definita dalla $f = 0$. *Ipersuperficie sopra* V_d, chiameremo ogni sottovarietà irriducibile, di dimensione $d - 1$, tracciata sulla varietà.

Un'ipersuperficie irriducibile A di V_d può venire rappresentata introducendo le coordinate interne dei suoi punti, siano $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{d-1}$. Allora le $x_0, x_1, \cdots, x_d$ di un punto variabile sopra A diventano funzioni razionali del punto di A, cioè funzioni razionali delle ξ. Così una forma differenziale di 1^a specie e di dato grado i, data su V_d, fatte le debite sostituzioni sulle variabili $x_0, \cdots, x_d$, mediante le predette funzioni razionali, diviene una forma differenziale di 1^a specie dello stesso grado i su A, dove intervengono le disposizioni semplici ad i ad i dei predetti differenziali delle coordinate interne. Diremo che questa è la forma differenziale di 1^a specie *subordinata su* A dalla data forma differenziale di V_d. (La forma differenziale, a sua volta, *subordina* su A una varietà canonica).

Ciò posto, stabiliremo il seguente

TEOREMA II. – *Se* A *è un'ipersuperficie di* V_d *sulla quale sia nullo qualche integrale* $(d-1)$*-plo di* 1^a *specie di* V_d, *la* A *non è topologicamente generale* (t. g.) (8).

Invero, se A è t. g., ogni $(d-1)$-ciclo di V_d riducesi per omologia ad un $(d-1)$-ciclo di A. Pertanto, qualora J sia un integrale $(d-1)$-plo di V_d, nullo sopra A, esso ha sopra V_d tutti i suoi periodi (riportati sopra A) nulli, epperò a norma del teorema di Hodge (9) l'integrale J e la associata forma di 1^a specie sono identicamente nulli su V_d.

5. Ricordiamo che un integrale multiplo sopra V_d dicesi *improprio* se tutti i suoi periodi sono nulli.

Dimostriamo ora il

TEOREMA III. – *Condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale* (15), *sotto indicato, sia improprio, è che il polinomio* P *sia un polinomio aggiunto a* V_d *di ordine* $m - d - 1$ (*al più*).

Riferiamoci dapprima all'ipotesi che l'ipersuperficie considerata su V_d sia una sezione iperpiana E.

Se la varietà canonica, subordinata dall'integrale J su E, potesse essere una varietà (E , E′), per essa passerebbe una qualche aggiunta $P(x_0, \cdots, x_d) = 0$ d'ordine $m - d - 1$ a V_d e J avrebbe la forma:

$$J = \int \frac{P(x_0, x_1, \cdots, x_d)}{f'_{x_d}} dx_0 dx_1 \cdots dx_d , \tag{15}$$

Si tratta di provare che l'ipotesi è assurda. Proveremo perciò che il polinomio P è identicamente nullo; e viceversa.

Per la dimostrazione, indichiamo con R il numero di Betti di dimensione $d-1$ della riemanniana R (V_d) della forma V_d e assumiamo, sopra la

(8) Loc. cit., in (2), vol. III, p. 276.
(9) Loc. cit. in (2), vol. III, p. 229.

sezione iperpiana generica E, R cicli $(d-1)$-dimensionali formanti base pei $(d-1)$-cicli indipendenti di V_d, ricordato che ogni $(d-1)$-ciclo di V_d può essere ridotto per omologia a giacere sulla riemanniana R (E) [10]. Se ora consideriamo su R (V_d) i cicli a $d+1$ dimensioni, duali dei cicli precedenti a $(d-1)$ dimensioni, immagineremo fissata su tale riemanniana una base dei cicli stessi, e denoteremo genericamente con Γ uno di essi. Ognuno dei cicli Γ sega la R (E), che ha la dimensione $2d-2$, in un ciclo di dimensione $(2d-2)+(d+1)-2d=d-1$. Si può inoltre supporre, a meno d'una omografia generica, applicata al fascio $x_d=$ cost., che nessuno dei cicli Γ seghi su R (E) un ciclo di dimensione maggiore di $d-1$. Si avranno allora sopra la riemanniana variabile R (E), R di tali cicli intersezione $\Gamma \cap$ R (E), i quali sono *invarianti*, nel senso che ognuno di essi ritorna in sé, per una circolazione di E nel fascio $x_d=$ cost., partendo da una posizione iniziale e ritornandovi. Ciascuno dei periodi $\omega(x_d)$ di J al ciclo invariante, che si considera, diviene perciò una funzione analitica di x_d, *uniforme* e *dovunque finita*, epperò costante. Insomma i periodi $\omega(x_d)$ di E, ai cicli invarianti, son costanti. Ora dimostreremo che queste costanti, nelle nostre ipotesi, sono nulle! A questo scopo, dobbiamo calcolare il periodo considerato $\omega(x_d)$ nell'intorno di $x_d=\infty$, il che si fa operando su J con la sostituzione

$$x_0 = u_0 x_d \, , \, x_1 = u_1 x_d \, , \cdots , x_{d-1} = u_{d-1} x_d \, .$$

A calcoli eseguiti, si trova per lo sviluppo cercato un'espressione del tipo [11]

$$\frac{a}{x_d} + \frac{b}{x_d^2} + \frac{c}{x_d^3} + \cdots ,$$

dove $a, b, c, \cdots$ sono polinomi in x_d, i quali si riducono a costanti *finite* come periodi di certi integrali $(d-1)$-pli di 1^a specie, soltanto quando il polinomio aggiunto P è d'ordine $\leq m-d-1$. Ne segue che le costanti $a, b, c, \cdots$ sono tutte nulle, perché, in caso diverso, il periodo $\omega(x_d)$ non sarebbe costante per x_d variabile. E poiché sopra si è dimostrato che il periodo $\omega(x_d)$ è una costante, tale costante risulta sempre nulla.

Dunque J ha nulli tutti i periodi ai cicli invarianti; atteso poi che ogni ciclo di R (V_d) si può riportare, per omologia, su R (E), e i cicli invarianti costituiscono perciò una base per i cicli di R (V_d), ogni periodo dell'integrale J, esteso a qualsiasi ciclo di R (V_d), è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti razionali dei periodi ai cicli invarianti. Perciò J ha tutti i periodi nulli e quindi, in base al teorema di Hodge [12], l'integrale J ed il polinomio P svaniscono identicamente [13].

(10) Per le elementari cognizioni topologiche qui occorrenti, rinviamo all'opera cit. in (2), vol. II, p. 203.

(11) Il semplice calcolo effettivo di quest'espressione trovasi riprodotto per $d=3$, ma con carattere generale, nel n. 25 della Memoria dell'autore *Fondamenti I*, «Rend. di Palermo», 1909.

(12) Loc. cit. in (2), vol. III, p. 229.

(13) Il teorema ed il ragionamento sviluppati si trovano già, per $d=3$, nella Memoria dell'autore, *Fondamenti I* (1909). Solo lì si concludeva con una disuguaglianza (e non con un'uguaglianza, come fra breve concluderemo) non conoscendosi allora il teorema di Hodge.

Prima di passare ad enunciare una conseguenza notevole del teorema precedente, è opportuno di chiarire che l'indipendenza delle i_{d-1} forme di 1^a specie di grado $d-1$ su V_d è relativa alle forme, in quanto situate nella varietà ambiente V_d. L'indipendenza incide però soltanto sui coefficienti delle forme, di cui uno almeno deve essere non nullo (anzi i detti coefficienti sono univocamente determinati da uno solo di essi [14]).

La dimostrazione svolta riferiscesi ad una sezione iperpiana E di V_d, ma la conclusione vale anche per una qualunque sottovarietà A_{d-1}, nel senso che nessuna varietà canonica AA' di A può esser parte d'una varietà subordinata su A da un integrale $(d-1)$-plo di 1^a specie di V_d.

È infatti possibile assumere un l tanto grande che lE contenga parzialmente A. Posto allora:

$$A \equiv lE - H,$$

sarà

$$A' \equiv (lE)' - H.$$

Sia $\overline{V}_d$ la varietà d'ordine $\overline{m}$ d'un S_{d+1}, immagine proiettiva del sistema $|l\,E|$. Esiste allora una sezione iperpiana $\overline{E}$ di $\overline{V}_d$, contenente A. Sia: $A \equiv \overline{E} - \overline{H}$; e quindi

$$A' \equiv \overline{E}' - \overline{H} \qquad\qquad E'A \equiv \overline{E}'\,\overline{E} - \overline{H}\overline{E}'$$

donde

$$A'A \equiv \overline{E}'A - \overline{H}A \equiv \overline{E}'\,\overline{E} - \overline{H}\overline{E}' - \overline{H}A$$

D'altronde, gl'integrali $(d-1)$-pli di 1^a specie di $\overline{V}_d$ non sono che i trasformati degli integrali $(d-1)$-pli di 1^a specie di V_d nella trasformazione birazionale regolare tra le due varietà (trasformazione che, appunto per essere regolare, non altera le relazioni di aggiunzione). Dunque $A'A$ fa parte d'una varietà $\overline{E}'\,\overline{E}$ su $\overline{V}_d$; epperò, a norma del teorema III, siccome poi $\overline{E}'\,\overline{E}$ non può far parte di un'aggiunta di ordine $\overline{m}-d-1$ a $\overline{V}_d$ senza che $\overline{J}$, integrale $(d-1)$-plo di 1^a specie di $\overline{V}_d$, trasformato birazionale del dato J, sia improprio; si conclude che, se esiste una varietà $\overline{E}'\,\overline{E}$, subordinata su $\overline{E}$ da J, la quale contenga la varietà AA', l'integrale $\overline{J}$ su $\overline{V}_d$, epperò il suo trasformato J su V_d, sono impropri.

Resta in tal guisa esteso il teorema III ad una qualunque A_{d-1} di V_d.

6. Un corollario molto importante del teorema III è il seguente:

Teorema IV (della relazione fondamentale).

Se q_d e q_{d-1} denotano le due ultime irregolarità di V_d e i_{d-1} è il numero delle forme differenziali indipendenti di prima specie e di grado $d-1$, esistenti su V_d, vale la relazione

$$q_d + q_{d-1} = i_{d-1}. \tag{16}$$

(14) Loc. cit. in (2), vol. III, p. 272.

Sia invero E una sezione iperpiana di V_d, ed $l\mathrm{E} = \bar{\mathrm{E}}$ un multiplo così elevato di essa, che il sistema $|\bar{\mathrm{E}}'|$ sia regolare [15]; sia inoltre $\bar{V}_d$ la immagine proiettiva del sistema lineare $|\bar{\mathrm{E}}|$, cosicché tra V_d e $\bar{V}_d$ c'è una trasformazione birazionale regolare. Orbene, si dimostra che *condizione necessaria e sufficiente perchè una forma di* 1^a *specie di grado* $d-1$, *esistente sopra un'ipersuperficie* A *di* V_d *o di* $\bar{V}_d$, *sia traccia di una forma di prima specie dello stesso grado e non nulla della varietà ambiente è che essa abbia periodi costanti non tutti nulli ai cicli invarianti della varietà ambiente* (ved. anche, a tal proposito, loc. cit. in [2], vol. III, pag. 273) (ciò si prova con alcune delle argomentazioni addotte nel ragionamento del teorema III) e se ne deduce che nel sistema canonico completo esistente su $\bar{\mathrm{E}}$ *vi sono* due categorie di varietà canoniche, ossia: 1) quelle subordinate dalle i_{d-1} forme di 1^a specie di $\bar{V}_d$, nessuna delle quali è nulla su $\bar{\mathrm{E}}$, perché $\bar{\mathrm{E}}$ è t. g.; e 2) le varietà $\bar{\mathrm{E}}\bar{\mathrm{E}}'$, che, a norma del teorema III, dànno luogo a forme di 1^a specie identicamente nulle su $\bar{\mathrm{E}}$ e quindi (essendo $\bar{\mathrm{E}}$ t.g.) su V_d. Poiché queste due categorie di varietà canoniche sono indipendenti tra loro e le une dalle altre (a norma del teorema III) la deficienza δ del sistema $|\bar{\mathrm{E}}\bar{\mathrm{E}}'|$ è espressa dalla infinità (aumentata di 1) delle forme della categoria 1), cioè da i_{d-1} (e si noti che per la validità di questo risultato occorre soltanto supporre che l'ipersuperficie $\bar{\mathrm{E}}$ sia t. g.).

D'altronde nella relazione (14) riferita alla $\bar{V}_d$ e al sistema $|\bar{\mathrm{E}}'|$ è $\bar{\delta}_{m-d-1} = \delta$, $\varepsilon^0_{d-d-1} = 0$, perché il sistema $|\bar{\mathrm{E}}'|$ è regolare [nota [15] a piè di pagina] e quindi la (14) dà

$$q_d + q_{d-1} = \delta = i_{d-1}$$

cioè il teorema IV che volevamo stabilire [16].

7. Teorema V (di regolarità dell'aggiunto).

Il sistema aggiunto $|\mathrm{A}'|$ *ad una ipersuperficie* A *di* V_d, *la quale sia t.g. ed abbia l'ultima irregolarità uguale alla penultima di* V_d, *è regolare.*

Conosciuta la deficienza del sistema $|\mathrm{AA}'|$ contenuto nel sistema canonico completo di $|\mathrm{A}|$, il quale ha la dimensione $\mathrm{P}_g^{d-1} - 1$, ove P_g^{d-1} sia il

(15) Il teorema affermante la regolarità di $|\bar{\mathrm{E}}'|$ trovasi, per d qualunque, fin dal 1909 (n. 9, p. 15 della Memoria) nei *Fondamenti I* dell'autore. Esso rientra nel teorema che E. Marchionna chiama *teorema di regolarità* di Severi-Zariski, loc. cit. in (2), vol. III, p. 411.

(16) Questo è un punto d'arrivo (dimostrazione della relazione (16), di cui trattasi nel dominio della geometria algebrica classica) che l'A. si era prefisso fin dalla Nota lincea, presentata il 10 gennaio 1959 (*Nuove relazioni tra il genere aritmetico d'una superficie algebrica generale* A *tracciata sopra una varietà algebrica e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di* $|\mathrm{A}|$). Ved. notizie bibliografiche in proposito alle pp. 294-95 del vol. III cit. in (2), dove però i risultati di cui sopra muovono da una relazione di Kodaira, esorbitante dal quadro della geometria algebrica classica. Quanto è sopra esposto costituisce la prima dimostrazione della proprietà in oggetto nel quadro classico. Il ragionamento esposto contiene implicitamente anche la dimostrazione della invarianza di q_{d-1}, essendo invarianti q_d e i_{d-1}.

genere geometrico di A, possiamo determinare la dimensione ρ di $|A'|$ mediante la relazione:

$$\text{dimensione } |A'| - \text{dimensione } |AA'| - 1 = \text{dimensione } |A' - A| = P_g^d - 1;$$

essendo P_g^d il genere geometrico di V_d, il cui sistema canonico è appunto $|A' - A|$. Viene allora:

$$\rho = \dim |A'| = \dim |AA'| + P_g^d$$

e siccome:

$$\dim |AA'| = P_g^{d-1} - 1 - \delta,$$

risulta:

$$\rho = P_g^{d-1} - 1 - \delta + P_g^d; \tag{17}$$

ed essendo (n. 6):

$$\delta = i_{d-1}$$

viene in definitiva:

$$\rho = P_g^{d-1} - 1 - i_{d-1} + P_g^d.$$

Atteso poi che nelle nostre ipotesi A ha la irregolarità $(d-1)$-dimensionale $q_{d-1} = P_g^{d-1} - P_a^{d-1}$ (P_a^{d-1} è il genere aritmetico di A) uguale alla q_{d-1} di V_d, viene:

$$\rho = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d + q_{d-1} + q_d - i_{d-1}$$

e per la (16):

$$\rho = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d.$$

Si ricordi inoltre [17], come abbiamo richiamato nel numero precedente, che la dimensione virtuale (regolare) $\bar{\rho}$ dell'aggiunto del sistema $|A|$ è

$$\bar{\rho} = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d,$$

cosicché

$$\rho = \bar{\rho},$$

pertanto il sistema $|A'|$, di cui abbiamo indicato con ρ la dimensione, è regolare, come si voleva dimostrare.

8. *Sistemi aggiunti sovrabbondanti.* – Per eliminare completamente dalla successiva trattazione gli sviluppi di Kodaira nei riguardi di tutte le proprietà esposte nel vol. III, pag. 293, in relazione all'aggiunto $|A'|$ di una data ipersuperficie A tracciata su V_d ci manca soltanto di ottenere una dimostrazione, nel dominio della geometria algebrica classica, del teorema seguente:

TEOREMA VI (DELLA SOVRABBONDANZA).

Quando il sistema $|A'|$ aggiunto a una ipersuperficie A *la cui ultima irregolarità sia uguale alla penultima di* V_d *non è regolare, la sovrabbondanza del sistema è data dal numero* σ_{d-1} *delle forme di* 1ª *specie indipendenti, di grado* $d-1$, *che si annullano su* A *senza esser nulle su* V_d.

(17) Ved. nota ([16]) a piè di pag. Cfr. anche loc. cit. in ([2]), Vol. III, pag. 420.

La dimostrazione di questo teorema verrà esposta con tutti i dettagli nella Memoria estesa, che seguirà l'attuale Nota preventiva.

La dimostrazione poggia sopra questi punti essenziali:

1) Un lemma sulla determinazione degli integrali multipli di 1ª specie, appartenenti a una varietà, mediante le parti reali dei loro periodi.

Già nel vol. III, pag. 300, riferendoci ai risultati di Kähler e dell'Autore, contenuti in due Memorie presentate nell'adunanza del 24 gennaio 1932 e pubblicate l'una dopo l'altra nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », ci eravamo occupati di tale questione.

Si tratta, nel loc. cit. del vol. III, di un certo numero di relazioni lineari omogenee e coefficienti reali (talune a coefficienti interi) indipendenti dall'integrale considerato, formanti complessivamente un sistema « totalmente irrazionale » (vol. III, pag. 246). Queste relazioni fra le parti reali dei periodi di una forma di 1ª specie sono necessarie e sufficienti perché tali periodi appartengano effettivamente ad una forma differenziale di 1ª specie di dato grado $d-1$ di V_d.

2) Da questo teorema si deduce (come mostreremo) che ogni forma di 1ª specie di grado $d-1$, non nulla su A, avente periodi costanti non tutti nulli ai cicli invarianti di A, (vedi anche n. 8) appartenente ad una ipersuperficie A di V_d, è subordinata su A da una forma di 1ª specie non nulla, dello stesso grado, della V_d.

Da ciò poi segue:

3) La deficienza δ della serie $|AA'|$ segata sopra l'ipersuperficie A di V_d dal proprio aggiunto $|A'|$ soddisfa alla relazione.

$$\delta = i_{d-1} - \sigma_{d-1}, \tag{18}$$

dove i_{d-1} è il numero delle forme differenziali di grado $d-1$ di 1ª specie indipendenti, non nulle su V_d, e σ_{d-1} è il numero delle forme di 1ª specie indipendenti non nulle su V_d e nulle su A.

Infatti, allora le i_{d-1} forme di 1ª specie sopra dette dànno su A soltanto $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$ forme indipendenti; sicché nel sistema canonico completo subordinato su A dalle forme di 1ª specie di V_d (secondo la premessa 2), vengono a mancare le varietà canoniche $|AA'|$ le quali, a norma del teorema III, provengono da integrali impropri di V_d. Tutte le varietà canoniche di A si ripartiscono dunque soltanto in due classi: le AA' che non provengono da alcun integrale $(d-1)$-plo proprio delle V_d, e le $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$ indipendenti fra loro e dalle precedenti a norma del teorema III, che provengono (a prescindere dalle σ_{d-1} forme nulle su A) da altrettanti integrali $(d-1)$-pli di V_d. Ciò significa che la deficienza del sistema $|AA'|$ entro il sistema canonico completo di A è espressa dal numero delle varietà canoniche indipendenti della seconda classe, cioè da $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$.

Si ha pertanto la relazione $\delta = i_{d-1} - \sigma_{d-1}$ che si voleva dimostrare.

Una volta conosciuta δ, sostituendo nella relazione (17) del n. 7, viene

$$\rho = P_g^{d-1} - 1 - i_{d-1} + \sigma_{d-1} + P_g^d$$

e quindi:

$$\rho = P_g^{d-1} - P_a^{d-1} - 1 + P_a^{d-1} - i_{d-1} + \sigma_{d-1} + P_g^d - P_a^d + P_a^d$$

ossia, essendo nelle nostre ipotesi, $P_g^{d-1} - P_a^{d-1} = q_{d-1}$, $P_g^d - P_a^d = q_d$, risulta:

$$\rho = q_{d-1} - 1 + q_d + P_a^d + P_a^{d-1} - i_{d-1} + \sigma_{d-1}$$

e tenendo conto della (16) si ha

$$\rho = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d + \sigma_{d-1} ,$$

Ora $P_a^{d-1} - 1 + P_a^d$ non è altro che la dimensione virtuale regolare $\bar{\rho}$ del sistema $|A'|$, il quale, essendo non speciale, ha dunque la sovrabbondanza $\sigma_{d-1} = \rho - \bar{\rho}$.

Così è dimostrato il teorema VI. Tenuto poi conto, per il teorema II, che, quando A è t. g., $\sigma_{d-1} = 0$, ne segue senz'altro il:

TEOREMA VII. – *Condizione necessaria e sufficiente per la regolarità del sistema* $|A'|$ *aggiunto ad un'ipersuperficie* A, *che abbia la irregolarità* $(d-1)$–*dimensionale uguale alla penultima irregolarità di* V_d, *è che* A *sia t. g.*

Ciò vale fino a $d = 2$ (18).

9. I teoremi precedenti verranno applicati in Memorie da pubblicarsi nei volumi degli «Annali di Matematica» che saranno dedicate ai giubilei scientifici dei proff. Enrico Bompiani e Antonio Signorini.

La Memoria in onore del giubileo di Bompiani si riferirà alle *varietà totalmente regolari*, le quali sono le varietà aventi tutte le irregolarità nulle, che verranno caratterizzate, sia con l'assenza di forme differenziali di 1ª specie di ogni grado $\leq d-1$, sia con l'assenza di sistemi algebrici di sottovarietà, che non siano sistemi di equivalenza razionale.

Proiettivamente queste varietà resteranno caratterizzate dal fatto, che, consideratone un modello d'ordine m con varietà doppia ordinaria, i sistemi aggiunti d'ordine $m - d - 2 + h$ $(h = 1, 2, \cdots)$ segano sopra le successive sezioni della varietà con spazi lineari S_{d+1-h} $(h = 1, 2, \cdots)$, sistemi completi regolari.

Nella Memoria destinata al volume giubilare per Antonio Signorini verrà invece esposta la prima dimostrazione, sul terreno della geometria algebrica classica, della relazione di Severi–Kodaira, che, com'è noto attraverso le ricerche di Kodaira, si dimostra oggi invece con elevatissimi strumenti dell'analisi e della topologia moderna.

Nella Memoria estesa verranno pure introdotte quelle che chiameremo le *irregolarità complementari* di una varietà, le quali dovranno essere collegate coi sistemi algebrici, non di equivalenza razionale e di specie $d-1, d-2, \cdots$, costituiti da sottovarietà di dimensioni $d-1, d-2, \cdots$, della varietà data.

(18) Ved. in proposto lavori dell'autore del 1905, 1908, 1947 e una Nota di A. Franchetta del 1949.

Meccanica. — *Interpretazione di fenomeni elasto plastici per mezzo della teoria dell'eredità lineare.* Nota [*] del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

In alcune mie Note precedenti [1] ho segnalata la possibilità di trarre dalla teoria dell'eredità lineare una interpretazione di quei fenomeni che si osservano nei corpi naturali quando in essi coesistono deformazioni elastiche e deformazioni plastiche.

Un accurato studio delle modalità di applicazione della teoria consente di rendere il raffronto di essa coll'esperienza sempre più convincente ed espressivo.

Ritorno perciò su l'argomento riprendendo in esame il problema classico della flessione di una trave prismatica ed omogenea che ho già trattato [2] utilizzando una impostazione che mi aveva servito bene nello studio dei cicli di isteresi [3] e che, nel caso concreto, poteva giustificarsi come una prima approssimazione [4].

Qui mi propongo di dimostrare come si possa giungere a risultati più generali e più soddisfacenti partendo dalla considerazione che, quando una trave è sollecitata a flessione (od a presso flessione) in virtù del principio della conservazione delle sezioni piane, le sue differenti fibre longitudinali si deformano con velocità proporzionali alle loro distanze dall'asse neutro.

In un punto qualunque della sezione generica, situato a distanza y dall'asse neutro, la deformazione totale – somma della deformazione elastica e della deformazione plastica – dovrà quindi potersi scrivere sotto la forma

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = \mu y \tag{I}$$

dove, se la deformazione cresce (come noi vogliamo che cresca) linearmente col tempo,

$$\mu = \omega t \qquad (\omega = \text{costante}).$$

E ciò sia che si tratti di flessioni (o presso flessioni) determinate dall'azione di forze esterne, sia che si tratti di stati di coazione determinati da deformazioni impresse.

Così stando le cose il ricorso alla teoria dell'eredità lineare si può fare considerando la deformazione plastica in funzione della deformazione totale

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1959.

(1) «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXV (settembre–dicembre 1958) e vol. XXVI (gennaio 1959); «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», t. 247 (juillet–septembre 1958) e t. 248 (avril–juin 1959).

(2) «Rendiconti», vol. XXV, fasc. 5 (novembre 1958).

(3) «Rendiconti», vol. XXV, fasc. 3–4 (settembre–ottobre 1958).

(4) «Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics», Paris 1959.

(di cui essa non è che una frazione) e scrivendo la legge della sua dipendenza dalla deformazione totale sotto la forma suggerita dal Volterra

$$\text{(II)} \qquad \bar{\varepsilon} = \int_0^T (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) f(t)\, dt$$

dove $f(t)$ è precisamente il rapporto tra la velocità di incremento della deformazione plastica e la deformazione totale in presenza della quale questo incremento si verifica.

A questa funzione $f(t)$, a cui continueremo a dare il nome di *coefficiente d'eredità*, noi vogliamo attribuire una forma molto generale la quale metta in evidenza la sua dipendenza dallo stato di deformazione; porremo perciò

$$\text{(III)} \qquad f(t) = a_1 + a_2(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + a_3(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2 + \cdots$$

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ essendo delle costanti che caratterizzano il comportamento del materiale.

Integrando si ottiene l'espressione

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^T \omega t y\, [a_1 + a_2(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + a_3(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2 + \cdots]\, dt =$$

$$= \frac{a_1 \omega T^2}{2} y + \frac{a_2 \omega^2 T^3}{3} y^2 + \frac{a_3 \omega^3 T^4}{4} y^3 + \cdots$$

che scriveremo più semplicemente

$$\text{(IV)} \qquad \bar{\varepsilon} = k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 + \cdots$$

$k_1, k_2, k_3, \cdots$ essendo, nell'istante dato T, delle nuove costanti, legate alle costanti caratteristiche del materiale ed alla costante ω dalle relazioni

$$\text{(V)} \qquad k_1 = \frac{a_1 \omega T^2}{2} \quad , \quad k_2 = \frac{a_2 \omega^2 T^3}{3} \quad , \quad k_3 = \frac{a_3 \omega^3 T^4}{4}, \cdots$$

La (IV) esprime la legge secondo cui varia la deformazione plastica da punto a punto della sezione in un istante dato T.

Da essa si deduce subito l'analoga legge di variazione della deformazione elastica

$$\text{(VI)} \qquad \varepsilon = k_0 y - k_2 y^2 - k_3 y^3 - \cdots$$

dove

$$k_0 = \omega T - k_1 .$$

E qui diverse possibilità si prospettano a seconda delle caratteristiche del materiale, a seconda delle velocità di deformazione, a seconda dell'istante che si considera.

Incominciamo coll'osservare che, se il coefficiente di eredità fosse costante

$$f = a_1$$

si avrebbe

$$\bar{\varepsilon} = k_1 y$$

ed

$$\varepsilon = k_0 y .$$

Proporzionalità dunque tra deformazioni plastiche e deformazioni elastiche, distribuite linearmente sulla sezione non diversamente da quanto accade in regime di perfetta elasticità.

L'intervento dei fenomeni plastici altererebbe quantitativamente – ma non qualitativamente – la distribuzione delle deformazioni elastiche e quindi delle tensioni interne (5).

Ben diversamente vanno le cose se il coefficiente di eredità è variabile, se cioè è diversa da zero una almeno delle costanti $a_2 , a_3 , \cdots$

Supponiamo infatti, tanto per fissar le idee, che sia a_2 diversa da zero.

$$f = a_1 + a_2 (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) .$$

Si ha allora

$$\bar{\varepsilon} = k_1 y + k_2 y^2$$

ed

$$\varepsilon = k_0 y - k_2 y^2 .$$

L'intervento delle deformazioni plastiche determina, in questo caso, mutamenti non solo quantitativi, ma anche qualitativi, nell'andamento del diagramma delle deformazioni – e quindi anche delle tensioni.

Già in occasione della trattazione di prima approssimazione (6) avevo segnalate alcune conclusioni che l'esperienza conferma:

1° che cioè, contrariamente a quanto si ammette generalmente, l'intervento delle deformazioni plastiche si verifica anche nelle regioni più vicine all'asse neutro;

2° che tale intervento non si traduce soltanto in un incremento della deformazione totale, ma determina sempre anche una sostanziale modificazione della legge di distribuzione delle deformazioni elastiche, e quindi anche delle tensioni, su ciascuna sezione, legge che cessa senz'altro di essere lineare;

3° che deformazioni e tensioni in un qualsiasi punto della sezione vengono a dipendere non soltanto dalla sollecitazione esterna (e dal suo apparente incremento dovuto all'insieme delle deformazioni plastiche), ma anche dai particolari valori che le deformazioni plastiche hanno assunto in quel punto;

4° che il nuovo diagramma delle tensioni, raffrontato a quello che si avrebbe in regime di perfetta elasticità, accusa sempre, fin dal primo mo-

(5) « Rendiconti », vol. XXV, fasc. 6 (dicembre 1958).

(6) « Rendiconti », vol. XXV, fasc. 5 (novembre 1958).

mento, una riduzione di valori in quei punti in cui il materiale in regime elastico sarebbe stato soggetto alle tensioni più elevate, ed un aumento là dove in regime elastico la resistenza del materiale sarebbe stata meno utilizzata;

5° che uno stato di coazione ha sempre origine, comunque piccole siano le sollecitazioni a cui la trave è stata sottoposta; e che a causa di esso

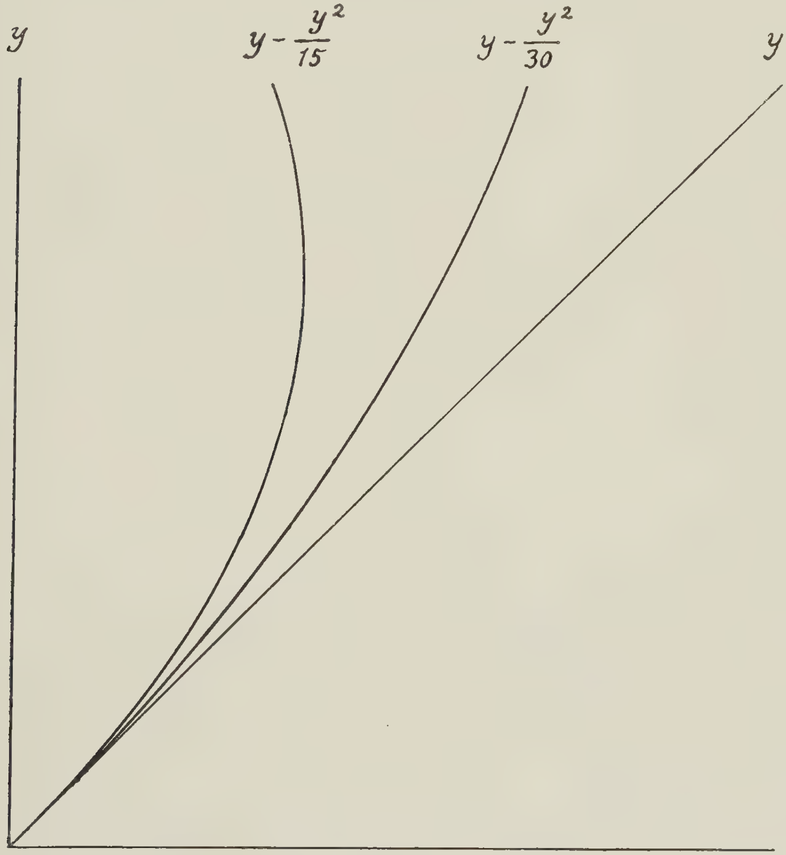


Fig. 1.

un ritorno puro e semplice della trave al suo stato naturale non deformato non sarà mai possibile.

Ma qui possiamo aggiungere qualche cosa di più: qualche cosa che la esperienza aveva da tempo rivelato, ma che la trattazione approssimata non si prestava a giustificare.

Se infatti si procede al tracciamento del diagramma delle ε – per quella parte almeno che ci interessa, cioè che è compresa fra l'asse neutro ed i bordi della sezione (fig. 1) – si constata facilmente che, per valori di k_2 inferiori ad un certo limite, le ε sono, com'era prevedibile, delle funzioni crescenti della y.

Ma per valori più grandi di k_2 – quali si possono sempre incontrare al crescere di ω e di T (cioè della velocità e della durata di applicazione del carico) – le ε si mantengono crescenti solo fino ad un certo valore di y, poi prendono a decrescere.

I massimi valori delle deformazioni elastiche – e quindi anche delle tensioni – non si verificano dunque più necessariamente sui bordi della sezione, ma possono anche cadere nell'interno di essa.

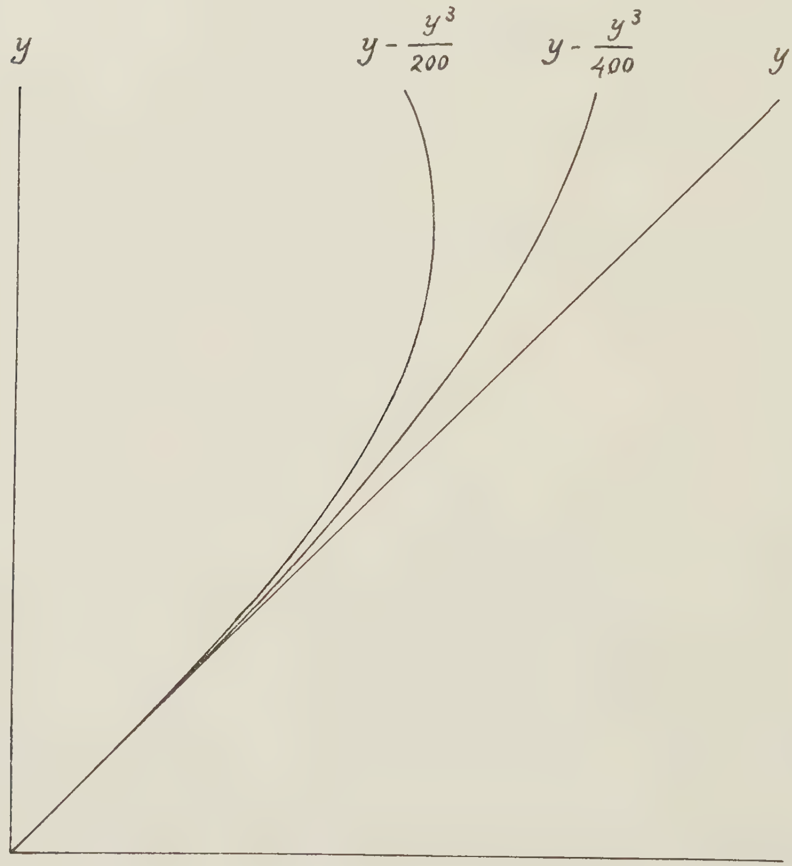


Fig. 2.

Ho detto che l'esperienza aveva già da tempo rivelata questa possibilità. Fra le tante citazioni che si potrebbero fare a conferma, mi limiterò a ricordare le recenti ricerche con cui C. Rasch è riuscito a mettere in evidenza l'influenza della velocità di variazione del carico su di una trave sollecitata a presso-flessione. Tali ricerche sono ampiamente documentate nel « Rapporto » che H. von Rüsch, Presidente della Commissione per la compressione eccentrica del « Comité Européen du Béton » ha presentato alla sezione di Vienna nell'aprile scorso (7).

(7) Comité Européen du Béton, Bulletin d'information n. 15, Paris 1959 (vedi: p. 44 e fig. 2).

Per dimostrare come la teoria possa prestarsi alla interpretazione di risultati sperimentali anche molto differenti – e tradurre le differenze di comportamento dei materiali in termini di differenti forme del coefficiente di eredità – facciamo seguire alla prima due altre figure in cui i diagrammi delle ε sono stati tracciati supponendo che, invece di a_2 sia diversa da zero la costante a_3 (fig. 2) ovvero la a_4 (fig. 3).

Si vede subito che, in queste diverse ipotesi tipiche, l'influenza dell'inter-

Fig. 3.

vento delle deformazioni plastiche su l'andamento del diagramma delle deformazioni elastiche si va, da caso a caso, spostando verso il bordo della sezione; e sempre più verso il bordo della sezione si sposta il punto in cui si verifica la massima deformazione elastica e quindi anche la massima tensione.

Spetta naturalmente e soltanto all'esperienza dire qual'è la forma che la curva assume in ciascun caso concreto, cioè per un dato materiale e per dati valori della velocità e della durata di applicazione del carico.

Ma non è senza interesse il fatto che la teoria ci permetta di passare da questi dati di fatto alla conoscenza del coefficiente di eredità che meglio si presta ad interpretarli.

Biologia. — *Di alcune difficoltà del neodarwinismo*. Nota (*) del Corrisp. GIUSEPPE COLOSI.

È lecito, a titolo di semplice curiosità, calcolare il numero di mucchi di sassi occorrenti ed il numero di successivi terremoti necessari, perché da uno di questi mucchi, mediante successive modificazioni favorevoli della forma e dell'assetto dei sassi, possa col tempo sorgere una modesta casetta o un sontuoso edificio, mentre gli altri mucchi verrebbero via via livellati e disaggregati. Però, in seguito ad un simile esercizio di calcolo – che può essere reso tanto più complicato e dilettevole per quanti più elementi o limitazioni si aggiungano, e dal quale risulterà in ogni caso dimostrato che un simile evento, così straordinariamente improbabile da sembrare assurdo, non è impossibile – non è lecito dedurre che le casupole e i palazzi, i villaggi e le città siano sorti come fortunata conclusione di una lunghissima serie di terremoti che avessero perfezionato gradualmente coacervati preesistenti. E tanto meno quei calcoli ci autorizzano a considerare i terremoti come gli unici agenti regolatori dell'edilizia, mentre tutti sanno che la loro opera consiste solo nel consentire la persistenza degli edifici dotati di stabilità e coerenza e nel provocare o affrettare la catastrofe di quelli strutturalmente fragili.

Non mi sarei soffermato su considerazioni di codesto genere se, in sede scientifica, una moderna corrente che si definisce neodarwiniana, non adottasse, per spiegare l'evoluzione organica e la realizzazione delle strutture degli esseri viventi, la medesima linea logica di chi volesse assumere l'estrema improbabilità con cui i terremoti potrebbero edificare una città come prova cruciale dell'opera costruttiva dei terremoti, anzi della loro mirabile potenza e capacità nel far progredire gli edifici verso una condizione sempre più architettonicamente elaborata e sempre più improbabile.

J. Huxley, fattosi corifeo di codesta corrente neodarwiniana, ci assicura, infatti, che la straordinaria improbabilità che per un fortuito succedersi di casuali modificazioni comunque dirette possa alla fine realizzarsi un organismo vivente, per esempio l'Uomo, è dovuta « to the capacity of natural selection, acting in Mendelian universe, to combine over a series of generations a number of mutational steps, each of wich is it self an improbable or rare event; the separate improbabilities are not merely added up, but multiplied by each other, at each new step. What this involves may be clearly pictured when we recall that the number of generations available for the evolution of the human eye, for instance, is of order of 10^8 ».

I risultati di simili calcoli, anziché scoraggiare o, per lo meno, preoccupare i neodarwinisti, conferiscono loro tranquillità e sicurezza. « Muller – prosegue Huxley – gave us a vivid picture of what we may call the impro-

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1959.

bability–generating capacity of natural selection, by calculating the number of organisms wich would be necessary, on the basis of our knowledge of the frequency of mutation and other biological processes, to throw up a single organism as complex as ourselves on the basis of chance alone, without the intervention of selection. An extremely conservative estimate is 10^{3000}, wich much trascends any numerical properties of the entire Einsteinian universe. An improbability–generating capacity of this order would be quite sufficient to account for the most elaborate adaptations. Thus the old arguments about the impossibility of imagining that " chance " could " create " a hand or eye or other complex adaptive organ no longer carry any weight. In fact, the " argument from improbability " has recoiled on the heads of its users, and the apparently incredible complication of a organ must now be taken as additional evidence for the power of natural selection ». Perciò Huxley, dopo aver fatto suo l'aforisma di Fisher « Natural selection is a mechanism for generating a high degree of improbability », grazie alle dimostrazioni dello stesso Fisher, di Haldane, Muller, Wright e qualche altro, si sente di poter affermare che « the geneticist, fortified by a quantitative grasp of natural selection, can say " credo quia improbabile " ».

Libero ciascuno di seguire Huxley per questa via – la segue e si fa banditore di una simile concezione anche il nostro Montalenti –; ma conviene osservare che, allargandone appena appena la portata, si verrebbe a concludere che quanto più inverosimile è una supposizione, tanto più facile è che essa corrisponda al vero e, infine, che la sicurezza assoluta di un evento si raggiunga solo quando se ne dimostri l'impossibilità e l'assurdità. Principio questo che, almeno nel campo delle scienze positive, apparirà a molti alquanto discutibile e, se largamente applicato, tale da condurre verso una china pericolosa.

D'altra parte per chi sostiene che la realizzazione degli esseri viventi con tutte le loro complicate strutture formalmente e funzionalmente correlate, adatte all'ambiente e caratteristiche di ciascuna specie sia dovuta alla selezione naturale operante some agente direttivo sul materiale offerto dalle più svariate piccole sporadiche variazioni ereditarie, non v'è altra risorsa che quella di non spaventarsi dinnanzi alla veramente spaventosa improbabilità con cui, secondo il meccanismo da lui postulato, si verificherebbe l'evento, e di portare tale improbabilità come prova dell'esistenza e dell'efficienza del meccanismo.

In ogni caso, prima di appigliarsi alla possibilità che un evento altamente improbabile si verifichi come conseguenza di un determinato processo, non sarebbe inopportuno esaminare gli elementi necessari ed indispensabili perché il processo possa aver luogo. I neodarwinisti, cioè, dovrebbero dimostrare: 1° il valore filogenetico delle sporadiche mutazioni fortuite dirette comunque; 2° il valore filogenetico positivo della selezione naturale esercitantesi su tali mutazioni; 3° l'addizionabilità di esse nel corso della filogenesi perché da organismi o da organi allo stato di primordiale semplicità si possa giungere ad organismi o ad organi molto complessi ed altamente differenziati. Senza che

si verifichino queste tre condizioni basilari, il processo filogenetico da loro immaginato non potrebbe aver luogo. Perciò, fino a che non verrà data una giustificazione convincente del significato e del compito che essi assegnano alle mutazioni fortuite e alla selezione naturale, è inutile dedicarsi ad esercizi matematici, il cui risultato, per giunta, li costringe a ricorrere all'argomento della possibilità dell'altamente improbabile.

Circa il valore filogenetico delle mutazioni lo stesso Huxley è costretto a confessare che « it must be admitted that the directe and complete proof of the utilisation of mutations in evolution under natural conditions has not yet been given ». D'altra parte di quelle prove parziali e indirette il cui insieme, secondo Huxley, dovrebbe risultare dimostrativo, non ve n'ha una che non sia molto discutibile, salvo quella consistente nel fatto, da nessuno contestato, che esistono piccole mutazioni: fatto che non prova nulla, perché non la loro esistenza ma il loro significato filogenetico è oggetto di controversie.

Un rilevante numero di biologi pone in dubbio o addirittura nega che le mutazioni invocate dai neodarwinisti costituiscano il materiale da cui prendono inizio i gruppi sistematici. In realtà tali mutazioni non sono che variazioni ereditarie di solito di lievissima entità, di solito reversibili, prive di qualsiasi necessaria relazione di congruenza con l'ambiente, di solito dannose e con carattere tanto più evidentemente teratologico per quanto più si discostano dal tipo originario, che insorgono sporadicamente per cause imprecisate in seno alla specie. Perciò un rilevante numero di biologi trova ragionevole opinare che tali mutazioni non siano che maniere più o meno abnormi con cui può presentarsi la specie, che si tratti di fluttuazioni genotipiche a cui corrispondono stirpi satelliti che accompagnano la specie nel corso della sua evoluzione, ma che non rappresentino affatto i punti di partenza di nuove linee filetiche. L'albinismo, la polidattilia, la sindattilia sono mutazioni che si verificano non infrequentemente in molti Mammiferi, Uomo compreso; ma nulla ci autorizza ad opinare che da una coppia di individui con un dito soprannumerario possa originarsi una linea filetica diversa dall'originaria; è anzi credibile che, se essi appartengono alla specie umana, ne discenderanno individui che, sebbene polidattili, apparterranno sempre alla specie umana (e non già ad una nuova specie od a un nuovo genere), di cui seguiranno il corso filogenetico.

I neodarwinisti sono quasi concordi nell'ammettere che l'evoluzione procede per accumulò di una serie di fortuite e sporadiche mutazioni che, risultando per raro caso vantaggiose e susseguendosi per caso nel medesimo senso, vengano favorite dalla selezione naturale, la quale secondo loro in certe condizioni funzionerebbe da agente « creativo ».

Ora, circa il concetto di selezione naturale e circa la sua azione molto si è discusso e si discute; né si è certamente raggiunto un troppo largo consenso relativamente alla sua efficacia « creativa » e alle sue capacità discriminative rispetto alle piccole mutazioni.

I neodarwinisti dalla constatazione che esistono organi molto complicati particolarmente adatti a determinate funzioni e a speciali uffici, vogliono

desumere l'efficacia e la delicatezza con cui la selezione naturale, agendo positivamente sulle piccole variazioni ereditarie fortuite, prescegliererebbe quelle favorevoli. D'altra parte « the converse of the delicacy of adaptation produced by natural selection is the degeneration that occours when selection is absent ». Ma le due affermazioni mi pare che non siano tali da rinforzarsi a vicenda. Se la selezione non ha presa su caratteri privi di valore funzionale, (e se, anzi, in tal caso ne potrebbero conseguire effetti catastrofici) non risulta evidente come possa avere esercitato opera discriminativa a favore di strutture incipienti, i cui caratteri erano ancora ben lontani dall'assicurare vantaggi. Quale vantaggio avrebbe potuto conferire agli eventuali mutanti una minima alterazione degli arti anteriori accompagnata da una piccola modificazione delle produzioni cornee dell'epidermide – o, se si preferisce risalire ad antenati più remoti dei Rettili, una lieve alterazione del corrispondente paio di piccole protuberanze laterali, – perché la selezione proteggesse gli individui che ne erano affetti, perseverando successivamente fino a « creare » gli Uccelli con le loro ali fornite di penne?

Non basta, per dimostrare la finezza della selezione assicurare che essa sovente opera su differenze così piccole da sfuggire alle nostre ricerche, e che «Muller has recently brought specific proofs of the capacity of natural selection to act effectively on differences beyond the power of human discrimination ». Né basta, a chi, come Goldschmidt, obbietti che l'evoluzione « by a series of micromutations controlled by selection is simply unimaginable », rispondere con Huxley che « one can only reply that his imagination differs from that of many other biologists ». Nel nostro caso si richiedono prove che non abbiano a loro volta bisogno di prove – e così all'infinito –, senza far soverchio assegnamento sulla potenza delle proprie facoltà immaginative.

Tutto sommato la gran maggioranza dei biologi è dispostissima ad ammettere che la selezione naturale abbia esercitata una notevole azione sulla composizione del mondo vivente e sulla distribuzione degli organismi: sarebbero, cioè, periti quelli inadatti all'ambiente in cui erano costretti a vivere, ed avrebbero persistito, dando discendenza e continuando ad evolvere, quelli che vi erano costituzionalmente adatti. Ma si tratta di un'azione negativa, eliminatrice, della selezione e non già di quell'azione « creatrice » senza la quale « evolutionary novelty would not and could not have been produced » postulata dai neodarwinisti.

A dire il vero, le novità dovrebbero essere attribuite alle mutazioni e non alla selezione naturale, il cui compito sarebbe non creativo, ma soltanto discriminativo rispetto alle novità delle mutazioni e, se esercitato in determinati sensi per lunghissima serie di generazioni, provocatore di indirizzi filetici. Comunque – dato e non concesso che l'evoluzione, dai corpi viventi primordiali fino agli organismi più differenziati, si compia mercè l'opera delicata ed assidua della selezione naturale esercitantesi sopra una congerie di fortuite mutazioni dirette comunque – si presenta inevitabilmente un arduo problema: l'evoluzione dovrebbe avvenire per mezzo di successive aggiunte,

per mezzo di una somma di mutazioni (di semplici micromutazioni secondo i più, di micromutazioni intervallate da rare macromutazioni secondo Goldschmidt). Ma che cosa effettivamente si somma? quali sono gli addendi? come si attua la somma?

Non risulta che di questo problema sia stata fornita una soluzione plausibile dai neodarwinisti, parecchi dei quali, anzi, non si pongono nemmeno il problema. La difficoltà di spiegare sulle basi dell'odierna concezione neo–mendeliana del gene e del genoma la progressiva complicazione strutturale conseguita dagli organismi nel corso dell'evoluzione, pare sia tale da consigliarli ad evitarlo o a sfiorarlo vagamente.

Che nel corso dell'evoluzione i sistemi a cui è dovuta la manifestazione dei caratteri specifici abbiamo dovuto complicarsi, è ovvio. Ma circa la maniera secondo cui, mediante addizioni successive, dovrebbero attuarsi le graduali complicazioni (a meno che non si voglia ricorrere all'ipotesi dei virus che, sempre per caso, si intercalino nel precedente patrimonio ereditario!) le idee rimangono oscure. La concezione del meccanismo regolatore di Waddington è stata esaurientemente criticata da Cannon e non si potrebbe ammetterla che con un atto di fede. Huxley ci assicura che « one of the most interesting developments of the genetical theory in recents years is the recognition that natural selection will operate to produce adaptive improvement in the genetic mechanism itself ». Ma gli schiarimenti che si affretta a fornire in proposito sono poco persuasivi: « The need for complexity in the genetic mechanism has led to an increase in the number of different kinds of self–reproducing units or genes; the need for close adjustment of the processes of individual development and maintenance has led to the stabilization of the quantitative relations of the great majority of genes, by means of their union into chromosomes and the evolution of mitosis and meiosis; the need for evolutionary flexibility has, among other things, led to development of balanced arrangements of multiple factors within chromosomes, including the elaborate special mechanism that Mather has described as polygene system ». Se ho ben capito, in tutto codesto discorso esplicativo la selezione vien messa in disparte e sostituita dal bisogno, che, in verità, non mi pare possa venir considerato come il suo esatto equivalente.

Ma ammettiamo pure che sia il bisogno e non la selezione naturale a far progredire, accrescere e differenziare i sistemi genetici; rimane però sempre da risolvere il problema: se l'evoluzione procede per aggiunta di unità genetiche in seguito a un susseguirsi di mutazioni – ricordando che le mutazioni fattoriali consistono in sostituzioni di un gene con un suo allele –, come si attua la somma? quale è la natura e il comportamento degli addendi? Si potrebbe – è vero – risolvere apparentemente il problema della somma associando le mutazioni geniche al polisomismo; ma si tratterebbe di perseverare nel già troppo abusato sistema di ricorrere a nuove insufficienti ipotesi per spiegare le difficoltà incontrate da una precedente ipotesi: nuove ipotesi che, se dànno una buona dimostrazione della fervida fantasia di che le propone, non possono a nessun titolo venire addotte come prove.

Insomma: fino ad oggi non si può assicurare né che le mutazioni geniche fortuite abbiano valore filogenetico, né che esse siano addizionabili, né che la selezione naturale diriga la filogenesi discriminandole e addizionandole. Eppure queste ipotesi – non suffragate da prove e spesso contradette dai fatti –, erette a dogma, costituiscono le non troppo solide basi di tutto quel neodarwinismo, che secondo Huxley ed i suoi accoliti « led rapidly to the final discrediting of Lamarckism » e – superfluo aggiungerlo – di tutte le cosidette " teorie dell'evoluzione per cause interne " quali quelle di Naegeli, di Rosa, di Berg e di Hennig, teorie che altri non meno valorosi biologi ritengono rispettabili.

BIBLIOGRAFIA [1].

L. S. BERG, *Nomogenesis or Evolution determined by law*, Constable, London 1926.
H. G. CANNON, *The evolution of living things*, University Press, Manchester 1958.
G. COLOSI, *L'idoneità all'ambiente e l'evoluzione*, « Arch. zool. ital. », XXXVIII, 1952
— *Le correlazioni nel mondo vivente*, « Boll. Labor. Zool. gener. e agraria, Portici », XXXIII, 1954.
— *Filogenesi e sistematica*, « Bool. di Zool. », XXIII, 1956.
— *Neodarwinismo e Ologenismo*, « Bool. di zool. », XXV (1958), 1959.
B. DURKEN, *Allgemeine Abstammungslehre*, Borntraeger, Berlin 1923.
— *Entwicklungsbiologie und Ganzheit*, Teubner, Leipzig 1936.
W. HENNIG, *Grundzüge einer Theorie der phylogenetischer Systematik*, Deutscher Zentralverlag, Berlin 1950.
J. HUXLEY, *Evolution. The modern syntesis*, Allen a. Unwin, London, 1942.
— *Genetics, Evolution and Human destiny*, in: *Genetics in the 20^{th} Century*, ed. by L. D. Dunn. Macmillan, New York, 1951 [2].
E. RABAUD, *Le hasard et la vie des espèces*. Flammarion. Paris 1953.
D. ROSA, *L'Ologénèse. Nouvelle théorie de l'évolution et de la distribution géographique des êtres vivants*. Alcan. Paris 1931.

(1) Sono ricordati solo alcuni lavori contenenti critiche relative al valore filogenetico delle mutazioni e della selezione naturale o forniti di più ampi riferimenti bibliografici.

(2) Da questo lavoro di Huxley sono tratte quasi tutte le citazioni testuali contenute nella presente Nota.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné.* Nota I di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI e ANDRZEJ SZYBIAK, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

1. Soit

$$(1)\qquad F[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j(t, X) \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} + c(t, X) u = 0$$

une équation linéaire normale du type parabolique. On désigne par X le point aux coordonnées $x_1, \cdots, x_m$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}^m$ à $\boldsymbol{m}$ dimensions. Les coefficients de (1) sont déterminés par hypothèse dans une couche $\mathcal{C}: X \in \mathcal{E}^m$, $S < t < T$. On suppose que les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_j(t, X)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$ sont continus et bornés dans $\mathcal{C}$ ainsi que leurs dérivées jusqu'au 3–me ordre et qu'il existe un nombre $a_0 > 0$ tel que l'on ait

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j \geq a_0 \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2$$

pour $(t, X) \in \mathcal{C}$ et pour tout vecteur $\Lambda(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$.

Le coefficient $c(t, X)$ est par hypothèse continu dans $\mathcal{C}$, lipschitzien par rapport à X et satisfait à l'inégalité

$$(2)\qquad |c(t, X)| \leq A^2 |X|^2 + B,$$

où $A > 0$ et $B > 0$ sont des nombres constants et $|X|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$. Ces hypothèses sur le coefficient $c(t, X)$ seront appelées brièvement hypothèses (H).

2. Nous appelons *solution fondamentale* de l'équation (1) une fonction $U(t, X; s, Y)$ continue dans un ensemble $\mathcal{S}: X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$, $S \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T_1$ $(T_1 \leq T)$, de classe C^2 [1] par rapport aux variables x_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$, de classe C^1 par rapport à t et jouissant des propriétés suivantes:

1° $U(t, X; s, Y)$ satisfait à (1) en tant que fonction du point (t, X) dans $\mathcal{C}$;

2° $\varphi(Y)$ étant une fonction continue pour $Y \in \mathcal{E}^m$, s'annulant en dehors d'une sphère $|Y| \leq R$ (le nombre R dépendant de la fonction $\varphi(Y)$) on a

$$(3)\qquad \lim_{t \to s} \int_{\mathcal{E}^m} U(t, X; s, Y) \varphi(Y) \, dY = \varphi(X).$$

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1959.

(1) C'est à dire admettant les dérivées du second ordre continues.

Dans le cas du coefficient $c(t, X)$ borné dans la couche $\mathcal{C}$ la solution fondamentale de (1) a été déterminée par F. G. Dressel (voir [1]).

J. Hadamard [3] a déterminé une solution de l'équation à deux variables indépendantes

$$u''_{xx} - u'_t + c(t, x)\, u = 0 \tag{4}$$

de la forme

$$U(t, x) = (4\pi t)^{-1/2}\, e^{-x^2/4t} + \mathfrak{U}(t, x), \tag{5}$$

la fonction $\mathfrak{U}(t, x)$ étant régulière pour $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$ et représentée sous la forme de la somme d'une série (2). E Holmgren [4] a établi des conditions suffisantes pour la convergence de cette série, rapprochées à (H).

3. Soit $U_0(t, X; s, Y)$ la solution fondamentale de l'équation

$$F_0[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j(t, X) \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Considérons la série

$$U_0(t, X; s, Y) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t, X; s, Y), \tag{7}$$

les fonctions U_k $(k = 1, 2, \cdots)$ étant définies par les formules de récurrence

$$U_k(t, X; s, Y) = \int_s^t d\tau \int_{\mathcal{E}^m} U_0(t, X; \tau, \Xi)\, c(\tau, \Xi)\, U_{k-1}(\tau, \Xi; s, Y)\, d\Xi. \tag{8}$$

Nous allons démontrer que la série (7) est convergente dans un ensemble $\mathcal{S}(A): X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$, $S \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T(A)$, où $T(A)$ dépend des coefficients de l'équation (1) et que la somme $U(t, X; s, Y)$ de cette série constitue la solution fondamentale de (1). À cet effet nous allons construire une majorante de (7).

4. Nous vérifions par des calculs directs que la fonction

$$\begin{aligned} W(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta) = {} & [(2\pi/\alpha) \sin 2\alpha(t-s)]^{-m/2} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(|X|^2 + |Y|^2) \operatorname{ctg} 2\alpha(t-s) + \alpha X \cdot Y \sin^{-1} 2\alpha(t-s) + \beta(t-s)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

(2) M. Hadamard a appelé la fonction (5) solution fondamentale de l'équation (4) et a déterminé ensuite une solution analogue de l'équation parabolique générale à deux variables indépendantes sous la forme canonique. Observons que la fonction (5) n'est pas une solution fondamentale au sens de la définition que nous avons admise.

$\left(\text{où } X \cdot Y = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right)$ constitue dans la couche $\Gamma(\alpha): X \in \mathcal{E}^m, Y \in \mathcal{E}^m$, $0 < t - s < \frac{\pi}{2\alpha}$ une solution fondamentale de l'équation

$$(10) \qquad \Delta W - W_t' + (\alpha^2 |X|^2 + \beta) W = 0,$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont des paramètres (3).

D'autre part on peut représenter la fonction W sous la forme de la somme d'une série

$$(11) \qquad W(t, X; s, Y | \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t, X; s, Y | \alpha, \beta),$$

les fonctions W_k étant de la forme

$$(12) \qquad W_k(t, X; s, Y | \alpha, \beta) = v_0(t, X; s, Y) P_k(t, X; s, Y | \alpha, \beta),$$

où la fonction

$$(13) \qquad v_0(t, X; s, Y) = [4\pi(t-s)]^{-m/2} \exp\left[-\frac{|X-Y|^2}{4(t-s)}\right]$$

est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, $P_0(t, X; s, Y | \alpha, \beta) = 1$ et P_k $(k = 1, 2, \cdots)$ sont des polynômes homogènes du degré k en α^2 et β et des polynômes en x_i et y_i $(i = 1, \cdots, m)$, $t - s$; les composants particuliers du polynôme P_k sont du degré k au moins en $(t-s)$ (4). On déduit des théorèmes connus concernant les séries des puissances que la série (11) est presque uniformément convergente (5) dans la couche $\Gamma(\alpha)$ et qu'il en est de même des séries obtenues de (11) par des dérivations terme à terme un nombre arbitraire de fois par rapport aux arguments quelconques. En substituant la fonction W à l'équation (10) et en effectuant des dérivations terme à terme, on établit, par une comparaison des termes du même degré en α^2 et β, des relations suivantes

$$(14) \qquad \Delta W_k - \frac{\partial W_k}{\partial t} + (\alpha^2 |X|^2 + \beta) W_{k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Nous en allons déduire des formules intégrales de récurrence relatives aux fonctions W_k; à cet effet nous démontrerons d'abord certains théorèmes auxilaires.

(3) La fonction W se réduit pour $|Y| = 0, s = 0$ à celle introduite par Oseen et appliquée par Holmgren dans la note [4].

(4) Tous les détails des calculs seront exposés dans un travail des auteurs qui paraîtra aux « Annales Polonici Mathematici », vol. 9.

(5) C'est à dire uniformément convergente dans tout sous-ensemble compact de cette région.

5. Appelons classe E_r une classe de fonctions $u(t, X)$ définies dans un domaine D non borné dans les directions des axes x_i et satisfaisant à la condition suivante

$$|u(t, X)| \leq M \exp(K |X|^r)$$

pour $(t, X) \in D$, M et K étant deux nombres costants (qui dépendent en général de la fonction $u(t, X)$).

Soit $\mathcal{K}$ la classe de fonctions $F(t, X)$ de classe C^2 dans une couche $\mathbf{C}: X \in \mathcal{E}^m$, $0 < t < T_0$ et y jouissant des propriétés suivantes:

1° Ω étant un voisinage quelconque de l'origine $\mathbf{O}$, les fonctions $F(t, X)$ sont de classe E_2 dans l'ensemble $\mathbf{C} - \Omega$.

2° Pour $(0, X_0) \neq \mathbf{O}$ fixé on a $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ X \to X_0}} F(t, X) = 0$.

3° À toute fonction $F(t, X)$ de classe $\mathcal{K}$ correspond un nombre σ tel que $0 < \sigma < m/2$ et que le produit $(|X|^2 + t)^\sigma F(t, X)$ soit borné dans tout ensemble $\mathbf{C} \cap \Omega$, Ω étant un voisinage quelconque de l'origine.

THÉORÈME I. – *La seule solution de l'équation de la chaleur*

$$\Phi[v] \equiv \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

appartenant à la classe $\mathcal{K}$ *est* $v(t, X) \equiv 0$ [(6)].

Nous présentons seulement l'idée de la démonstration. Choisissons un nombre ω tel que $\sigma < \omega < m/2$. Posons, pour $X \in \mathcal{E}^m$,

$$\varphi(X) = \max[1, |X|^{-2\omega}]$$

et

$$H_0(t, X) = \int_{\mathcal{E}^m} v_0(t, X; 0, \Xi)\, \varphi(\Xi)\, d\Xi,$$

v_0 étant la solution fondamentale de (15) (voir n. 4). On démontre que l'on a

$$H_0(t, X) > 1 \qquad \text{pour} \quad X \in \mathcal{E}^m, t > 0, \tag{16}$$

$$\lim_{(t, X) \to O} (|X|^2 + t)^\sigma H_0(t, X) = \infty.$$

Soit $v(t, X)$ une solution de (15) appartenant à la classe $\mathcal{K}$. Considérons un voisinage Ω_0 de l'origine et soient M et K_0 deux nombres positifs tels que l'on ait

$$|v(t, X)| \leq M \exp[K_0 |X|^2] \qquad \text{pour} \quad (t, X) \in \mathbf{C} - \Omega_0.$$

Soit $K > K_0$ un nombre constant. On peut choisir des nombres $\mu(K)$ et $\nu(K)$ tels que la fonction

$$H_1(t, X) = \exp\left[\frac{K |X|^2}{1 - \mu(K) t} + \nu(K)\right] \tag{17}$$

(6) Ce théorème admet des généralisations étendues.

satisfasse à la condition $\Phi[H_1] < 0$ (voir p. ex. [6] et [7]). Soit

$$H(t, X) = H_0(t, X) + H_1(t, X)^{(7)}.$$

On a $\Phi[H] = \Phi[H_1] < 0$.

Suivant l'idée exposée par M. Picone (voir [9]) nous posons

$$\bar{v}(t, X) = v(t, X)/H(t, X) \qquad \text{pour} \quad (t, X) \in \mathbf{C},$$

$$\bar{v}(0, X) = 0 \qquad \text{pour} \quad X \in \mathcal{E}^m.$$

Il résulte de la définition de la classe $\mathcal{K}$, de (16) et (17) que la fonction $\bar{v}(t, X)$ est continue dans l'ensemble $\mathbf{C} : X \in \mathcal{E}^m, 0 \leq t < T_0$ et que l'on a $\lim_{X \to \infty} \bar{v}(t, X) = 0$ uniformément pour $0 \leq t < T_0$. Elle satisfait dans $\mathbf{C}$ à une équation de la forme

$$\Delta\bar{v} - \bar{v}'_t + \sum_{j=1}^{m} B_j(t, X)\,\bar{v}'_{x_j} + C(t, X)\,\bar{v} = 0,$$

où l'on a $C(t, X) \doteq H^{-1}\Phi(H) < 0$. En procédant ensuite de même que dans la démonstration du th. 1 de [6] (ou th. 1 de [8]), on démontre que l'on a $\bar{v}(t, X) \equiv 0$ dans $\mathbf{C}$.

COROLLAIRE. – *Soit $f(t, X)$ une fonction déterminée dans la couche* $\mathbf{C}$. *Dans la classe $\mathcal{K}$ il existe une solution au plus de l'équation* $\Phi[v] = f(t, X)$.

OUVRAGES CITÉS.

[1] F. G. DRESSEL, *The fundamental solution of the parabolic equation.* « Duke math. Journal », *7*, 186–203 (1940); ibid., *13*, 61–70 (1946).

[2] S. D. EIDELMAN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe), « Matiem. Sbornik », *38* (80) n. 1, 51–92 (1956).

[3] J. HADAMARD, *Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris », *152*, 1148–1149 (1911).

[4] E. HOLMGREN, *Sur la solution élémentaire des équations paraboliques*, « Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik », *15*, n. 24, 1–5 (1921).

[5] S. ITÔ, *On the fundamental solution of the parabolic equation on the differentiable manifold*, « Osaka Math. Journal », vol. 5, n. 1, 75–92 (1953), ibid., vol. 6, n. 2, 167–185 (1954).

[6] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, « Annales de la Soc. Polon. de Math. », *18*, 145–156 (1945), et ibid., *20*, 7–9 (1947).

[7] M. KRZYŻAŃSKI, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, « Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences », Ser. Math., Astron. et Phys., vol. 7, n. 3, 136–139 (1959).

[8] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion*, « Annales de la Soc. Polon. de Math. », *23*, 95–111 (1950).

[9] M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera*, « Math. Annalen », *10*, 701–712 (1929).

[10] A. SZYBIAK, *On the asymptotic behaviour of the solutions of the equation* $\Delta u - u_t + c(x)\,u = 0$, « Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences », Ser. Math., Astron. et Phys., vol. 7 (1959).

(7) Une fonction analogue a été introduite dans [8].

Analisi funzionale. — *Integrali vettoriali di Stieltjes ed operatori lineari*. Nota [*] di ROMULUS CRISTESCU, presentata dal Socio F. SEVERI.

In questa Nota sarà introdotto un integrale del tipo di Stieltjes per le funzioni vettoriali continue, rispetto ad una funzione a variazione limitata i cui valori sono operatori. Sarà poi generalizzato il teorema di Riesz [1] per gli operatori lineari e continui su uno spazio di funzioni vettoriali continui e a valori in uno spazio lineare ordinato [2].

1. *Spazi di funzioni vettoriali*. – Sia T un intervallo reale $a \leq t \leq b$ e $\mathfrak{X}$ un reticolo normato [3]. Indicheremo con $B(T, \mathfrak{X})$ l'insieme di tutte le funzioni f su T e a valori in $\mathfrak{X}$ che sono limitati rispetto alla norma: $\|f(t)\| \leq \lambda_f$. Definiamo in $B(T, \mathfrak{X})$ le operazioni $f_1 + f_2$ e αf (α reale) in modo naturale, la norma:

$$\|f\| = \sup_{t \in T} \|f(t)\|$$

e l'ordine: $f \leq g$, se $f(t) \leq g(t)$ qualunque sia $t \in T$. Si vede facilmente che $B(T, \mathfrak{X})$ diventa un reticolo normato e che

$$(f \vee g)(t) = f(t) \vee g(t) \quad , \quad (f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t). \tag{1}$$

Indichiamo ora con $C(T, \mathfrak{X})$ il sottospazio lineare di $B(T, \mathfrak{X})$ costituito da tutte le funzioni continue rispetto alla norma di $\mathfrak{X}$. Si verifica facilmente che le funzioni (1) sono continue; in particolare il modulo di un elemento $f \in C(T, \mathfrak{X})$ non cambia se lo si considera in $B(T, \mathfrak{X})$. Dunque $C(T, \mathfrak{X})$ è un sottoreticolo normato di $B(T, \mathfrak{X})$.

Sia ora $\mathfrak{Y}$ un reticolo lineare completo [4] e $\mathfrak{V}$ uno spazio normato. Un operatore additivo U definito su $\mathfrak{V}$ e a valori in $\mathfrak{Y}$ sarà chiamato (no)-limitato, se l'insieme $A(U) = \{U(v) \mid \|v\| \leq 1\}$ è limitato rispetto all'ordine di $\mathfrak{Y}$. L'elemento $|U| = \sup A(U)$ di $\mathfrak{Y}$ sarà chiamato *la norma*

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 giugno 1959.

(1) F. RIESZ, *Sur les operations fonctionelles lineaires*, «C. R. Acad. Sci. Paris», *149*, 974–977 (1909); ved. anche: O. ONICESCU, *Integrale singulare și reprezentarea functionale lor lineare*, Revista Univ. «C. I. Parhon» București, nr. 2, 1953; O. ONICESCU și C. IONESCU-TULCEA, *Regularizarea masurilor și teorema lui Riesz*. Revista Univ. «C. I. Parhon» București, nr. 6–7, 1955.

(2) Il caso particolare degli operatori definiti su uno spazio di funzioni continui reali, è stato considerato da L. V. KANTOROVICI (*Linear operations in semi-ordered spaces*, «Math. Sbornik», 7, 209–284 (1940).

(3) Cfr. per esempio G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, cap. XV, § 9 («Banach lattices»); non supponiamo però la completezza di $\mathfrak{X}$ rispetto alla norma. Indichiamo con $|x| = x \vee (-x)$ il modulo di x e con $\|x\|$ la norma di x.

(4) *Complete vector lattice*, in G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, cap. XV.

vettoriale di U. Se $\mathfrak{Y}$ è un reticolo normato, allora U è $(o\,o)$–limitato [5]. In questo caso ha senso il modulo $|U| = U \vee (-U)$.

Considereremo in seguito, operatori additivi e $(n\,o)$–limitati su $C(T, \mathfrak{X})$.

2. *Integrali vettoriali di Stieltjes.* - Sia $f \in C(T, \mathfrak{X})$ e g una funzione di T e a valori nell'insieme $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ degli operatori additivi e $(n\,o)$–limitati che applicano $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$. Supporremo la funzione g a *variazione limitata rispetto alla norma vettoriale*, ciò che vuol dire che l'insieme delle somme della forma

$$\sum_i \| g(t_{i+1}) - g(t_i) \|$$

che corrispondono a tutte le partizioni finite di T, è limitato in $\mathfrak{Y}$. L'estremo superiore di questo insieme sarà la variazione totale (rispetto alla norma vettoriale) di $g(t)$ su T e si indicherà con $n\text{–}\underset{T}{\mathrm{var}}\, g(t)$.

Per ogni partizione finita Δ di T:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

consideriamo la somma

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} [g(t_{i+1}) - g(t_i)]\,(f(t_i)).$$

Sia $\nu(\Delta) = \max(t_{i+1} - t_i)$. Come per le funzioni numeriche, si può verificare l'esistenza dell'integrale

$$\int_T dg(t)\,(f(t)) \tag{2}$$

definito come limite rispetto all'ordine (di $\mathfrak{Y}$) di una successione $\{s_{\Delta_n}\}$, dove $\{\Delta_n\}$ è una successione qualunque di partizioni di T, tale che $\nu(\Delta_n) \to 0$. Il limite non dipende dalla successione $\{\Delta_n\}$. Si ha poi,

$$\left| \sum_i [g(t_{i+1}) - g(t_i)]\,(f(t_i)) \right| \leq \sum_i |[g(t_{i+1}) - g(t_i)]|\,(|f(t_i)|) \leq$$

$$\leq \sum_i \|f(t_i)\|\, \| g(t_{i+1}) - g(t_i) \| \leq \|f\| \sum_i \| g(t_{i+1}) - g(t_i) \| \leq \|f\|\,(n\text{–}\underset{T}{\mathrm{var}}\, g(t))$$

e quindi

$$\left| \int_T dg(t)\, f(t) \right| \leq \|f\|\,(n\text{–}\mathrm{var}\, g(t)). \tag{3}$$

Indicando con $U(f)$ l'integrale (2), si ha evidentemente un operatore additivo U su $C(T, \mathfrak{X})$ a valori in $\mathfrak{Y}$, che con la (3) è anche $(n\,o)$–limitato e

$$\| U \| \leq n\text{–}\underset{T}{\mathrm{var}}\, g(t). \tag{4}$$

Nella sezione seguente dimostreremo la reciproca di questa affermazione.

(5) Ved. (3), § 7.

3. *La rappresentazione degli operatori additivi e $(n\,o)$–limitati.* – Sia ora U un operatore additivo e $(n\,o)$–limitato qualunque su $C(T, \mathfrak{X})$ e a valori in $\mathfrak{Y}$. Con il teorema di Hahn–Banach (esteso per gli operatori a norma vettoriale da L. V. Kantorovici [6]), l'operatore U si può estendere su $B(T, \mathfrak{X})$ conservando la sua additività e la sua norma vettoriale.

Definiamo ora, per ogni $\tau \in T$:

$$K_\tau(t) = \begin{cases} I & \text{se} \quad a \leq t \leq \tau \\ O & \text{se} \quad \tau < t \leq b \end{cases}$$

dove I e O sono rispettivamente l'operatore identità e l'operatore nullo in $\mathfrak{X}$. Se $y_\tau \in M(T, \mathfrak{X})$ è la funzione

$$y_\tau(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se} \quad a \leq t \leq \tau \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \tau < t \leq b \end{cases}$$

allora possiamo scrivere: $y_\tau(t) = K_\tau(t)(x_0)$. Adopreremo così la notazione: $y_\tau = K_\tau x_0$.

Indichiamo ora, per ogni $\tau \in T$, con $g(\tau)$ l'operatore su $\mathfrak{X}$ a valori in $\mathfrak{Y}$ definito per $\tau \neq 0$ dall'uguaglianza $g(\tau)(x) = U(K_\tau x)$, e poniamo poi $g(a)(x) = \mathbf{0}$.

Per ogni $\tau \in T$, l'operatore $g(\tau)$ è additivo e (no)–limitato.

Infatti, l'additività si stabilisce subito, e la $(n\,o)$–limitazione risulta dalle relazioni

$$|g(\tau)(x)| = |U(K_\tau x)| \leq \|K_\tau x\| \,\|U\| = \|x\| \,\|U\|.$$

Consideriamo ora la funzione g come definita su T e a valori in $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

La funzione g è a variazione limitata rispetto alla norma vettoriale.

Infatti, ponendo $H_\tau = K_\tau$ per $\tau \neq a$ e indicando con $H_a = H_{\tau_0}$ l'operatore nullo, si ha

$$\sum_i \|g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)\| = \sum_i \sup_{\|x\| \leq 1} |[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)](x)| =$$

$$= \sup_{\|x_i\| \leq 1} \sum_i |[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)](x_i)| = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \sum_i |U(H_{\tau_{i+1}} - H_{\tau_i}) x_i| \leq$$

$$\leq \sup_{\|x_i\| \leq 1} |U| \Big\{ \sum_i |(H_{\tau_{i+1}} - H_{\tau_i}) x_i| \Big\} \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |U|(f) = \|U\|.$$

In particolare,

$$n\text{–}\underset{T}{\operatorname{var}}\, g(\tau) \leq \|U\|. \tag{5}$$

Sia ora $f \in C(T, \mathfrak{X})$, sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e consideriamo la partizione

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$$

così che $\|f(t') - f(t'')\| \leq \varepsilon$ se $t', t' \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$.

(6) L. V. KANTOROVICI, *Sur les espaces semi-ordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des operations lineaires*, «C. R. Acad. Sci. de l'URSS», *4*, 11–14 (1935).

Se poniamo

$$s(t) = \begin{cases} f(\tau_0) & \text{se } a \leq t \leq \tau_1 \\ f(\tau_i) & \text{se } \tau_i < t \leq \tau_{i+1} \end{cases}$$

allora $s \in B(T, \mathfrak{X})$ e $\| f(t) - s(t) \| \leq \varepsilon$. Risulta $\| f - s \| \leq \varepsilon$ in $B(T, \mathfrak{X})$ e dunque

$$|U(f) - U(s)| = |U(f - s)| \leq \|f - s\| \,|\!|U|\!|\, \leq \varepsilon |\!|U|\!|. \tag{6}$$

D'altra parte

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} (H_{\tau_{i+1}} - H_{\tau_i})(f(\tau_i))$$

dalla quale si ricava

$$U(s) = \sum_{i=0}^{n-1} [g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)](f(\tau_i)). \tag{7}$$

Siccome ε è stato qualunque, dalle (6) e (7) risulta

$$U(f) = \int_T dg(t)(f(t)). \tag{8}$$

Dalle (4) e (5) si ha anche

$$|\!|U|\!| = n\text{–}\operatorname*{var}_T g(t). \tag{9}$$

Abbiamo dimostrato, dunque, il teorema seguente.

La forma generale degli operatori additivi e $(n\,o)$*–limitati su* $C(T, \mathfrak{X})$, *a valori in* $\mathfrak{Y}$, *e data da* (8) *dove g è una funzione su* T *a valori in* $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *a variazione limitata rispetto alla norma vettoriale.*

In generale, vale per g la disuguaglianza (4), *ma questa funzione g può essere scelta tale che si abbia precisamente* (9).

Osservazione. – È chiaro che ogni operatore additivo U, se è $(n\,o)$–limitato allora è anche $(n\,o)$–continuo, cioè: da $v_n \to \mathbf{0}$ rispetto alla norma, risulta $U(v_n) \to \mathbf{0}$ rispetto all'ordine di $\mathfrak{Y}$. La reciproca è ancora valevole, se $\mathfrak{Y}$ ha la proprietà: ogni insieme $E \subset \mathfrak{Y}$ tale che $\lambda_n y_n \to \mathbf{0}$ (rispetto all'ordine) qualunque siano $y_n \in E$ e $\lambda_n \to 0$, è un insieme limitato (rispetto all'ordine).

Il teorema precedente stabilisce per tali spazi la forma generale degli operatori additivi e $(n\,o)$–continui su $C(T, \mathfrak{X})$.

Analisi funzionale. — *Sur les applications linéaires majorées des espaces de fonctions continues.* Nota [*] di IVAN SINGER, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Soient Q un espace compact, E et F deux espaces de Banach réels et C (Q , F) l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur Q à valeurs dans F, avec la norme $\| y(.) \|_C = \max_{q \in Q} \| y(q) \|_F$; si F = R, la droite numérique munie de la norme habituelle, nous écrirons brièvement C (Q) au lieu de C (Q , R). On dit, d'après [2], qu'une application linéaire u de C (Q , F) dans E est *majorée*, s'il existe sur Q une mesure de Radon positive ν, appelée «*majorante*» de u, telle que

$$(1) \qquad \| uy(.) \| \leq \int_Q \| y(q) \|_F \, d\nu(q) \qquad \text{pour toute} \quad y(.) \in C(Q, F).$$

Dans ce cas il existe sur Q une plus petite mesure de Radon positive satisfaisant à (1), désignée par μ et appelée *plus petite majorante de u*.

Dans la présente Note nous nous proposons de montrer, par une voie directe, que les *applications* linéaires majorées de C (Q , F) dans E correspondent biunivoquement aux *formes* linéaires continues sur l'espace de toutes les fonctions continues sur Q et à valeurs dans un espace de Banach convenable; cette correspondance sera aussi isométrique (donc une équivalence au sens de [1]), si l'on prend comme «norme» d'une application linéaire majorée la norme de sa plus petite majorante. Il en résultera, du moins si E est un espace adjoint ou si F est un espace réflexif séparable, que les théorèmes de représentation intégrale des *applications linéaires majorées* de C (Q , F) dans E (voir [2] et [3]) sont des conséquences immédiates des théorèmes (données dans [4], proposition 32 et [6], théorème 1) de représentation intégrale des *formes* linéaires continues sur l'espace de toutes les fonctions continues sur Q et à valeurs dans un espace de Banach convenable [1]. Enfin, nous donnerons aussi quelques résultats concernant la compacité faible des applications linéaires majorées de C (Q , F) dans E.

2. Considérons d'abord le cas des applications linéaires majorées de l'espace C (Q , F) dans le dual E' de l'espace de Banach E.

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1959.

(1) D'autre part, naturellement, on pourrait aussi déduire les théorèmes de la présente Note à l'aide des théorèmes de représentation intégrale donnés dans [3] et [6]. Mais, justement en vue des applications aux théorèmes de représentation intégrale, il présente plus d'intérêt de montrer par une voie directe que les *applications* linéaires majorées sont essentiellement des *formes* linéaires continues; c'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

THÉORÈME 1. – *Pour qu'une application linéaire u de* C (Q , F) dans E′ *soit majorée, il faut et il suffit que la forme linéaire* U *sur* C (Q) ⊗ F ⊗ E *définie par*

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(.)\,y_i\otimes x_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i\,,u\,[\varphi_i(.)\,y_i]\rangle\,, \\ \varphi_i(.)\in \mathrm{C}(\mathrm{Q})\quad,\quad y_i\in \mathrm{F}\quad,\quad x_i\in \mathrm{E}\,,\qquad i=1\,,\cdots,n, \end{cases}$$

soit continue sur C (Q)⊗F⊗E *pour la norme induite par* C (Q , F$\hat{\otimes}$E) [2]. *Dans ce cas on a, pour la plus petite majorante* μ *de* u,

$$(3)\qquad \|\mu\|=\|\mathrm{U}\|.$$

Démonstration. – 1°) Soit u une application linéaire majorée de C (Q , F) dans E′ et soit ν une majorante de u. Alors, en vertu de (1), on peut prolonger par continuité u en une application linéaire continue $\tilde{u}$ de l'espace $\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}\,,\nu\,,\mathrm{F})$ des fonctions à valeurs dans F et absolument sommables pour ν, muni de la norme $\|z(.)\|_1=\int_{\mathrm{Q}}\|z(q)\|_{\mathrm{F}}\,d\nu(q)$, dans E′.

Il s'ensuit alors, à l'aide d'une méthode de [8], (voir [8], partie 2° de la démostration du théorème 1), que le prolongement $\tilde{\mathrm{U}}$ de U à $\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}\,,\nu)\otimes\mathrm{F}\otimes\mathrm{E}$, défini par

$$\tilde{\mathrm{U}}\left[\sum_{i=1}^{n}\psi_i(.)\,y_i\otimes x_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i\,,\tilde{u}\,[\psi_i(.)\,y_i]\rangle\,,$$

$$\psi_i(.)\in\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}\,,\nu)\quad,\quad y_i\in\mathrm{F}\quad,\quad x_i\in\mathrm{E}\,,\qquad i=1\,,\cdots,n,$$

peut être prolongé par continuité à $\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}\,,\nu\,,\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E})$ entier et qu'on aura, en désignant ce prolongement encore par $\tilde{\mathrm{U}}$,

$$|\tilde{\mathrm{U}}[\mathrm{Z}(.)]|\le\int_{\mathrm{Q}}\|\mathrm{Z}(q)\|_{\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E}}\,d\nu(q)\qquad\text{pour toute}\quad \mathrm{Z}(.)\in\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}\,,\nu\,,\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E}),$$

d'où, en particulier, pour tout $\varphi_i(.)\in\mathrm{C}(\mathrm{Q})\,,\ y_i\in\mathrm{F}\,,\ x_i\in\mathrm{E}\,,\ i=1\,,\cdots,n,$

$$\left|\mathrm{U}\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(.)\,y_i\otimes x_i\right]\right|\le\int_{\mathrm{Q}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(q)\,y_i\otimes x_i\right\|_{\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E}}d\nu(q)\le$$

$$\le\|\nu\|\max_{q\in\mathrm{Q}}\left\|\sum_{i=1}^{n}y_i(q)\otimes x_i\right\|_{\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E}}.$$

(2) C'est-à-dire, pour la norme

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(.)\,y_i\otimes x_i\right\|_{\mathrm{C}(\mathrm{Q},\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E})}=\max_{q\in\mathrm{Q}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(q)\,y_i\otimes x_i\right\|_{\mathrm{F}\hat{\otimes}\mathrm{E}}.$$

Comme C (Q , F$\hat{\otimes}$E) s'identifie à C (Q)$\check{\otimes}$(F$\hat{\otimes}$E), il est manifeste que C (Q)⊗F⊗E est dense dans C (Q , F$\hat{\otimes}$E).

Pour ce qui concerne les produits tensoriels normés, voir [4] et [5].

Cela prouve que U est continue sur $C(Q) \otimes F \otimes E$ pour la norme induite par $C(Q, F \hat{\otimes} E)$ et en outre, comme ν a été une majorante arbitraire de u, que

$$\|U\| \leq \|\mu\|. \tag{4}$$

2°) Soit u une application linéaire de $C(Q, F)$ dans E telle que la forme linéaire U définie par (1) soit continue sur $C(Q) \otimes F \otimes E$ pour la norme induite par $C(Q, F \hat{\otimes} E)$. Alors $\overline{U}$, le prolongement par continuité de U à $C(Q, F \hat{\otimes} E)$ entier, est majorée (3), donc il existe sur Q une mesure de Radon positive ν telle que l'on ait, pour tout $x \in E$, $\varphi_i(.) \in C(Q)$, $y_i \in F$, $i = 1, \cdots, n$,

$$\left| U \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(.) y_i \otimes x \right] \right| \leq \int_Q \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q) y_i \otimes x \right\|_{F \hat{\otimes} E} d\nu(q),$$

c'est-à-dire, compte tenu de (2) et du fait que $\wedge$ est une « norme raisonnable » au sens de [5],

$$\left| \left\langle x, u \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(.) y_i \right] \right\rangle \right| \leq \|x\| \int_Q \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q) y_i \right\|_F d\nu(q).$$

Il s'ensuit que

$$\left\| u \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(.) y_i \right] \right\| \leq \int_Q \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q) y_i \right\|_F d\nu(q) \quad , \quad \varphi_i(.) \in C(Q) \quad , \quad y_i \in F,$$
$$i = 1, \cdots, n,$$

d'où, enfin, compte tenu du fait que l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(.) y_i$ est dense dans $C(Q, F)$, de la continuité de u et du fait que ν est à variation bornée,

$$\|uy(.)\| \leq \int_Q \|y(q)\|_F d\nu(q) \qquad \text{pour toute} \quad y(.) \in C(Q, F),$$

c'est-à-dire l'application u est majorée par ν.

Il s'ensuit aussi que toute majorante de $\overline{U}$ est une majorante de u. Par conséquent, si μ est la plus petite majorante de u, et ω la plus petite majorante de $\overline{U}$, on a $\mu \leq \omega$, d'où

$$\|\mu\| \leq \|\omega\| = \|\overline{U}\| = \|U\|. \tag{5}$$

Une comparaison des inégalités (4) et (5) achève la démonstration.

REMARQUE 1. – Dans le cas des applications linéaires majorées de $C(Q, F)$ dans E', « l'espace de Banach convenable » dont on a parlé au No. 1 n'est autre que $F \hat{\otimes} E$, et l'équivalence entre applications linéaires majorées

(3) Rappelons (voir p. ex. [7]) que toute forme linéaire continue $\overline{U}$ sur $C(Q, F \hat{\otimes} E)$ est une application linéaire majorée de $C(Q, F \hat{\otimes} E)$ dans R, la droite numérique, et que la norme de U est égale à la norme de sa plus petite majorante.

et formes linéaires continues, annoncée au No. 1, n'est autre que la correspondance $u \longleftrightarrow \bar{\mathrm{U}}$. Pour vérifier l'affirmation du No. 1 concernant la représentation intégrale des applications linéaires majorées, on n'a qu'à tenir compte du fait bien connu que l'espace $(\mathrm{F} \hat{\otimes} \mathrm{E})'$ s'identifie à l'espace $\mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E}')$ de toutes les applications linéaires continues de F dans E′, muni de sa norme habituelle.

REMARQUE 2. – Comme les applications linéaires intégrales (v. [4], définition 7) de C (Q , F) dans E′ sont ([8], lemme 1) les applications u telles que la forme linéaire U sur $\mathrm{C}(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{E}$ définie par (2) soit continue pour la norme sur $\mathrm{C}(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{E}$ induite par $\mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F} \check{\otimes} \mathrm{E})$, le théorème 1 ci-dessus met en lumière la cause du théorème 1 de [8].

REMARQUE 3. – Comme $\mathrm{R} \hat{\otimes} \mathrm{E}$ s'identifie à E et comme les formes linéaires continues sur C (Q , E) s'identifient aux applications linéaires intégrales de C (Q) dans E′, on retrouve, dans le cas particulier où $\mathrm{F} = \mathrm{R}$, le théorème 1 de [7].

Remarque 4. On peut aussi énoncer le théorème 1 sous la forme suivante, évidemment équivalente:

THÉORÈME 1 *a*. *Pour qu'une application linéaire u de* C (Q , F) *dans* E′ *soit majorée, il faut et il suffit que la forme linéaire* U *sur* $\mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F}) \otimes \mathrm{E}$ *définie par*

$$(2a) \qquad \begin{cases} \mathrm{U}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i(.) \otimes x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i , u[y_i(.)] \rangle \\ y_i(.) \in \mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F}) \quad , \quad x_i \in \mathrm{E} \quad , \quad i = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

soit continue sur $\mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F}) \otimes \mathrm{E}$ *pour la norme induite par* $\mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F} \hat{\otimes} \mathrm{E})$. *Dans ce cas on on a*

$$(3a) \qquad \|\mu\| = \|\mathrm{U}\|.$$

3. Passons au cas applications linéaires majorées de l'espace C (Q , F) dans un espace de Banach quelconque E. En changeant dans la démonstration ci-dessus les rôles de E et E′, on obtient le

THEOREME 1′. – *Pour qu'une application linéaire u de* C (Q , F) *dans* E *soit majorée, il faut et il suffit que la forme linéaire* U *sur* $\mathrm{C}(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{E}'$ *définie par*

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{U}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(.)\, y_i \otimes x'_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \langle u[\varphi_i(.)\, y_i] , x'_i \rangle \\ \varphi_i(.) \in \mathrm{C}(\mathrm{Q}) \quad , \quad y_i \in \mathrm{F} \quad , \quad x'_i \in \mathrm{E}' , \quad i = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

soit continue sur $\mathrm{C}(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{F} \otimes \mathrm{E}'$ *pour la norme induite par* $\mathrm{C}(\mathrm{Q}, \mathrm{F} \hat{\otimes} \mathrm{E}')$. *Dans ce cas on a, pour la plus petite majorante* μ *de* u,

$$(7) \qquad \|\mu\| = \|\mathrm{U}\|.$$

Par conséquent, « l'espace de Banach convenable » du No. 1 est $F \hat{\otimes} E'$, et l'équivalence entre applications linéaires majorées et formes linéaires continues, annoncée au No. 1, est la correspondance $u \longleftrightarrow \overline{U}$, où $\overline{U}$ désigne le prolongement par continuité de la forme linéaire U, définie par (6), à $C(Q, F \hat{\otimes} E')$ entier.

Mais, tandis que les applications linéaires majorées de $C(Q, F)$ dans E se représentent ([3], théorème 2) à l'aide des mesures vectorielles à variation bornée à valeurs dans l'espace $L(F, E)$, les formes linéaires continues sur $C(Q, F \hat{\otimes} E')$ se représentent ([6], théorème 1) à l'aide des mesures vectorielles à variation bornée à valeurs dans (4) l'espace $(F \hat{\otimes} E')'$, qui s'identifie, comme on le sait, à l'espace $L(F, E'')$. Pour vérifier l'affirmation du No. 1 concernant la représentation intégrale des applications linéaires majorées, nous utiliserons un corollaire de la nécessité de la condition qui figure dans le

THÉORÈME 2. – *Pour qu'une application linéaire u de* $C(Q, F)$ *dans* E *soit majorée, il faut et il suffit qu'il existe sur* Q *une mesure de Radon positive* ν *telle que u puisse s'obtenir en composant l'application identique* I *de* $C(Q, F)$ *dans* $L^1(Q, \nu, F)$ *et une application linéaire continue v de* $L^1(Q, \nu, F)$ *dans* E:

$$C(Q, F) \xrightarrow{I} L^1(Q, \nu, F) \xrightarrow{v} E. \tag{8}$$

Dans ce cas $v = \tilde{u}$, *le prolongement de u par continuité en une application linéaire continue de* $L^1(Q, \nu, F)$ *dans* E.

Démonstration. – 1°) Si u est majorée, en vertu de (1) on peut prolonger par continuité u en une application linéaire continue $\tilde{u}$ de $L^1(Q, \nu, F)$ dans E. On aura alors évidemment $u = \tilde{u} \circ I$.

2°) S'il existe une mesure de Radon positive ν sur Q et une application linéaire continue v de $L^1(Q, \nu, F)$ dans E, telles que u se décompose en (8), alors

$$\| uy(.) \| = \| v \circ I y(.) \| \leq \| v \| \, \| I y(.) \| = \| v \| \int_Q \| y(q) \|_F \, d\nu(q)$$

pour toute $y(.) \in C(Q, F)$, donc u est majorée par $\nu' = \| v \| \nu$. En outre, on a $uy(.) = v \circ I y(.) = vy(.)$ pour toute $y(.) \in C(Q, F)$, donc v est un prolongement de u en une application linéaire de $L^1(Q, \nu, F)$ dans E; comme v est continue, il s'ensuit que $v = \tilde{u}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. – *Si* F *est reflexif et séparable, toute application linéaire majorée de* $C(Q, F)$ *dans* E *est faiblement compacte.*

(4) C'est d'ailleurs tout-à-fait normal, puisqu'à une forme linéaire continue U sur $C(Q, F \hat{\otimes} E')$ correspond, en général (par la formule (6) appliquée pour $x'_1 = \cdots = x'_n = x'$), une application linéaire u de $C(Q, F)$ dans E'' (et non dans E).

On constate donc le suivant: *tandis que l'espace de toutes les applications linéaires majorées u de* $C(Q, F)$ *dans* E', *muni de la norme* $||| u ||| = \| \mu \|$, *est équivalent à l'espace* $[C(Q, F \hat{\otimes} E)]'$ *entier, l'espace de toutes les applications linéaires majorées u de* $C(Q, F)$ *dans* E, *muni de la norme* $||| u ||| = \| \mu \|$, *n'est équivalent, en général, qu'à un sous-espace vectoriel fermé de* $[C(Q, F \hat{\otimes} E')]'$.

Démonstration. – En vertu de 1° ci-dessus, il suffit de montrer que l'application identique I de C (Q , F) dans L^1 (Q , ν , F) est faiblement compacte. Or, la boule unité de C (Q , F) est une partie de la boule unité de L^∞ (Q , ν , F) et, F étant réflexif et séparable, cette dernière est une partie faiblement compacte de L^1 (Q , ν , F), car elle este même compacte pour $\sigma(L^\infty(Q, \nu, F), L^1(Q, \nu, F'))$, puisque $L^\infty(Q, \nu, F)$ est le dual fort de $L^1(Q, \nu, F')$. Le corollaire est ainsi démontré [5].

Cela étant, pour obtenir la conclusion voulue concernant les théorèmes de représentation intégrale, on n'a qu'à remarquer [6] que les applications linéaires faiblement compactes de C (Q , F) dans E se représentent à l'aide des mesures vectorielles à valeurs dans L (F , E).

REMARQUE. – Si l'on n'impose aucune restriction sur l'espace F, la conclusion du corollaire ci-dessus n'est pas vraie. Voici, en effet, un exemple d'un couple d'espaces de Banach E , F tels qu'*il existe une application linéaire majorée, mais non faiblement compacte, de* C (Q , F) *dans* E:

Soient E et F tels qu'il existe une application linéaire continue et non faiblement compacte f de F dans E, et soit q_0 un point fixé de Q. L'application u de C (Q , F) dans E définie par

$$uy(.) = f[y(q_0)] \quad , \quad y(.) \in C(Q, F), \tag{9}$$

répond à la question. En effet, d'une part

$$\| uy(.) \| \leq \| f \| \, \| y(q_0) \|_F = \int_Q \| y(q) \|_F \, d\nu(q),$$

où $\nu = \| f \| \varepsilon_{q_0}$ = la masse $+ \| f \|$ dans le point q_0, donc u est majorée. D'autre part, si u était faiblement compact, l'ensemble

$$A = \{ uy(.) \mid \| y(.) \|_C \leq 1 \} = \{ f[y(q_0)] \mid \| y(.) \|_C \leq 1 \}$$

était relativement compact pour $\sigma(E, E')$, donc

$$B = \{ f[y(q_0)] \mid y(q) \equiv y \quad , \quad y \in F \quad , \quad \| y \|_F \leq 1 \} = \{ fy \mid \| y \|_F \leq 1 \} \subset A$$

était relativement compact pour $\sigma(E, E')$, c'est-à-dire f était une application faiblement compacte de F dans E, contrairement à notre hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie (1932).

[2] N. DINCULEANU, *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires*, «C. R. Acad. Sci.», Paris, t. 245, n. 15, pp. 1203–1205 (1957).

[3] N. DINCULEANU, *Mesures vectorielles et opérations linéaires*, «C. R. Acad. Sci.», Paris, t. 246, n. 16, pp. 2328–2331 (1958).

(5) Des exemples simples nous montrent que la réciproque de ce corollaire n'est pas vraie.

(6) Dans cette Note nous n'entrerons pas dans les détails de la démonstration, d'ailleurs simple, de cette remarque.

[4] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, «Memoirs of the Amer. Math. Soc.», t. 16, pp. 1–191, 1–140 (1955).

[5] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, « Boletim da Soc. Mat. Sao Paulo », t. 8, pp. 1–79 (1956).

[6] I. SINGER, *Les fonctionnelles linéaires sur l'espace des applications continues d'un espace de Hausdorff bicompact dans un espace de Banach* (en russe), « Revue de math. pures et appl. », t. 2, pp. 301–315 (1957).

[7] I. SINGER, *Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues*. I. (sous presse: « Revue de Math. pures et appl. », t. IV, nr. 3, 1959).

[8] I. SINGER, *Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues*. II. (sous presse).

Matematica. — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables.* Nota I [*] di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata dal Socio M. PICONE.

1. INTRODUCTION. – Comme nous l'avons prévu, le calcul opérationnel établi dans nos articles [5] et [6] [1] s'applique aux opérateurs différentiels linéaires d'ordre $n \leq 2$, à coefficients variables, sous des conditions très générales. Il est encore probable que ces résultats se généralisent à d'autres types d'opérateurs, inverses à gauche d'opérateurs de Volterra, en particulier à des opérateurs différentiels d'ordre plus élevé: on trouverait ainsi le développement naturel de la théorie de la composition de Volterra [8].

Un trait essentiel de ces recherches est la nécessité de considérer des extensions formelles de l'espace des fonctions (localement sommables), pour rendre inversibles les opérateurs en question. Dans le cas des opérateurs différentiels, il suffit que leurs coefficients ne soient pas indéfiniment dérivables (ce qui arrive couramment dans les applications), pour que les distributions ne soient plus utilisables: il faut alors envisager d'autres généralisations du concept de fonction. Nous avons convenu d'appeller *para–distributions associées à un opérateur donné* les nouvelles entités abstraites imposées par le calcul symbolique de cet opérateur. Pour ces extensions, notre méthode générale d'extension algébrique et topologique exposée dans [3] est naturellement indiquée, la méthode de dualité n'étant plus applicable (il existe des espaces de para–distributions qui sont isomorphes à des espaces de distributions, tout en étant *distincts* de ceux–ci). On pourrait aussi songer à utiliser ici les espaces de produits considérés par H. König dans ses théories de la multiplication [1]); mais ce n'est pas là l'outil adapté à notre étude.

D'autres formes de calcul opérationnel, que nous signalerons ici, exigent encore des extensions de l'espace de toutes les fonctions localement sommables sur la droite $\mathbf{R}$, ou même sur $\mathbf{R}^n$.

Parmi les applications possibles de ces calculs symboliques, nous pouvons citer le problème de Cauchy pour des équations à coefficients variables (par exemple, l'équation des ondes pour un milieu dont l'indice de réfraction varie suivant une direction), les problèmes mixtes pour les équations du type très général

$$\left[-\Lambda_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t)\right] u = f \qquad (\Lambda,\ \text{opérateur elliptique positif})$$

étudié par J. Lions, suivant la méthode, pas très facile, des opérateurs de Delsarte (cfr. [2]), etc. Cependant, nous n'avons pas pu examiner en détail

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1959.

(1) Les numéros entre crochets se rapportent à la Bibliographie qui suivra la deuxième partie de cette Note.

ces applications, dont la seconde exige encore l'extension de notre calcul opérationnel aux cas de fonctions vectorielles, d'après des recherches en cours au «Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa».

Dans un article prochain, nous nous occuperons d'autres formes de calcul opérationnel, concernant des opérateurs *à spectre non borné.*

2. Rappels sur le calcul opérationnel relatif à l'espace $\mathfrak{A}_\omega$. – Pour tout $k = 0, 1, 2, \cdots$ nous désignons par $\mathfrak{A}_k$ l'espace des fonctions complexes $\varphi(z)$ de la variable complexe telles que $\varphi(z)/z^k$ est continue et bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq k$ et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > k$. On peut évidemment considérer $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{A}_{k+1}$ pour tout k; la réunion de touts les $\mathfrak{A}_k$ est l'espace $\mathfrak{A}_\omega$ *des fonctions holomorphes à croissance lente dans des demi-plans droits*, que nous considérons muni d'une topologie convenable (cfr. [5] et [6]). Le calcul opérationnel relatif à l'espace $\mathfrak{A}_\omega$ est basé sur la formule

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{\varphi(\lambda)}{\boldsymbol{a}-\lambda} d\lambda, \tag{2.1}$$

où φ est un élément de $\mathfrak{A}_\omega$, α un nombre réel dépendant de φ et $\boldsymbol{a}$ un opérateur ou, plus en abstrait, un élément d'une algèbre complexe $\mathbf{A}$ munie d'élément unité $\mathbf{1}$ et d'une topologie d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ est séparément continu (pour simplifier nous posons $\lambda\mathbf{1} = \lambda$ pour tout scalaire λ). Dans la formule (2.1) l'intégrale aura le sens usuel si $z\,\varphi(z)$ est bornée sur la verticale $\operatorname{Re} z = \alpha$; autrement, il s'agit d'une intégrale généralisée, dont la valeur peut être calculée tout simplement de la façon suivante: soit k un entier tel que la fonction $\psi(z) = \varphi(z)/z^k$, multipliée par z, soit bornée sur $\operatorname{Re} z \geq \alpha$; alors on a *au sens usuel*:

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\pi i} \boldsymbol{a}^k \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{\psi(\lambda)}{\boldsymbol{a}-\lambda} d\lambda. \tag{2.2}$$

Pour que cette formule soit applicable, il faut et il suffit que: 1) *l'élément* $\boldsymbol{a} - \lambda$ *de* $\mathbf{A}$ *soit inversible pour tout nombre complexe* λ; 2) *la fonction* $(\boldsymbol{a} - \lambda)^{-1}$ *de* λ *soit bornée sur tout demi-plan gauche*. Dans ces conditions, la formule (2.1) définit un homomorphisme continu $\varphi \to \varphi(\boldsymbol{a})$ le l'algèbre $\mathfrak{A}_\omega$ dans l'algèbre $\mathbf{A}$, le seul qui fasse correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv z$ l'élément $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{A}$ et à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'élément unité de $\mathbf{A}$.

3. Les para-distributions associées aux opérateurs différentiels du 1er ordre. – Désignons par L_0 l'espace vectoriel des fonctions complexes $f(x)$ de la variable réelle x, localement sommables sur $\mathbf{R}$ et nulles pour $x < 0$, deux telles fonctions étant considérées identiques si elles coïncident presque partout. Soit d'autre part C_0^* le sous-espace de L_0 constitué par les fonctions absolument continues sur $\mathbf{R}$ et nulles pour $x < 0$. Si alors

$a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions localement sommables, $1/a(x)$ étant localement bornée, l'opérateur différentiel $\mathfrak{D}$ donné par l'expression

$$\mathfrak{D}[u(x)] \equiv a(x)\,\mathrm{D}\,u(x) + b(x)\,u(x) \tag{3.1}$$

où D est l'opérateur usuel de dérivation, définit une application linéaire biunivoque de C_0^* *sur* L_0. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, pour toute $f \in L_0$, l'équation différentielle en u

$$a(x)\,u' + b(x)\,u = f(x)$$

admet une (et une seule) solution dans C_0^*, donnée par

$$u(x) = \int_0^x e^{r(x)-r(\xi)} \frac{1}{a(\xi)} f(\xi)\,d\xi = \mathfrak{D}^{-1} f, \tag{3.2}$$

où

$$r(x) = -\int [b(x)/a(x)]\,dx\,.$$

Dans ces conditions, la méthode d'extension algébrique, que nous avons indiquée pour le cas le plus simple considéré dans [3], n°. 1, est immédiatement applicable ici. *Il est donc possible de construire une extension* $\tilde{L}_0$ *de l'espace vectoriel* L_0, *de façon que l'on puisse prolonger l'application* $\mathfrak{D}$ *de* C_0^* *sur* L_0, *en une application linéaire* $\tilde{\mathfrak{D}}$ *de* $\tilde{L}_0$ *sur* $\tilde{L}_0$ *ayant le même noyau que* $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire, telle que, si $\tilde{\mathfrak{D}}F = 0$, avec $F \in \tilde{L}_0$, alors $F = 0$ (puisque $\mathfrak{D}$ est une application *biunivoque*). D'ailleurs, cette extension $\tilde{L}_0$ sera unique, à un isomorphisme près, conservant $\tilde{\mathfrak{D}}$ et les éléments de L_0, s'il on impose à $\tilde{L}_0$ la condition supplémentaire suivante, que nous supposerons vérifiée: *tout élément* F *de* $\tilde{L}_0$ *est de la forme* $F = \mathfrak{D}^m f$, *où* $f \in L_0$ *et* m *est un entier* ≥ 0.

Les règles de calcul dans $\tilde{L}_0$ sont tout à fait simples. Dorénavant, nous désignerons $\tilde{\mathfrak{D}}$ simplement par $\mathfrak{D}$. Deux éléments $F = \mathfrak{D}^m f$, $G = \mathfrak{D}^n g$ de $\tilde{L}_0$, avec $f, g \in L_0$, peuvent toujours se mettre sous la forme d'*indice commun de dérivation*: $F = \mathfrak{D}^p \bar{f}$, $G = \mathfrak{D}^p \bar{g}$; en effet, si, par exemple, on avait $m > n$, il suffirait de prendre $p = m$, $\bar{f} = f$ et $\bar{g} = (\mathfrak{D}^{-1})^{m-n} g$, où $\mathfrak{D}^{-1}$ est l'opérateur inverse de $\mathfrak{D}$, défini dans L_0 par (3.2). Cela étant, le *critère de l'égalité* dans $\tilde{L}_0$ se réduit à la forme suivante:

On aura $\mathfrak{D}^m f = \mathfrak{D}^m g$, *si et seulement si* $f = g$.

D'autre part, la *somme* de $\mathfrak{D}^m f$ et $\mathfrak{D}^m g$ sera simplement

$$\mathfrak{D}^m f + \mathfrak{D}^m g = \mathfrak{D}^m (f + g)\,,$$

tandis que le *produit de* $\mathfrak{D}^m f$ *par un scalaire* α *et l'image de* $\mathfrak{D}^m f$ *par* $\mathfrak{D}$ sont donnés par

$$\alpha(\mathfrak{D}^m f) = \mathfrak{D}^m(\alpha f) \quad , \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^m f) = \mathfrak{D}^{m+1} f\,.$$

Les éléments $\mathfrak{D}^m f$ de cet espace $\tilde{L}_0$ seront appelés les *para-distributions* (*nulles à gauche de zéro*) *associées à l'opérateur* $\mathfrak{D}$. Évidemment, si $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$, on a $\mathfrak{D} = D$ et les para-distributions considérées deviennent les distributions (d'ordre fini) nulles à gauche de zéro.

4. Topologie de $\tilde{L}_0$ (2). – Pour définir une structure topologique dans $\tilde{L}_0$ d'après les méthodes indiquées dans [3], § 2, on doit considérer d'abord des espaces plus simples, liés à $\tilde{L}_0$.

Pour tout $k = 1, 2, \cdots$, soit $L_{0,k}$ l'espace des fonctions définies et sommables dans l'intervalle $[-\infty, k]$, nulles pour $x < 0$, avec la définition usuelle de norme:

$$\|f\| = \int_0^k |f(x)|\,dx .$$

On définit une extension $\tilde{L}_{0,k}$ de $L_{0,k}$ d'une façon analogue à celle de $\tilde{L}_0$ et on appelle *restriction* d'un élément $F = \mathfrak{D}^p f$ de $\tilde{L}_0$ à $[-\infty, k]$ l'élément $F^* = \mathfrak{D}^p f^*$ de $\tilde{L}_{0,k}$, où f^* est la restriction de la fonction f à cet intervalle, au sens usuel: on voit aussitôt que cette opération $F \to F^*$ est une application linéaire de $\tilde{L}_0$ sur $\tilde{L}_{0,k}$: nous la désignerons par ρ_k. D'autre part, si l'on désigne par $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$ l'ensemble des éléments de la forme $F = \mathfrak{D}^p f$, avec $f \in L_{0,k}$, il est évident que $\tilde{L}_{0,k}$ est la réunion des espaces $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$, pour $p = 0, 1, \cdots$

À l'espace $\tilde{L}_{0,k}$ nous donnerons, d'après le critère général considéré dans [3], th. 6, la plus fine topologie qui rende continu l'óperateur $\mathfrak{D}$, induisant dans $L_{0,k}$ une topologie moins fine que celle de cet espace. Alors $\tilde{L}_{0,k}$ sera la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$, images de $L_{0,k}$ par $\mathfrak{D}^p$, $p = 0, 1, \cdots$ On démontre aisément, comme dans le cas où $\mathfrak{D} = D$, que $\tilde{L}_{0,k}$ est un espace du type $(\mathcal{S}_2)$, ce qui fournit aussitôt plusieurs critères simples (3). Par exemple, *une suite* (F_n) *converge vers un élément* G *dans cet espace, si et seulement s'il existe un entier* p, *une suite* (f_n) *de fonctions et une fonction* g, *tels que:* $F_n = \mathfrak{D}^p f_n$, *pour tout* n, $G = \mathfrak{D}^p g$ *et* $f_n \to g$ *dans l'espace* $L_{0,k}$ (*convergence en moyenne dans l'intervalle* $[0, k]$).

Enfin, à l'espace $\tilde{L}_0$ on donne la topologie la moins fine qui rende continus les opérateurs ρ_k (topologie de la limite projective par rapport aux ρ_k). Cet espace n'est pas complet, mais son complété (analogue à celui des distributions *d'ordre quelconque* nulles à gauche de 0) n'est pas indispensable pour notre étude. Pour la suite, il suffira de retenir le critère suivant, que l'on déduit des propriétés générales des limites projectives d'espaces $(\mathcal{S}_2)$:

Pour qu'un ensemble $H \subset \tilde{L}_0$ *soit borné, il faut et il suffit que, pour tout entier* k, *il existe un entier* p *et un nombre* μ, *tels que la restriction de tout*

(2) Le lecteur moins familiarisé avec la théorie des espaces localement convexes peut se borner, dans une première lecture, au critère énoncé à la fin de ce numéro.

(3) Nous appelons maintenant espaces du type $(\mathcal{S}_2)$ les espaces que, dans [4], nous avons désignés par « espaces du type $(\mathfrak{L}\mathfrak{N}^*)$ », lesquels s'identifient aux duals forts des espaces de Schwartz métrisables complets.

élément F *de* H *à l'intervalle* $]-\infty, k]$ *soit de la forme* $\mathfrak{D}^p f$, *où* f *est une fonction sommable, nulle pour* $x<0$ *et telle que* $|f(x)|<\mu$ *pour tout* $x<k$.

5. Le calcul symbolique des opérateurs différentiels linéaires du Ier ordre. – Il s'agit maintenant d'appliquer la formule (2.1) au cas aù $\boldsymbol{a}$ est l'opérateur différentiel $\mathfrak{D}$ défini par (3.1), **A** étant l'agèbre $\mathfrak{L}(\tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_0)$ des applications linéaires continues de $\tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_0$ dans lui-même, munie de la topologie de la convergence simple ou de celle de la convergence bornée (les résultats sont équivalents). *Or l'opérateur* $\mathfrak{D}-\lambda$ *est inversible pour tout* $\lambda \in \mathbf{C}$. En effet, considérons, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $\mathrm{F} \in \tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_0$, l'équation differentielle en $\mathrm{U} \in \tilde{\tilde{\mathrm{L}}}_0$:

$$\mathfrak{D}\mathrm{U}-\lambda\mathrm{U}=\mathrm{F}. \tag{5.1}$$

Si l'on a $\mathrm{F}=\mathfrak{D}^p f$, $\mathrm{U}=\mathfrak{D}^p u$, avec $f, u \in \mathrm{L}_0$, cette équation est équivalente à $\mathfrak{D}u-\lambda u=f$ et on voit aussitôt que (5.1) admet la solution *unique*

$$\mathrm{U}=\frac{1}{\mathfrak{D}-\lambda}\mathrm{F}=\mathfrak{D}^p\int_0^x e^{r(x)-r(\xi)}\, e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]}\,\frac{1}{a(\xi)}\, f(\xi)\, d\xi$$

où

$$r(x)=-\int[b(x)/a(x)]\,dx \quad , \quad s(x)=\int[1/a(x)]\,dx .$$

En posant

$$\mathrm{R}(x,\xi;\lambda)=\begin{cases} e^{r(x)-r(\xi)}\, e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]}\,\dfrac{1}{a(\xi)}, & \text{pour } x\geq\xi, \\ 0, \quad \text{pour } x<\xi \end{cases} \tag{5.2}$$

noyau de l'opérateur $(\mathfrak{D}-\lambda)^{-1}$ de Volterra, ce résultat peut s'écrire encore:

$$(\mathfrak{D}-\lambda)^{-1}\,\mathrm{F}=\int_0^x \mathrm{R}(x,\xi;\lambda)\,d\xi=\int_0^{+\infty}\mathrm{R}(x,\xi;\lambda)\,\mathrm{F}(\xi)\,d\xi ,$$

en adoptant une généralisation convenable du concept d'intégrale. Il reste à prouver que *cette fonction* $(\mathfrak{D}-\lambda)^{-1}$ *de* λ *est bornée sur les demi-plans gauches.* Pour s'en convaincre il suffit d'observer que, pour tout $k=1, 2, \cdots$, la fonction a $e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]}$ de λ, à valeurs dans l'espace des fonctions de x, ξ, sommables dans le triangle $0\leq x\leq k$, $0\leq\xi\leq x$ (noyaux de Volterra), est bornée sur les demi-plans $\mathrm{Re}\,\lambda\leq\alpha$, *pourvu que* $s(x)$ *soit une fonction réelle non-négative de* x.

Donc, si cette condition est vérifiée (*en particulier si* $a(x)$ *est réelle positive*), *on peut appliquer la formule* (2.1) *au cas considéré.* En posant, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k$, $k=0, 1, \cdots$,

$$\varphi[\mathrm{R}](x,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-\infty i}^{k+\infty i}\mathrm{R}(x,\xi;\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \tag{5.3}$$

on aura donc, pour toute para–distribution $F \in \tilde{L}_0$:

$$\varphi(\mathfrak{D})\,F = \int_0^x \varphi[R](x,\xi)\,F(\xi)\,d\xi\,. \tag{5.4}$$

Si d'ailleurs on a $F = \mathfrak{D}^p f$, avec $f \in L_0$ et si l'on pose $\psi(z) = \varphi(z)/z^{k+1}$ on aura $\varphi[R](x,\xi) = \mathfrak{D}_x^{k+1}\,\psi[R](x,\xi)$ et la formule (5.4) peut s'écrire, *au sens usuel*,

$$\varphi(\mathfrak{D})\,F = \mathfrak{D}^{p+k+1} \int_0^x \psi[R](x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi\,. \tag{5.5}$$

Compte tenu de (5.3) et de l'expression (5.2) de $R(x,\xi;\lambda)$, si l'on désigne par Ψ l'image inverse de Laplace, $\mathfrak{L}^{-1}\psi$, de la fonction ψ, on peut donner à (5.5) la forme plus explicite

$$\varphi(\mathfrak{D})\,F = \mathfrak{D}_x^{p+k+1} \int_0^x e^{r(x)-r(\xi)}\,\Psi[s(x)-s(\xi)]\,\frac{1}{a(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi\,. \tag{5.6}$$

En particulier, pour $\varphi(z) \equiv 1$, en posant

$$\delta_{\mathfrak{D}}(x,\xi) = \mathfrak{D}_x \left\{ e^{r(x)-r(\xi)}\,H[s(x)-s(\xi)]\,\frac{1}{a(\xi)} \right\}$$

où H est la fonction de Heaviside, on trouve l'analogue de la formule de Dirac pour les para–distributions considérées:

$$F = \int_0^{+\infty} \delta_{\mathfrak{D}}(\hat{x},\xi)\,F(\xi)\,d\xi\,, \qquad \text{pour toute} \quad F \in \tilde{L}_0\,,$$

d'où l'on peut déduire l'expression générale des applications linéaires continues de $\tilde{L}_0$ dans un espace localement convexe semi–complet; en particulier on trouve ainsi le dual de $\tilde{L}_0$ et l'expression générale des opérateurs linéaires continus permutables avec $\mathfrak{D}$.

REMARQUE. – Si $b(x) = 0$, on a $\mathfrak{D} = a(x)\,D$, $r(x) = 0$ et la formule (5.6) se simplifie. D'ailleurs on a

$$a(x)\,D_x\,u[s(x)] \equiv D_x\,u(x)\,, \qquad \text{pour toute fonction } u \in C_0^*,$$

ce qui montre aussitôt que, dans ce cas, $\tilde{L}_0$ n'est que l'image de l'espace correspondant de distributions, par le changement de variable $x \to s(x)$. On voit ainsi que: 1) *un changement de variable, qui est en général défendu dans le cadre strict des distributions, devient permis avec le passage aux para–distributions*; 2) *l'espace vectoriel topologique* $\tilde{L}_0$ *est, dans ce cas, isomorphe à l'espace correspondant de distributions, tout en étant distinct.* Cela confirme ce que nous avons annoncé dans l'introduction.

Meccanica. — *Considerazioni energetiche in magneto–idrodinamica.* Nota [(*)] di GIOVANNI CARINI, presentata dal Corrisp. D. GRAFFI.

Nello schema del continuo, vari Autori si sono occupati di questioni energetiche nei fenomeni della magneto–idrodinamica, muovendo dal sistema di Euler–Maxwell, considerato da Alfvén [(1)] nel 1942. Ricordo i lavori di Walén [(2)], Baños [(3)], Nardini [(4)].

Rimanendo nello schema suddetto, in una recente Nota [(5)] ho stabilito l'equazione dell'energia per il sistema costituito dalle equazioni di Navier–Poisson e da quelle di Maxwell.

Ivi ho preannunziato la deduzione di detta equazione per i casi in cui i fenomeni magneto–idrodinamici si pensino retti dal sistema costituito dalle equazioni di Navier–Poisson e da quelle di Minkowski, approssimate ai termini di primo ordine in $\beta = \boldsymbol{v}/c$ (dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità della generica particella del mezzo, c è la velocità della luce nel vuoto).

Noto però che per il sistema di Euler–Minkowski, E. Richter [(6)] ha fatto di già delle considerazioni energetiche. Più precisamente, questi, dopo aver dedotto il teorema dell'energia seguendo il metodo usato per le equazioni di Maxwell, si è limitato a trattare il caso in cui le grandezze dipendono dal tempo e da una sola coordinata spaziale.

Il primo numero di questo lavoro è dedicato alla deduzione della equazione dell'energia nelle ipotesi suddette.

Si trova così che, accanto alla pressione p di natura idrodinamica, che si trasmette attraverso il contorno ω della generica porzione τ del mezzo in moto, interviene la pressione $-\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}$ di natura elettromagnetica, e la pressione $\frac{2\lambda}{c}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{S}$ di natura mista, essendo $\lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}$ ed $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$ (ε e μ sono rispettivamente la costante, dielettrica e la permeabilità magnetica, $\mathbf{E}$ è l'intensità elettrica del campo, $\mathbf{H}$ l'intensità magnetica).

Nel n. 2 si considera l'equazione dell'energia nei processi adiabatici che hanno luogo nei fluidi perfetti, di conducibilità infinita ($\sigma \to \infty$).

1. Il sistema di Navier–Minkowski [(7)] di cui si è parlato nella introduzione, è

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1959.
(1) H. ALFVÉN, « Ark. Mat. Astr. Fys. », *B. 29*, No. 2 (1942).
(2) H. WALÉN, « Ark. Mat. Astr. Fys. », *B. 30*, 31 (1943).
(3) JR. A. BAÑOS, « Phys. Rev. », 97, 1435–1443 (1955).
(4) R. NARDINI, « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XVIII (1955).
(5) G. CARINI, « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXV, 470–473 (1958).
(6) E. RICHTER, « Z. Naturforschg. », *11 a*, 901–912 (1956).
(7) G. CARINI, « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXI (1956).

$$
\text{(I)}\qquad
\left\{
\begin{array}{ll}
\dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\
\dot{\mathbf{D}} + 4\pi\mathfrak{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} & \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\
\rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \chi + \mathfrak{F} & \\
\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(II)}\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \lambda\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{H} \\
\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} - \lambda\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{E} \\
\mathfrak{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}\right)
\end{array}
\right.
\qquad
\left(\lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right)
$$

dove si è posto

$$
\chi = -\operatorname{grad} p + \frac{\mu_1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu_1 \Delta\boldsymbol{v},
$$

e dove il « punto » indica la derivata parziale rispetto a t, $\mathbf{D}$ lo spostamento elettrico, $\mathbf{B}$ l'induzione magnetica, $\mathfrak{J}$ la densità di corrente elettrica, σ la conducibilità, $\mathbf{F}$ la forza di natura meccanica agente sul fluido, $\mathfrak{F}$ la forza di natura elettromagnetica, μ_1 il coefficiente di viscosità del mezzo. Inoltre, essendo il mezzo in esame un liquido comprimibile o un gas, le (I) e (II) devono essere completate con l'equazione di stato e con l'equazione del calore [8], che è

$$
\rho \frac{dE_1}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\delta q}{\delta t}
$$

dove E_1 è l'energia interna riferita all'unità di massa, δq è il calore (per unità di massa) dovuto, nel tempuscolo δt, alla conduzione del calore, al flusso della corrente elettrica e alla viscosità.

Di solito il calore dovuto alla conduzione è preponderante, perciò si scrive (con approssimazione)

$$
\frac{\delta q}{\delta t} = \eta \Delta T_1
$$

dove η è il coefficiente di conducibilità termica del mezzo e T_1 la sua temperatura assoluta.

Nella teoria di Minkowski [9], la densità di forza ponderomotrice è espressa da

$$
\text{(1)}\qquad \mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}
$$

(8) T. G. COWLING, *Magneto-hydrodynamics*, London, Interscience Publishers LTD (1956).

(9) M. V. LAUE, *Die Relativitätstheorie*, Bd. I, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 5 Auflage (1952).

essendo $\boldsymbol{p}$ il tensore tridimensionale

$$p_{ik} = -\frac{1}{4\pi}(E_i D_k + H_i B_k) + \frac{\delta_{ik}}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}) \qquad \left(\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ 1 & \text{per } i = k \end{cases}\right) \tag{2}$$

e

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{D} \wedge \mathbf{B} \tag{3}$$

il vettore impulso elettromagnetico.

Se si tiene conto delle (2), (3) e della prima e terza delle (I), la $\mathfrak{F}$ può essere espressa in termini delle grandezze fondamentali elettromagnetiche. Si trova (supponendo nulla la densità di carica spaziale)

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c}\mathfrak{I} \wedge \mathbf{B} + \frac{1}{8\pi}[\mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) + \mathbf{D} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{D} + \tag{4}$$

$$+ \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot}(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}] = \frac{1}{c}\mathfrak{I} \wedge \mathbf{B} + \mathfrak{F}_1$$

essendo $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} - \frac{1}{c}\mathfrak{I} \wedge \mathbf{B}$.

Per dedurre l'equazione dell'energia, si moltiplichi la (I_1) per $\mathbf{H}$, la (I_3) per $\mathbf{E}$, si sommi membro a membro e si tenga conto della (II_3).

Si ottiene

$$\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E\dot{D}} + \mathbf{H\dot{B}}) + \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\mathfrak{I}^2}{\sigma} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{I} \wedge \mathbf{B} = 0. \tag{5}$$

Indicando con $w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$ la densità di energia elettromagnetica, si ha per le $(II_{2,3})$

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) - \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S};$$

$$\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E\dot{D}} + \mathbf{H\dot{B}}) = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\lambda}{c}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S})^{\cdot} + \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\lambda}{c}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S})^{\cdot} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}$$

dove [10] $\boldsymbol{k} = \frac{\lambda}{c}\dot{\mathbf{S}}$ ha le dimensioni di una densità di forza (di natura elettromagnetica), ed è stata di già considerata nella teoria fenomenologica dei corpi in moto.

Dopo ciò, se si tiene conto della (I_5), la (5) assume la forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\lambda}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S}) + \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\mathfrak{I}^2}{\sigma} + \rho \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} - \rho \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{k} - \mathfrak{F}_1) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{6}$$

(10) Il termine $-\frac{\lambda}{c}\dot{\boldsymbol{v}}\mathbf{S} = -\frac{\lambda}{c}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S})^{\cdot} + \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{v} \cdot \dot{\mathbf{S}}$ è stato considerato da R. Nardini nel corso di un esame energetico relativo a particolari onde idromagnetiche piane. (In corso di stampa nella rivista « Le Matematiche », vol. XIII, Catania).

Se dopo aver moltiplicato per dt, si integra la (6) nel campo di moto τ, delimitato dalla superficie ω, si ottiene

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{a} \cdot d\mathrm{P}\, d\tau + dt \int_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[w - \frac{\lambda}{c} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S}) \right] d\tau = \int_\tau \rho \mathbf{F} \cdot d\mathrm{P}\, d\tau + \int_\tau \chi \cdot d\mathrm{P}\, d\tau + \tag{7}$$

$$+ \int_\tau (\mathfrak{F}_1 - \boldsymbol{k}) \cdot d\mathrm{P}\, d\tau + dt \int_\omega \mathrm{S}_n\, d\omega - dt \int_\tau \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma}\, d\tau .$$

Usando la formula

$$\frac{d}{dt} \int_\tau f(\mathrm{P}, t)\, d\tau = \int_\tau \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) d\tau \tag{8}$$

che dà la derivata sostanziale di una grandezza (riportata a τ), si ha, essendo $\mathrm{T} = \frac{1}{2} \int_\tau \rho v^2\, d\tau$ la forza viva della porzione τ,

$$d\mathrm{T} = \int_\tau \rho \boldsymbol{a} \cdot d\mathrm{P}\, d\tau . \tag{9}$$

Inoltre, se si pone $\mathrm{W} = \int_\tau \left[w - \frac{\lambda}{c} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S}) \right] d\tau$, per la (8), possiamo scrivere:

$$\frac{d\mathrm{W}}{dt} = \int_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[w - \frac{\lambda}{c} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S}) \right] d\tau - \int_\omega \left(\frac{\varepsilon \mathrm{E}^2 + \mu \mathrm{H}^2}{8\pi} - \frac{2\lambda}{c} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S} \right) v_n\, d\omega$$

da cui segue

$$dt \int_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[w - \frac{\lambda}{c} (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S}) \right] d\tau = d\mathrm{W} + \int_\omega \left(\frac{\varepsilon \mathrm{E}^2 + \mu \mathrm{H}^2}{8\pi} - \frac{2\lambda}{c} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{S} \right) v_n\, d\omega . \tag{10}$$

Il primo termine del secondo membro della (7) è il lavoro elementare delle forze di massa

$$d\mathfrak{L}^{(m)} = \int_\tau \rho \mathbf{F} \cdot d\mathrm{P}\, d\tau , \tag{11}$$

mentre il termine

$$d\mathfrak{L}^* = \int_\tau (\mathfrak{F}_1 - \boldsymbol{k}) \cdot d\mathrm{P}\, d\tau \tag{12}$$

rappresenta il lavoro elementare delle forze elettromagnetiche distribuite nel volume τ.

Infine ricordo [5] che

$$(13)\qquad \int_\tau \chi\cdot d\mathrm{P}\,d\tau = d\mathfrak{L}^{(i)} + dt\int_\omega \left[\left(p+\frac{2}{3}\,\mu_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)v_n + \mu_1\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\partial v^2}{\partial n}\right)\right]d\omega$$

dove

$$d\mathfrak{L}^{(i)} = dt\int_\tau \left\{ p\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \mu_1\left[(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})^2 + \frac{4}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\right] - 2\,\mu_1\operatorname{div}\left[(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right]\right\} d\tau .$$

Se si indica con $dQ = dt\int_\tau \frac{\mathfrak{J}^2}{\sigma}\,d\tau$ l'energia elettromagnetica che si trasforma in calore Joule, la (7), (che esprime il teorema dell'energia), per le (9), (10), (11), (12) (13), si può porre nella seguente forma

$$(14)\qquad d(\mathrm{T}+\mathrm{W}) = d\mathfrak{L}^{(m)} + d\mathfrak{L}^{(i)} + d\mathfrak{L}^{*} +$$

$$+\,dt\int_\omega \left[\mathrm{S}_n + \left(p + \frac{2\lambda}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{S} - \frac{\varepsilon\mathrm{E}^2+\mu\mathrm{H}^2}{8\pi} + \frac{2}{3}\,\mu_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)v_n + \mu_1\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\partial v^2}{\partial n}\right)\right]d\omega - dQ$$

Da essa si deduce che, accanto alla pressione p di natura idrodinamica, che si trasmette attraverso ω, interviene la pressione $-\frac{\varepsilon\mathrm{E}^2+\mu\mathrm{H}^2}{8\pi}$ di natura elettromagnetica e la pressione $\frac{2\lambda}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{S}$ di natura idroelettromagnetica.

2. – Consideriamo ora i casi in cui il mezzo sia costituito da un fluido perfetto e sia immerso in un campo magnetico impresso tale che, in virtù della (II_2) si possa ritenere $\mathbf{B}\cong\mu\mathbf{H}$ e si possa trascurare $\mathfrak{F}_1$ rispetto a $\frac{1}{c}\,\mathfrak{J}\wedge\mathbf{B}$.

Poiché in tal caso è $\mu_1 = 0$, si ha

$$d\mathfrak{L}^{(i)} = dt\int_\tau p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\tau = \int_\tau \rho\,p\,d\,\frac{1}{\rho}\,d\tau .$$

Inoltre se ci limitiamo a trattare i processi adiabatici che hanno luogo nei suddetti fluidi perfetti, con conducibilità infinita ($\sigma\to\infty$), essendo p funzione di ρ, introduciamo le funzioni E_1 ed U tali che

$$d\mathrm{E}_1 = -\,p\,d\,\frac{1}{\rho}\quad ,\quad \mathrm{E}_1 = -\int_{\rho_0}^{\rho} p\,d\,\frac{1}{\rho}\,;$$

$$\mathrm{U} = \int_\tau \rho\,\mathrm{E}_1\,d\tau .$$

Con l'applicazione della (8) e dell'equazione di continuità, si ottiene

$$dU = \int_\tau \rho\, dE_1\, d\tau = -\int_\tau \rho\, p d \frac{1}{\rho}\, d\tau = -d\mathfrak{L}^{(i)}.$$

Dunque U è l'energia interna della porzione τ, E_1 l'energia interna dell'unità di massa.

Dopo ciò la (14) diventa

$$(15)\qquad d(T+W+U) = d\mathfrak{L}^{(m)} + dt \int_\omega \left(p + \frac{2\lambda}{c}\, \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{S} - \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}\right) v_n\, d\omega +$$

$$+ dt \int_\omega S_n\, d\omega - \int_\tau \boldsymbol{k}\cdot dP\, d\tau.$$

Indicando con

$$d\mathfrak{L}^{(e)} = d\mathfrak{L}^{(m)} + dt \int_\omega \left(p + \frac{2\lambda}{c}\, \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{S} - \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}\right) v_n\, d\omega$$

il lavoro delle forze meccaniche agenti sul volume τ e delle pressioni esercitate attraverso ω e con $d\mathcal{E} = dt \int_\omega S_n\, d\omega$ l'energia elettromagnetica che entra in τ attraverso ω nel tempuscolo dt, la (15) assume la forma

$$(16)\qquad d(T+W+U) = d\mathfrak{L}^{(e)} + d\mathcal{E} - \int_\tau \boldsymbol{k}\cdot dP\, d\tau$$

ed esprime il teorema dell'energia nel caso in cui si considera il moto della porzione τ dal punto di vista langrangiano.

Fisica matematica. — *Moto di un fotone libero in un campo gravitazionale.* Nota [(*)] di CARLO CATTANEO, presentata dal Socio A. SIGNORINI.

1. PRELIMINARI. - Sia V_4 la varietà spazio-tempo, x il suo generico punto, $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ $(i\,,k = 1\,,2\,,3\,,4)$ la metrica d'universo, di segnatura $+++-$. Pensiamo adottato in V_4 un arbitrario sistema di coordinate fisicamente ammissibili (linee $x^4 = var.$ del genere tempo e orientate nel futuro; ipersuperficie $x^4 = cost.$ del genere spazio); ciò implica notoriamente (cfr. [2], p. 235)

$$g_{44} < 0 \quad , \quad g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta > 0 \qquad (\alpha\,,\beta = 1\,,2\,,3) \tag{1}$$

(per dx^α arbitrari non simultaneamente nulli).

La congruenza delle linee $x^4 = var.$, interpretabili come linee orarie virtuali di altrettante *particelle di riferimento*, costituisce il *riferimento fisico* S associato al sistema di coordinate prescelto ([2] p. 234). Ogni cambiamento di coordinate del tipo

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1\,,x^2\,,x^3) \quad , \quad x^{4'} = x^{4'}(x^1\,,x^2\,,x^3\,,x^4)\,, \tag{2}$$

come il più generale che non muti le linee $x^4 = var.$, e quindi il riferimento fisico S, verrà detto un cambiamento di coordinate *interno* ad S. Esso può decomporsi nel prodotto di una trasformazione *puramente spaziale*

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1\,,x^2\,,x^3) \quad , \quad x^{4'} = x^4\,, \tag{3}$$

che non fa che cambiare il nome delle singole particelle di riferimento, per una trasformazione *temporale*

$$x^{\alpha'} = x^\alpha \quad , \quad x^{4'} = x^{4'}(x^1\,,x^2\,,x^3\,,x^4) \tag{4}$$

che corrisponde ad un generico cambiamento dell'orologio coordinato legato ad ogni particella di riferimento.

Nel generico punto x di V_4 sia $\gamma(x)$ il vettore unitario tangente alla linea $x^4 = var.$ e concordemente orientato, le cui componenti valgono

$$\begin{cases} \gamma^\alpha = 0 \quad , \quad \gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} & (\alpha = 1\,,2\,,3) \\ \gamma_i = g_{i4}/\sqrt{-g_{44}} & (i = 1\,,2\,,3\,,4)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Il riferimento fisico S individua univocamente il campo vettoriale $\gamma(x)$ e viceversa.

Ciò premesso, rammentiamo le seguenti definizioni relative a un generico riferimento fisico S (cfr. [5], p. 322 e pp. 330-333).

Vettore metrico temporale standard: è il vettore unitario γ precedentemente introdotto.

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1956.

Intervallo di tempo relativo standard tra due eventi infinitamente prossimi x^i, $x^i + dx^i$:

$$dT = -\frac{1}{c}\gamma_i \, dx^i . \tag{6}$$

Tensore metrico spaziale standard:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + \gamma_i \gamma_j \qquad (\gamma_{i4} = 0) \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) . \tag{7}$$

Distanza spaziale relativa standard tra i due eventi suddetti:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} \, dx^i \, dx^j = \gamma_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, 3, 4 \\ \alpha, \beta = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(forma definita positiva).

Rammentiamo anche le seguenti definizioni che, più specificamente, concernono una particella materiale di prova di massa propria m_0.

GRANDEZZE ASSOLUTE.

Quadrivettore energia–quantità di moto:

$$P^i = m_0 \frac{dx^i}{d\tau} \tag{9}$$

$d\tau$ essendo l'intervallo elementare di tempo proprio, $d\tau^2 = -ds^2/c^2$.

Energia propria (o *assoluta*):

$$E_0 = -\frac{1}{m_0} P_i \, P^i = m_0 \, c^2 . \tag{10}$$

GRANDEZZE RELATIVE STANDARD.

Trivettore velocità:

$$v^\alpha = dx^\alpha / dT \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{11}$$

la cui grandezza è data da

$$v^2 = \gamma_{\alpha\beta} \, v^\alpha \, v^\beta = d\sigma^2 / dT^2 . \tag{12}$$

Energia materiale (cfr. [6], p. 735):

$$E = -c\gamma_i \, P^i \equiv c \, P_4 / \gamma_4 . \tag{13}$$

Massa:

$$m = E/c^2 \equiv m_0 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)} . \tag{14}$$

Trivettore quantità di moto:

$$p^\alpha = P^\alpha \equiv m v^\alpha . \tag{15}$$

Tutte le grandezze relative ora ricordate hanno carattere invariantivo di fronte ad ogni cambiamento (2).

Nel caso che il riferimento adottato sia stazionario (g_{ik} indipendenti da x^4) suole anche definirsi, per una particella di prova, una *energia relativa totale* (cfr. [2], p. 294)

$$H = -c\,P_4 \tag{16}$$

che risulta costante durante il moto libero e alla quale può darsi, in virtù della precedente definizione (13), l'aspetto notevole (cfr. [6], p. 735, form. (8))

$$H = -E\,\gamma_4 \,. \tag{17}$$

Conviene osservare che questa grandezza non è, come lo sono invece tutte le grandezze relative precedenti, tra cui E, invariante di fronte ad ogni cambiamento interno di coordinate. Essa è invariante soltanto di fronte a cambiamenti di coordinate di tipo (3).

2. GRANDEZZE CARATTERISTICHE, ASSOLUTE E RELATIVE, DI UN FOTONE. – Vediamo ora di estendere le precedenti definizioni al caso di un fotone.

Conformemente a una consuetudine ormai codificata in relatività ristretta, tratteremo il fotone come una particella di massa propria nulla. Ciò equivale, accettata la (10), a postulare per esso un 4–vettore energia–quantità di moto P^i di norma zero. In conformità porremo, continuando ad ammettere la tangenza di P^i alla traiettoria spazio–temporale l del fotone:

$$P^i = K\,dx^i \tag{18}$$

col vincolo

$$g_{ik}\,dx^i\,dx^k = 0 \,, \tag{19}$$

proprio delle linee di lunghezza nulla.

Prima di completare la definizione del 4–vettore P^i, precisando lo scalare ancora indeterminato K, osserviamo che per due punti infinitamente vicini della linea l la (6) fornisce un intervallo dT di tempo relativo standard certamente non nullo. Introdotto tale intervallo, il divario spazio–temporale ds^2 tra i suddetti due eventi di l può esprimersi (cfr. [5], p. 331, form. (68)).

$$ds^2 = d\sigma^2 - c^2\,dT^2 \tag{20}$$

e il suo annullarsi indica come la misura standard $d\sigma/dT$ della velocità del fotone sia sempre uguale a c (cfr. [6], nota a piè della p. 735). Se ne può argomentare che l'adozione delle misure standard, spaziali e temporali, elimina ogni influenza diretta del campo gravitazionale sulla velocità della luce (in regioni vuote di materia), eliminando in particolare ogni anisotropia ottica dello spazio fisico attribuibile al campo gravitazionale. In parole un poco diverse può dirsi che l'adozione delle grandezze relative standard equivale

a considerare la velocità della luce nel vuoto come il campione universale – invariabile per definizione – cui rapportare ogni altra velocità. È proprio, in sostanza, ciò che si fa in relatività ristretta.

Ciò premesso, completeremo ora la definizione del 4–vettore P^i tenendo conto di quel carattere fondamentale della radiazione luminosa che è la frequenza ν, legata alla lunghezza d'onda λ dalla relazione

$$\lambda\nu = c\,. \tag{21}$$

Il parametro λ, come ν, ha significato eminentemente relativo; dipende cioè, punto per punto di l, dalla determinazione locale di γ. Dovendosi intendere che la lunghezza λ sia misurata parallelamente al raggio luminoso, appare naturale ammettere, stante il carattere localmente minkowskiano della varietà V_4, che al mutare locale di γ, essa subisca una variazione lorentziana (cioè la medesima che si avrebbe in relatività ristretta nel passaggio da un riferimento galileiano a un altro).

In pari tempo notiamo che anche dT, come misura relativa di un fenomeno legato al fotone, subirà, al mutare locale di γ, la variazione lorentziana che compete ai tempi. Ora se pur non ha significato confrontare la misura di λ, o quella di dT, con le corrispondenti misure fatte da un osservatore solidale col fotone (misure che diverrebbero rispettivamente nulla e infinita), ha però senso il confronto di dette misure in due riferimenti locali diversi. Ed è facile riconoscere, con spontaneo procedimento di limite, che il prodotto $\lambda\, dT$ si comporta, al variare locale di γ, come un invariante

$$\lambda\, dT = invar. \tag{22}$$

(per un analogo passaggio al limite cfr. [4], p. 276).

Tutto ciò rende accettabile per P^i la seguente definizione completa

$$P^i = \frac{h}{c\lambda}\frac{dx^i}{dT} = \frac{h\nu}{c}\frac{dx^i}{dT}\,, \tag{23}$$

h indicando la costante di Planck, e i differenziali dx^i essendo naturalmente valutati lungo la traiettoria spazio–temporale l.

Dall'espressione di P^i si ottiene in modo naturale, sulla falsariga delle definizioni del n. 1, la definizione delle varie grandezze relative standard del fotone.

Energia luminosa relativa standard:

$$E = -c\gamma_i\, P^i \equiv cP_4/\gamma_4 \equiv h\nu\,. \tag{24}$$

Massa relativa standard:

$$m = E/c^2 \equiv h\nu/c^2\,. \tag{25}$$

Quantità di moto relativa standard:

$$p^\alpha = P^\alpha \equiv \frac{h\nu}{c^2}\, v^\alpha \equiv mv^\alpha\,. \tag{26}$$

La formale coincidenza di tutte queste espressioni con le corrispondenti valide in relatività ristretta (cfr. per esempio [1], p. 157 e [4], p. 173) sembrano giustificare completamente la definizione (23).

Anche per un fotone si aggiunge, nel caso di un riferimento stazionario, la definizione di *energia relativa totale*, data ancora dalla (16), cui si possono facilmente riconoscere le seguenti espressioni

$$\text{(27)} \qquad H = -c P_4 = -E\gamma_4 = h\nu \sqrt{-g_{44}} \,.$$

3. Evoluzione del fotone nel campo gravitazionale. – Stabilita l'espressione del 4–vettore P^i, appare naturale assumere come legge di moto del fotone la medesima che vale per una particella materiale di prova:

$$\text{(28)} \qquad DP_i = 0$$

ove D indica la differenziazione assoluta lungo la traiettoria spazio–temporale l.

La legge (28), associata alla condizione (19), assegna come traiettoria cronotopica al fotone una geodetica di lunghezza nulla, confermando, anche per ciò che concerne la forma dei raggi luminosi, i risultati che conseguono dalle equazioni gravitazionali in uno schema continuo « campo elettromagnetico puro » (cfr. [3], p. 54).

Ma le (28) danno qualcosa di più. Infatti la quarta delle (28), che sviluppata può scriversi

$$\text{(29)} \qquad dP_4 - \frac{1}{2} \partial_4 g_{hk} P^h dx^k = 0 \,,$$

nel caso di un riferimento stazionario fornisce l'integrale primo

$$\text{(30)} \qquad H \equiv -c P_4 = \mathit{cost.}$$

che esprime la conservazione dell'energia totale del fotone. Se si rammenta l'ultima espressione (27) di H si riconosce che lungo la traiettoria luminosa il fotone modifica la sua frequenza al mutare del potenziale gravitazionale g_{44}. Considerati i valori di ν e di g_{44} in corrispondenza a due diversi punti, 1 e 2, di l, si ha

$$\text{(31)} \qquad \frac{\nu(1)}{\nu(2)} = \sqrt{\frac{g_{44}(2)}{g_{44}(1)}} \,;$$

che è la ben nota formula esatta dello spostamento delle righe spettrali dovuto al campo gravitazionale (cfr. [2], p. 347).

Si vede così come questo effetto, che notoriamente viene assunto come una delle prove cruciali della relatività generale, possa in sostanza interpretarsi cone un principio di conservazione dell'energia totale dei fotoni.

Quanto precede mostra che anche lo schema corpuscolare si presta assai bene a mettere in luce l'influenza del campo gravitazionale sulla radiazione luminosa.

BIBLIOGRAFIA.

[1] O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris (1949).
[2] C. MØLLER, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1952).
[3] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris (1955).
[4] J. L. SYNGE, *Relativity: The special Theory*, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1956).
[5] C. CATTANEO, « Il nuovo Cimento », *10*, 318–337 (1958).
[6] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », *11*, 733–735 (1959).

Petrografia. — *La distribuzione del sodio e del potassio nelle rocce del massiccio del Gran Paradiso* (*). Nota I di EZIO CALLEGARI e ALESSANDRO MONESE, presentata (**) dal Socio A. BIANCHI.

Scopo essenziale del presente lavoro (1), a noi affidato dai proff. A. Bianchi e Gb. Dal Piaz, è quello di determinare la distribuzione degli alcali nelle rocce del massiccio del Gran Paradiso, con particolare riguardo alle facies sialiche prevalenti, per l'interesse specifico derivante dalla necessità di un controllo sperimentale delle affermazioni contenute nella Memoria geologico–petrografica di R. Michel sugli Scisti Cristallini del Gran Paradiso e Sesia–Lanzo (2). Il predetto Autore, sulla base di poche analisi chimiche, sostiene che nella serie delle « embrechiti » del Gran Paradiso il contenuto di Na_2O va progressivamente aumentando man mano che ci si sposta dalle parti interne a quelle periferiche del Massiccio.

Già una recente Nota di C. Viterbo (3) su alcune facies tipiche del Gran Paradiso ha messo in evidenza sostanziali diversità di composizione chimica rispetto ai dati forniti da R. Michel.

Era però necessario sviluppare ulteriormente le indagini chimiche sul contenuto di sodio e di potassio: solo disponendo di un gran numero di dati analitici si possono trarre infatti deduzioni di carattere generale circa la distribuzione degli alcali nell'intero massiccio, in modo da fornire larga documentazione sperimentale alle considerazioni critiche di A. Bianchi e Gb. Dal Piaz (4).

Tutte le determinazioni sono state eseguite nell'Istituto di Mineralogia dell'Università, applicando il metodo fotometrico di fiamma con l'impiego di un fotometro « EEL ». Le analisi sono sempre state eseguite in doppio allo scopo di evitare errori casuali. Il buon funzionamento dell'apparecchiatura usata è sempre stato rigorosamente controllato prima di ogni serie di misure, determinando il contenuto di Na_2O e di K_2O del campione n. 99 (soda feldspar) del National Bureau of Standards, munito di certificato di analisi. L'errore massimo osservato tanto nella determinazione del sodio quanto in quella del potassio è di $\pm$ 0,05 ‰ assoluto.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 1° giugno 1959.

(1) Il presente lavoro fa parte di un ciclo di ricerche sul Cristallino antico delle Alpi promosso dalla Divisione Geo–Mineraria del Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari e condotte sotto la direzione dei proff. A. Bianchi e Gb. Dal Piaz.

(2) R. MICHEL, *Les Schistes Cristallins des Massifs du Grand Paradis et de Sesia–Lanzo (Alpes Franco–Italiennes)*, « Sciences de la Terre », vol. I, N.ri 3–4, Nancy 1953, con una cartina geologica alla scala 1:100.000.

(3) C. VITERBO, *La composizione chimico–petrografica di alcune rocce tipiche del Gran Paradiso*, « Rend. Soc. Miner. Ital. », vol. XV, 1959.

(4) A. BIANCHI e GB. DAL PIAZ, *La Memoria Geologico–Petrografica di R. Michel sul Massiccio del Gran Paradiso e regioni limitrofe. Considerazioni critiche*, « Rend. Soc. Miner. Ital. », vol. XV, 1959.

RISULTATI SPERIMENTALI.

A. – *Graniti gneissici a tessitura massiccia* («graniti di anatessi» e «graniti porfiroidi» sec. R. Michel).

1) Granito di Scalari (Valle dell'Orco, versante sinistro).
Sez. G. P. 19, 37

Na_2O 2,95 % ; K_2O 4,88 %.

2) Granito di Scalari (Valle dell'Orco, versante sinistro).
Sez. G. P. 37 bis

Na_2O 3,10 % ; K_2O 5,66 %.

3) Granito di Piantelessio (Valle del Piantonetto, versante sinistro; mezzo chilometro a valle della diga).
Sez. G. P. 1, 54

Na_2O 2,60 % ; K_2O 5,02 %.

4) Granito di Piantelessio; sotto la soglia dell'Alpe Trucco (Valle del Piantonetto, versante destro; 2 Km a valle della diga).
Sez. G. P. 39

Na_2O 2,71 % ; K_2O 4,74 %.

5) Granito del Lazinetto (confluenza Rio Lazin in Val Forzo).
Sez. G. P. 90

Na_2O 2,95 % ; K_2O 4,75 %.

6) Granito del Lazinetto (Val del Forzo di fronte alla confluenza del Lazin).
Sez. G. P. 91

Na_2O 3,35 % ; K_2O 4,45 %.

7) Granito di Migliere (sulla sinistra della Stura di Valle Grande).
Sez. G. P. 93

Na_2O 2,95 % ; K_2O 4,07 %.

B. – *Gneiss granitici, ghiandoni e occhiadini a grana grossa, con porfiroblasti feldispatici più o meno vistosi* («embrechiti occhiolate» sec. R. Michel).

8) Gneiss ghiandolare; fra Fornolosa e Rosone (Valle dell'Orco, versante sinistro).
Sez. G. P. 49, 50

Na_2O 3,00 % ; K_2O 5,36 %.

9) Gneiss occhiadino a grana grossa; fra Noasca e Scalari (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 10, 17

Na_2O 3,21 % ; K_2O 4,63 %.

10) Gneiss occhiadino a grana grossa del lago di Ceresole; cava della diga, alla soglia del lago (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 15, 16

Na_2O 3,42 % ; K_2O 4,50 %.

11) Gneiss occhiadino a grana grossa; colle del Nivolet (versante Ceresole).

Sez. G. P. 21

Na_2O 3,50 % ; K_2O 4,72 %.

12) Gneiss occhiadino a grana grossa di Migliere (Sulla sinistra della Stura di Valle Grande).

Sez. G. P. 94

Na_2O 3,28 % ; K_2O 5,59 %.

13) Gneiss ghiandone di Forno Alpi Graie (Valle Stura, strada del Santuario).

Sez. G. P. 7

Na_2O 4,15 % ; K_2O 4,75 %.

14) Gneiss ghiandone di Valnontey, sopra l'intercalazione di Trias (Valnontey, versante sinistro).

Sez. G. P. 110

Na_2O 3,69 % ; K_2O 4,98 %.

15) Gneiss ghiandone di Cheleret, poco a Nord del paese (Valle Valeille, versante sinistro).

Sez. G. P. 102

Na_2O 3,27 % ; K_2O 5,46 %.

16) Gneiss occhiadino a grana medio-grossa di Arcando (sulla sinistra della Val del Forzo).

Sez. G. P. 92

Na_2O 3,59 % ; K_2O 5,03 %.

C. – *Gneiss occhiadini e fettucciati a grana media e gneiss microocchiadini* (« embrechiti » sec. R. Michel).

17) Gneiss microocchiadino a grana media del Grand Sertze (Gruppo Herbetet, parete sovrastante il ghiacciaio Timorion).

Sez. 16 III

Na_2O 2,89 % ; K_2O 4,95 %.

18) Gneiss occhiadino fettucciato a grana media di Valnontey (300 m a monte del torrente Lauzon, versante sinistro).

Sez. G. P. 112

Na_2O 3,63 % ; K_2O 4,84 %.

19) Gneiss occhiadino a grana media di Alpe Valeille, nel canalone poco a monte dell'Alpe (Valle Valeille, versante destro).

Sez. G. P. 108

Na_2O 3,63 % ; K_2O 4,49 %.

20) Gneiss fettucciato a grana media, con tendenza occhiadina di Case Maisonasse (Valsavaranche, versante sinistro).

Sez. G. P. 116

Na_2O 3,30 % ; K_2O 4,95 %.

21) Gneiss occhiadino a grana media di Scalari (Valle dell'Orco, versante destro, a monte della confluenza di Val Roc).

Sez. G. P. 51

Na_2O 3,56 % ; K_2O 4,79 %.

22) Gneiss minuto microghiandolare di Fornetti (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 44

Na_2O 3,30 % ; K_2O 5,06 %.

23) Gneiss minuto chiaro; sopra il Lago Agnel (Colle del Nivolet).

Sez. G. P. 31

Na_2O 3,30 % ; K_2O 4,89 %.

24) Gneiss microocchiadino ondulato a tendenza migmatitica; Gruppo Herbetet (versante destro dell'alta Valle Levionna, sotto i calcari del Trias).

Sez. 17 I

Na_2O 3,30 % ; K_2O 4.47 %.

25) Gneiss minuto chiaro, muscovitico, a tendenza microocchiadina di Valnontey (presso lo sbocco del torrente Lauzon, subito sotto l'intercalazione di Trias).

Sez. G. P. 111

Na_2O 3,51 % ; K_2O 4,51 %.

D. – *Facies migmatitiche* (« embrechiti » sec. R. Michel).

26) Gneiss migmatitico ghiandolare; a monte di San Giacomo (Valle del Piantonetto, versante sinistro).

Sez. G. P. 70

Na_2O 2,64 % ; K_2O 4,30 %.

27) Gneiss listato migmatitico, con grosse ghiandole feldispatiche e sottili letti di parascisto biotitico; Colle del Nivolet (versante di Valsavaranche, poco sotto il colle).

Sez. G. P. 22, 23

Na_2O 3,65 % ; K_2O 5,01 %.

28) Gneiss migmatitico quarzoso–epidotico–muscovitico ad albite ed ortoclasio, poco sopra Noasca (Valle dell'Orco).

Sez. G. P. 25

Na_2O 4,07 % ; K_2O 3,70 %.

29) Gneiss migmatitico granatifero a due miche con albite ed ortoclasio; poco sopra Noasca (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 26.

Na_2O 2,47 % ; K_2O 4,00 %.

E. – *Paragneiss albitici ad epidoto e parascisti albitico–granatiferi.*

30) Gneiss albitico a due miche; poco sopra Locana (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 29

Na_2O 4,23 % ; K_2O 3,17 %.

31) Gneiss minuto albitico–ortoclasico a due miche con epidoto, associato al precedente; poco sopra Locana (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 28

Na_2O 3,67 % ; K_2O 3,65 %.

32) Scisto albitico ondulato a due miche, con clorite e granato; fra Locana e Pratolongo (in Valle dell'Orco).
Sez. G. P. 32 bis

Na_2O 4,00 % ; K_2O 2,30 %.

33) Gneiss minuto albitico a muscovite–epidoto–clorite; fra Pratolongo e Rosone (Valle dell'Orco, versante sinistro).
Sez. G. P. 64.

Na_2O 4,16 % ; K_2O 3,70 %.

34) Gneiss minuto, grigio, albitico a due miche, con clorite, granato, epidoto; sopra il lago Agnel (Colle del Nivolet).
Sez. G. P. 87.

Na_2O 3,80 % ; K_2O 1,61 %.

35) Scisto cloritico–muscovitico a granato ed albite; sopra il lago Agnel (Colle del Nivolet, poco sotto la intercalazione di dolomia cariata).
Sez. G. P. 32

Na_2O 3,48 % ; K_2O 2,76 %.

36) Gneiss minuto albitico–cloritico–muscovitico, ricco di granato; 500 m a valle di Terre, presso i sovrastanti ortogneiss (Valsavaranche, versante sinistro).
Sez. G. P. 122

Na_2O 3,39 % ; K_2O 2,37 %.

37) Scisto gneissico albitico minuto, granatifero a due miche, con epidoto, clorite, orneblenda; alla base della parete Est del Monte Leiziére a q. 2730 (Gruppo Herbetet, versante sinistro della Valle Levionna).
Sez. 10 II

Na_2O 4,95 % ; K_2O 1,46 %.

38) Gneiss albitico–muscovitico tabulare del Grand Sertze, q. 3450 (Gruppo Herbetet).
Sez. 14 I

Na_2O 3,42 % ; K_2O 2,87 %.

39) Gneiss minuto albitico–granatifero a muscovite e clorite; poco a valle di Case Persipia (Valnontey, versante sinistro).
Sez. G. P. 114

Na_2O 3,39 % ; K_2O 2,27 %.

F. – *Micascisti granatiferi.*

40) Micascisto granatifero a sismondina, associato ai paragneiss minuti del n° 33; fra Pratolongo e Rosone (Valle dell'Orco, versante sinistro).

Sez. G. P. 63

Na_2O 2,38 % ; K_2O 4,39 %.

41) Micascisto granatifero del lago artificiale di Piantelessio (presso la spalla sinistra della diga, Valle del Piantonetto).

Sez. G. P. 41

Na_2O 0,66 % ; K_2O 5,95 %.

42) Micascisto muscovitico–cloritico granatifero; poco a monte dell'Alpe Valeille (Valle Valeille, versante destro).

Sez. G. P. 107

Na_2O 2,65 % ; K_2O 3,79 %.

43) Micascisto pieghettato granatifero; a valle di Alpe Valeille (Valle Valeille, versante sinistro).

Sez. G. P. 123

Na_2O 0,85 % ; K_2O 2,90 %.

Commento dei risultati.

L'esame dei risultati relativi al contenuto di alcali (Tab. I e II) mette in evidenza per i vari gruppi analizzati le seguenti caratteristiche:

A) *Graniti gneissici a tessitura massiccia* («graniti di anatessi» e «graniti porfiroidi» sec. R. Michel). – Questo gruppo ha un tenore medio di Na_2O = 2,94 % e di K_2O = 4,80 %.

Le variazioni rispetto ai valori medi sono contenute in limiti ristretti, notandosi una maggior variazione per K_2O (deviazione standard $s = 0{,}49$) che non per Na_2O ($s = 0{,}25$).

Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O si aggira su una media di 0,94 osservandosi soltanto piccoli scostamenti da questo valore ($s = 0{,}13$). Dato il piccolo grado di varianza il gruppo si può ritenere omogeneo per quanto riguarda il contenuto di alcali.

B) *Gneiss granitici ghiandoni ed occhiadini a grana grossa, con porfiroblasti feldispatici più o meno vistosi* («embrechiti occhiolate» sec. R. Michel). – Questo gruppo ha un contenuto medio di Na_2O = 3,46 % e K_2O = 5,00 %.

Gli scostamenti dai valori medi sono piuttosto limitati, ed anche in questo gruppo, come nei graniti gneissici, le deviazioni sono maggiori per K_2O ($s = 0{,}39$) che non per Na_2O ($s = 0{,}25$).

TABELLA I.

Contenuto medio di alcali nei gruppi di rocce del Gran Paradiso.

Facies Petrografiche	$\bar{X}$		s^2		s	
	Na_2O	K_2O	Na_2O	K_2O	Na_2O	K_2O
A. – Graniti gneissici	2,94	4,80	0,0604	0,2424	0,25	0,49
B. – Gneiss ghiandoni e occhiadini a grana grossa	3,46	5,00	0,0640	0,1523	0,25	0,39
C. – Gneiss occhiadini e fettucciati a grana media e gneiss microocchiadini .	3,39	4,77	0,0592	0,0506	0,24	0,23
D. – Migmatiti gneissiche	3,21	4,25	0,6019	0,3150	0,78	0,56
E. – Paragneiss albitici ad epidoto e parascisti albitico-granatiferi	3,85	2,62	0,2445	0,5850	0,49	0,76
F. – Micascisti granatiferi	1,64	4,26	1,0507	1,6478	1,02	1,28

$\bar{X}$ = Media aritmetica delle determinazioni.

$s^2 = \frac{\Sigma d^2}{n-1}$ ove d = Deviazione delle singole misure dalla media; n = Numero delle determinazioni.

$s = \sqrt{s^2}$ = Deviazione standard delle singole misure dalla media.

Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O ha un valore medio di 1,06. Gli scarti rispetto a tale cifra sono insignificanti ($s = 0,15$).

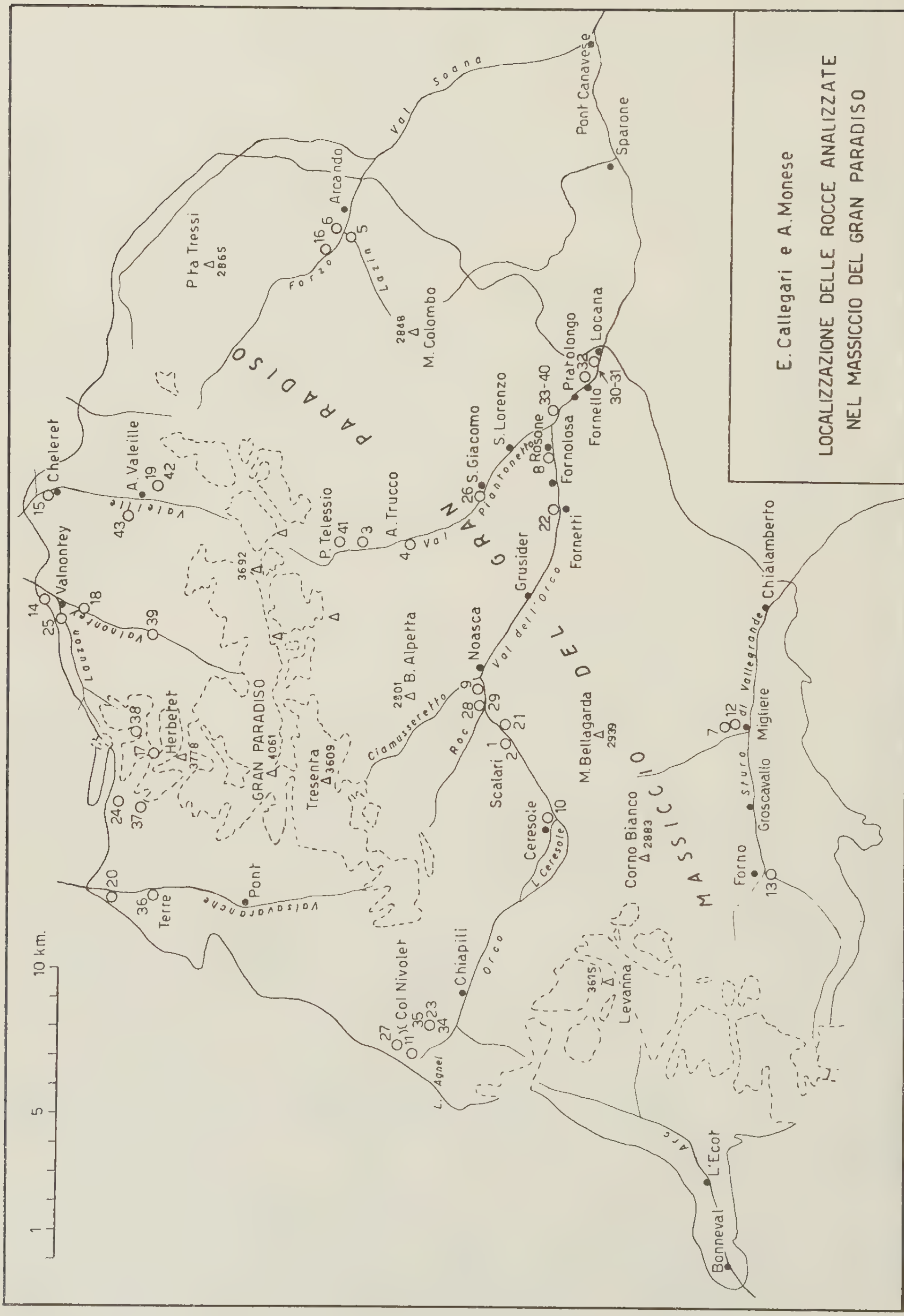
Il gruppo si può ritenere omogeneo.

C) *Gneiss occhiadini e fettucciati a grana media e gneiss microocchiadini* (« embrechiti » sec. R. Michel). – Le 9 determinazioni di alcali eseguite rivelano, per questo gruppo, un contenuto medio di $Na_2O = 3,39$ °/₀ e di $K_2O = 4,77$ °/₀.

Lo scostamento da questi valori medi è inferiore a quello riscontrato nei due gruppi precedenti, essendo $s = 0,24$ e $0,23$ per Na_2O e K_2O rispettivamente. Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O ha un valore medio di 1,08 con una deviazione standard: $s = 0,11$.

I valori trovati sono quasi identici a quelli degli gneiss a grana grossa, come era del resto logico attendersi trattandosi di rocce simili che si differenziano fra loro soltanto per la grana.

D) *Migmatiti gneissiche* (« embrechiti » sec. R. Michel). – In questo gruppo il contenuto medio di Na_2O è uguale a 3,21 °/₀ e quello di K_2O è eguale a 4,25 °/₀.



E. Callegari e A. Monese

LOCALIZZAZIONE DELLE ROCCE ANALIZZATE NEL MASSICCIO DEL GRAN PARADISO

TABELLA II.

Rapporto molecolare fra gli alcali nelle rocce del Gran Paradiso.

Facies petrografiche	Camp. n°	Rapp. mol. $\frac{Na_2O}{K_2O}$	media	Deviazione standard *s*
A. - Graniti gneissici	1	0,92	0,94	0,13
	2	0,83		
	3	0,79		
	4	0,87		
	5	0,94		
	6	1,14		
	7	1,10		
B. - Gneiss ghiandoni ed occhiadini a grana grossa	8	0,85	1,06	0,15
	9	1,05		
	10	1,15		
	11	1,13		
	12	0,89		
	13	1,33		
	14	1,12		
	15	0,91		
	16	1,08		
C. - Gneiss occhiadini e fettucciati a grana media e gneiss microocchiadini	17	0,89	1,08	0,11
	18	1,14		
	19	1,23		
	20	1,01		
	21	1,13		
	22	0,99		
	23	1,02		
	24	1,12		
	25	1,18		
D. - Migmatiti gneissiche	26	0,93	1,16	0,35
	27	1,11		
	28	1,67		
	29	0,94		
E. - Paragneiss albitici ad epidoto e parascisti albitico-granatiferi	30	2,02	2,48	1,05
	31	1,53		
	32	2,64		
	33	1,71		
	34	3,58		
	35	1,91		
	36	2,17		
	37	1,81		
	38	5,15		
	39	2,27		
F. - Micascisti granatiferi	40	0,82	0,62	0,40
	41	0,17		
	42	1,06		
	43	0,44		

Gli scostamenti da questi valori medi sono piuttosto forti essendo la deviazione standard $s \geq 0,56$. Le deviazioni maggiori si osservano per Na_2O ($s = 0,78$).

Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O ha un valore medio di 1,16 con una deviazione standard sensibile ma non molto elevata ($s = 0,35$).

Visti i coefficienti di variazione abbastanza elevati, il gruppo si deve considerare come relativamente eterogeneo.

E) *Paragneiss albitici ad epidoto e parascisti albitico-granatiferi.* – Il gruppo ha un contenuto medio di $Na_2O = 3,85$ °/₀ e di $K_2O = 2,62$ °/₀.

Gli scarti osservati, rispetto alle medie, sono maggiori per K_2O ($s = 0,76$) che non per Na_2O ($s = 0,49$).

Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O ha un valore medio di 2,48.

Le deviazioni rispetto a tale cifra sono fortissime ($s = 1,05$).

È interessante rilevare che il rapporto molecolare Na_2O/K_2O nelle rocce appartenenti a questo gruppo è sempre $> 1,5$.

Visti gli elevati coefficienti di variabilità, il gruppo si deve ritenere decisamente eterogeneo.

F) *Micascisti granatiferi.* – In questo gruppo si è trovato un valore medio di $Na_2O = 1,64$ °/₀ e di $K_2O = 4,26$ °/₀. Tuttavia si osservano forti variazioni, rispetto a tali valori medi, sia per Na_2O ($s = 1,02$) sia per K_2O ($s = 1,28$).

Il rapporto molecolare Na_2O/K_2O ha un valore medio di 0,62 ma presenta un coefficiente di variabilità molto elevato ($s = 0,40$).

Il gruppo, dal punto di vista del contenuto in alcali, si deve ritenere eterogeneo.

Da quanto esposto possiamo concludere che i graniti gneissici e gli gneiss granitici ghiandoni ed occhiadini rappresentano due gruppi omogenei (almeno per quanto riguarda il contenuto di Na_2O e K_2O) differenziandosi solo per il rapporto molecolare Na_2O/K_2O che risulta un po' più elevato nelle rocce del secondo gruppo.

I paragneiss e i micascisti rappresentano invece 2 gruppi eterogenei anche se ognuno di essi è definito da caratteristici valori del rapporto molecolare, il quale è molto elevato nei paragneiss ($Na_2O/K_2O > 1,5$ come media di 10 determinazioni) mentre è nettamente inferiore nei micascisti ($Na_2O/K_2O = 0,62$ come media di 4 determinazioni).

Zoologia. — *Primi appunti ed osservazioni sulla ricostituzione degli elementi germinali durante la rigenerazione di* Spirorbis pagenstecheri [(*)]. Nota [(**)] di ANNA STAGNI, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Gli aspetti della rigenerazione nei Policheti sono documentati da una letteratura sufficientemente estesa, seppure non cospicua qual'è, per contro, quella riferibile in proposito agli Oligocheti. È noto che nei Policheti i poteri rigenerativi, in linea di massima rimarchevoli, differiscono tuttavia notevolmente a seconda dei gruppi considerati: accanto a forme che mostrano particolari attitudini recuperative, dopo asportazione di parti ai vari livelli del corpo (Sillidi, Chetopteridi, Spionidi, Sabellidi), altre si affiancano in cui tali capacità sono piuttosto attenuate e circoscritte (maggioranza dei Serpulidi).

La variabilità del comportamento è accentuata anche nell'ambito di famiglie e generi affini. Fra i Sabellimorfi, che interessano in particolare questa Nota, la quasi totalità delle specie dei Sabellidi attua facilmente, oltre alla rigenerazione posteriore, anche quella anteriore dell'addome (Ivanov 1908; Berrill 1931; Huxley e Gross 1934–35; La Greca 1953) [(1)], complicata da fenomeni di toracizzazione dei segmenti addominali, analogamente a quanto avviene nel normale accrescimento. Nei Serpulidi, invece, solo alcune specie dei generi *Salmacina* e *Filograna* rigenerano anteriormente (La Greca 1946, 1952 *a*, *b*; Vannini 1950; Vannini e Ranzoli 1954, 1956, 1957) [(2)].

(*) Istituto di Zoologia della Università di Bologna diretto dal prof. E. Vannini e Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. diretto dal prof. G. Montalenti.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1959.

(1) P. IVANOV, *Die Regeneration des vorderen und des hinteren Körperendes bei* Spirographis spallanzanii *Viv.*, «Zeitschr. wiss. Zool.», Bd. 91, p. 511 (1908); N. J. BERRILL, *Regeneration in* Sabella pavonina (*Sav.*) *and other Sabellid worms*, «J. exp. Zool.», vol. 58, p. 495 (1931); J. S. HUXLEY u. F. GROSS, *Regeneration und «Organisatorwirkung» bei* Sabella, «Naturwiss.», Bd. 22, p. 456 (1934); F. GROSS a. J. S. HUXLEY, *Regeneration and reorganisation in* Sabella, «Arch. Entw.-mech.», Bd. 133, p. 582 (1935); M. LA GRECA, *I fenomeni di rigenerazione nei Policheti Sabellimorfi*, «Ann. Ist. Sup. Sc. Lett. S. Chiara Napoli», n. 4 (1953).

(2) M. LA GRECA, *Osservazioni sulla autotomia e la rigenerazione di* Salmacina incrustans *Clap.* (*Policheti*, Serpulidae), «Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Soc. Reale Napoli», vol. 14 (1946); M. LA GRECA, *Ricerche sulla rigenerazione dei Serpulidi* (Annelida Polychaeta), «Arch. Zool. Ital.», vol. 37, p. 61 (1952 *a*); M. LA GRECA, *Gli aspetti istologici della cicatrizzazione nei Serpulidi* (Annelida Polychaeta) *incapaci di rigenerazione anteriore dell'addome.* (*Nota preliminare*), «Boll. Zool.», vol. 19, p. 317 (1952 *b*); E. VANNINI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel polichete ermafrodita* Salmacina incrustans *Clap.* – I. *Osservazioni sul ciclo riproduttivo sessuale e asessuale*, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 22, p. 211 (1950); E. VANNINI e F. RANZOLI, *Rigenerazione, schizogonia e maturazione sessuale nel polichete ermafrodita* Salmacina incrustans, «Boll. Zool.», vol. 12, p. 467 (1954); E. VANNINI e F. RANZOLI, *I processi riproduttivi sessuali e la rigenerazione in* Salmacina incrustans, «Boll. Zool.», vol. 23, p. 573 (1956); E. VANNINI e F. RANZOLI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel polichete ermafrodita* Salmacina incrustans *Clap.* – II. *Poteri rigenerativi, schizogonia e maturazione sessuale*, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 30, p. 210 (1957).

A questi due generi di Serpulidi appartengono infatti specie schizogoniche (*Salmacina incrustans*, *S. dysteri*, *Filograna implexa*) in cui la produzione di schizozooidi si compie a spese degli ultimi segmenti addominali dell'anellide, sessualmente maturo o no. In tale regione si accumulano, precocemente, elementi ricchi di sostanza di riserva, derivati dai neoblasti (Malaquin 1911, 1934; Faulkner 1930; Vannini 1947) (3). I neoblasti forniranno inoltre il materiale per le strutture mesodermiche del capo e dei primi due segmenti del torace, abbozzatisi *ex novo*, già prima del distacco dello schizozooide dal genitore.

Dallo stesso ceppo di elementi pluripotenti, distribuiti lungo tutti i segmenti del corpo dell'anellide e, durante i primi stadi di accrescimento, concentrati nella regione del pigidio, a livello di alcuni metameri dell'addome avrebbero origine (come è ammesso dalla maggior parte degli AA.) gli elementi germinali; nell'ambito di questa interpretazione trova una luce il problema dell'origine degli elementi germinali negli schizozooidi che, pur prodotti per via asessuata, maturano in seguito i gameti.

Un diverso destino differenzierebbe dunque elementi fra loro simili per origine e indurrebbe in essi un peculiare orientamento morfogenetico.

Vannini (1954) (2) in una serie di accurate ricerche, condotte in parte con Ranzoli, su *Salmacina incrustans*, ha riaffacciato il concetto del gradiente metabolico cefalo–caudale di Child. Il diverso comportamento dei neoblasti ai vari livelli del corpo potrebbe essere infatti determinato dalle particolari condizioni fisiologiche dell'ambiente interno, nelle differenti regioni del corpo dell'anellide. Come già Berrill, Berrill e Mees, Abeloos, Durchon, il Vannini ritiene che un centro induttore cefalico controlli primariamente il gradiente metabolico cefalo–caudale e regoli (in alcuni casi inibendo, in altri favorendo) i processi di maturazione sessuale. Le ricerche della Arvy e i dati riportati da Gabe sui fenomeni neurosecretori nei Policheti Sedentari, inclusivi alcuni Sabellimorfi, portano argomenti a favore di questa ipotesi.

Meno chiaramente intuibili sono tuttavia i fattori che determinano, nei segmenti genitali delle specie ermafrodite, l'orientamento ora maschile, ora femminile delle cellule germinali indifferenziate. In *Spirorbis pagenstecheri*, Serpulide aschizogonico, i cui poteri rigenerativi non erano mai stati fino ad ora indagati, i segmenti addominali femminili sono situati anteriormente a quelli maschili (all'opposto di quanto si avvera in *Salmacina*). Essi sono costituiti dai due primi metameri dell'addome, immediatamente retrostanti alla

(3) A. MALAQUIN, *L'accroissement et les phases sexuelles et asexuelles de* Salmacina dysteri (*Huxley*), «Zool. Anz.», Bd. 37, p. 197 (1911); A. MALAQUIN, *Nouvelles observations sur la lignée germinale de l'Annéllide* Salmacina dysteri (*Huxley*), «C. R. Acad. Sci.», T. 198, p. 1804 (1934); G. H. FAULKNER, *The anatomy and the histology of bud-formation in Serpulid* Filograna implexa, *together with some cytological observations on the nuclei of the neoblasts*, «J. Linn. Soc. London, Zool.», vol. 37, p. 109 (1930); E. VANNINI, *Neoblasti e rigenerazione dei segmenti genitali nel serpulide ermafrodita* Salmacina incrustans *Clap.*, «Atti Ist. Veneto S.L.A.», vol. 105, p. 50 (1947).

zona acheta. I neoblasti che a livello di questa regione danno origine alla serie gametogenetica femminile, formano un cordone longitudinale che, partendo dalla regione toracica, attraversa obliquamente il celoma della zona acheta e prosegue lungo l'addome fin verso il pigidio (Reggiani 1956, 1957; Vannini e Stagni 1959) (4). È questa la riserva di cellule che, presumibilmente, alimenta le ondate maturative della gametogenesi femminile e di quella maschile, localizzata, quest'ultima, nei retrostanti metameri addominali.

Le potenze prospettiche di questi neoblasti delle forme aschizogoniche di Policheti sono, come abbiamo annotato precedentemente, più circoscritte e limitate di quanto non avvenga per le specie atte alla riproduzione agama: ciò che è dimostrato in particolare dalla diminuita attitudine a rigenerare e che trova riscontro e conferma anche in tutti gli altri gruppi animali che hanno specie dotate di blastogenesi. Tuttavia in *Spirorbis pagenstecheri* la peculiare localizzazione dei neoblasti, in prevalenza situati lungo il cordone longitudinale su descritto, si presta piuttosto bene a seguire un eventuale differenziamento a gradiente di questi elementi ai vari livelli del corpo.

Ho iniziato a tale scopo una serie di ricerche sulla rigenerazione di *Spirorbis*. Tali ricerche saranno progressivamente e ulteriormente approfondite e vagliate. Comunque, dati di un qualche interesse sono emersi dall'analisi dei primi risultati: di essi quindi intendo riferire in questa Nota.

In tale gruppo di esperimenti è stato effettuato un unico tipo di taglio a livello della zona acheta (fig. 1), seguendo successivamente la rigenerazione dei soli monconi cefalotoracici.

Il primo atteggiamento rilevato in questi monconi in rigenerazione, è quello consueto, più volte documentato nei lavori precedenti sull'argomento (Faulkner 1932) (5): rovesciamento dei margini sezionati verso l'esterno, ribattimento all'infuori dell'epitelio intestinale a livello della ferita (fig. 2), conseguente ricopertura, per sua opera, dei muscoli tagliati e delle cavità celomatiche beanti. L'epitelio intestinale viene in questo modo a contatto con l'epidermide, permanendo tuttavia molto evidente l'ingrossamento terminale a cercine, determinato dal rovesciamento del lembo intestinale (fig. 2). Questo aspetto, che comincia a delinearsi immediatamente dopo il taglio, permane circa invariato a 6–7 ore dall'operazione.

A questa epoca comunque i neoblasti disposti a cordone longitudinale (che nella regione acheta ha decorso particolarmente sinuoso) sono stipati e

(4) M. P. REGGIANI, *Origine delle cellule germinali e maturazione dei gameti in* Spirorbis pagenstecheri, «Boll. Zool.», vol. 23, p. 581 (1956); M. P. REGGIANI, *Osservazioni sull'origine delle cellule germinali e il differenziamento dei gameti nel Polichete ermafrodita* Spirorbis pagenstecheri *Quatr.*, «Riv. Biol.», vol. 49, p. 243 (1957); E. VANNINI e A. STAGNI, *Nuove indagini sull'origine ed il differenziamento delle cellule germinali nel Polichete ermafrodita* Spirorbis pagenstecheri, «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. 26, p. 259 (1959).

(5) G. H. FAULKNER, *The histology of posterior regeneration in the polychaete* Chaetopterus variopedatus, «Jour. Morph.», vol. 53, p. 23 (1932).

fortemente basofili (figg. 3-4). Parecchi di essi tuttavia hanno forma a clava, con porzione provvista di nucleo, allargata, libera verso il celoma e tratto prossimale, invece, a peduncolo sottile. L'aspetto suggerisce un loro prossimo distacco nella cavità celomatica.

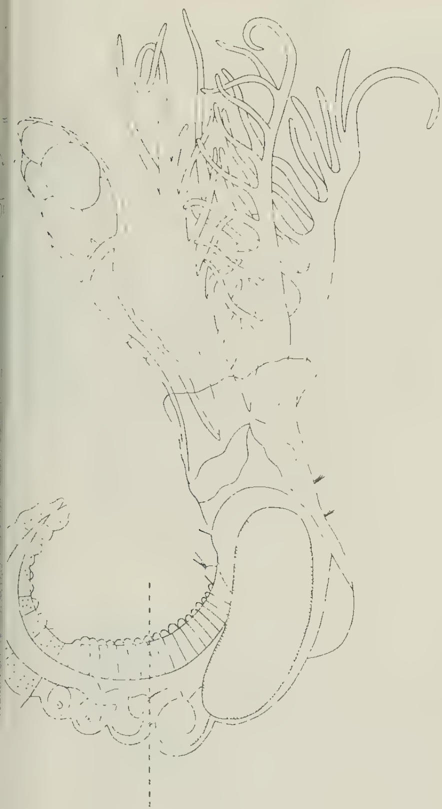
Non intendo descrivere qui, neppure in succinto, l'istologia e le tappe graduali della morfogenesi nei rigenerati. Mi riservo infatti di esporre in dettaglio gli aspetti istologici della rigenerazione in *Spirorbis* in una Nota successiva. Voglio unicamente mettere in rilievo ora l'immediatezza con cui, in questi individui in rigenerazione, i neoblasti del cordone longitudinale, tagliato a livello della regione acheta, iniziarono la gametogenesi nei pochi segmenti appena rigenerati. Fatto di un certo interesse è la estrema rapidità di tutto il processo: in un caso limite, per il momento non più ripetutosi, addirittura ad un giorno di distanza dal taglio, alcuni segmenti erano già stati rigenerati ed in essi erano in pieno svolgimento i processi maturativi.

Comunque anche quando in periodi di tempo più lunghi (56 ore) la rigenerazione era stata meno efficace, contandosi tuttavia già 1 o 2 metameri addominali ricostituiti, in essi era quasi sempre ugualmente in atto la gametogenesi.

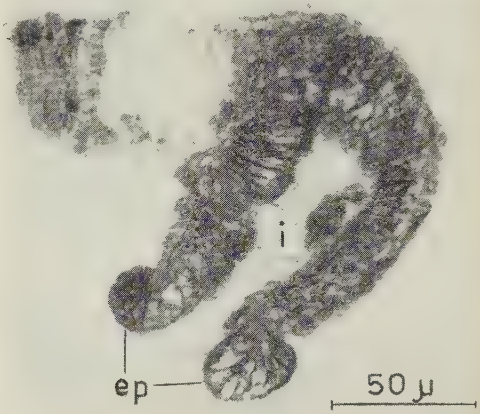
Le figg. 5-8, che si riferiscono tutte ad un medesimo individuo, esprimono abbastanza chiaramente gli aspetti che si rilevano in questi esemplari rigeneranti. Nella zona acheta è particolarmente evidente, col suo caratteristico decorso sinuoso, il cordoncino di neoblasti (figg. 5-6 *n*). Essi, che spiccano per la intensa basofilia, modificano il loro aspetto quando dalla zona acheta si passa ai primissimi segmenti dell'addome (figg. 5-8 *ov*): aumentano le loro dimensioni complessive, ma in particolare se ne accresce il nucleo, in cui si afferma un cospicuo nucleolo.

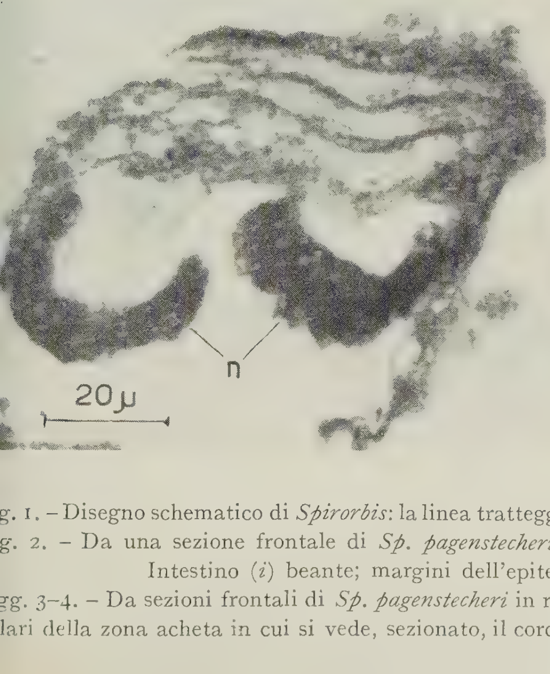
Le tappe di queste modificazioni, che si traducono con il passaggio dei neoblasti ad ovogoni ed ovociti, si susseguono assai rapidamente. Soprattutto affrettato è il primo periodo di accrescimento con gli aspetti della sinapsi cromosomica; assai più facili a seguirsi sono le fasi del secondo periodo di accrescimento, nelle quali la basofilia del citoplasma è ovviamente la più marcata (figg. 7-8 *ov*). L'assestamento dei goni femminili (che in seguito si distaccano dal cordoncino) è già in parte in atto ed ovociti liberi con vitellogenesi appena iniziata, si rinvengono nei primi due metameri addominali (figg. 7-8 *ov*). Nei rimanenti metameri caudali, la gametogenesi maschile ha raggiunto stadi più avanzati. I goni maschili, divenuti liberi precocemente nel celoma (figg. 5, 6, 7 *sp*), stanno intensamente moltiplicandosi come spermatogoni ed infarciscono la cavità celomatica; si rilevano anche tutti gli aspetti della profase e della metafase della prima e della seconda divisione meiotica, ed in alcune poche regioni localizzate è cominciata la spermioistogenesi.

In rapporto con la più avanzata fase maturativa della serie gametogenetica maschile, i metameri interessati hanno quasi raggiunto la morfologia e le dimensioni tipiche di esemplari maturi normali, mentre i segmenti femminili sono meno compiutamente delineati e più ridotti. Comunque i dissepimenti di separazione sono accennati da file di neoblasti.

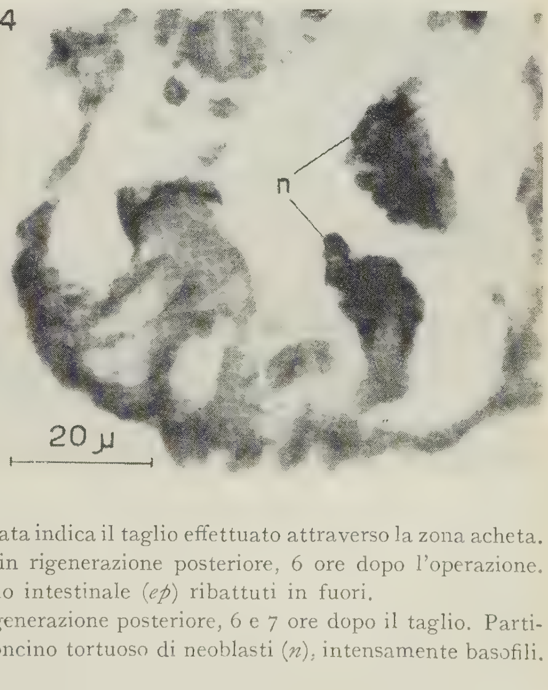


2





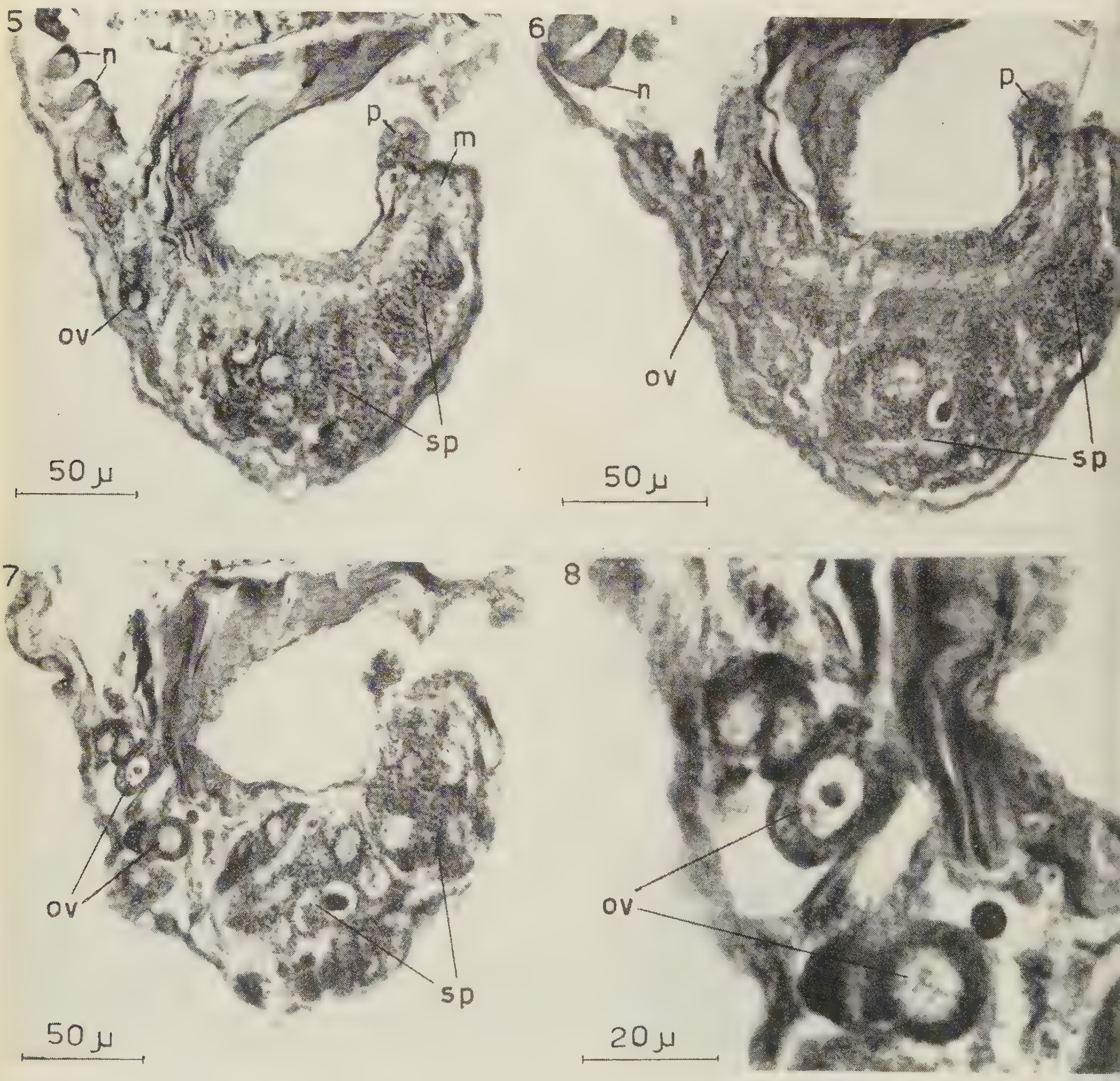
4



g. 1. – Disegno schematico di *Spirorbis*: la linea tratteggiata indica il taglio effettuato attraverso la zona acheta.

g. 2. – Da una sezione frontale di *Sp. pagenstecheri* in rigenerazione posteriore, 6 ore dopo l'operazione. Intestino (*i*) beante; margini dell'epitelio intestinale (*ep*) ribattuti in fuori.

gg. 3–4. – Da sezioni frontali di *Sp. pagenstecheri* in rigenerazione posteriore, 6 e 7 ore dopo il taglio. Particolari della zona acheta in cui si vede, sezionato, il cordoncino tortuoso di neoblasti (*n*), intensamente basofili.



Figg. 5-8. - Da sezioni frontali di un medesimo esemplare di *Sp. pagenstecheri*, in rigenerazione posteriore e maturità sessuale. Nella zona acheta, cordoncino di neoblasti (*n*); nei due primi segmenti dell'addome, ovocit accrescimento (*ov*); nei successivi, fasi diverse della gametogenesi maschile (*sp*) con stadi iniziali nel penult metamero (*m*); segue l'abbozzo pigidiale dell'ultimo segmento (*p*).

Nella regione pigidiale nuovi metameri vanno gemmando dal lato concavo della spirale dell'addome. Nell'esemplare considerato se ne osserva uno in cui sono appena iniziati i processi maturativi (fig. 5 *m*) ed un altro all'estremo caudale (figg. 5–6 *p*), accennato semplicemente come cuscinetto di elementi indifferenziati in cui comincia a scavarsi la cavità celomatica; i neoblasti sono qui meno intensamente basofili di quelli localizzati intorno al cordoncino della zona acheta.

In base a questi primi pochi dati, ritengo si possa affermare che in *Spirorbis pagenstecheri* la rigenerazione posteriore da monconi cefalotoracici, sezionati a livello della zona acheta, avvenga non soltanto con molta facilità, ma anche con notevole rapidità.

Il gradiente di sensibilizzazione dei neoblasti, lungo l'asse cefalocaudale, sembra manifestarsi precocemente: in generale, infatti, il rigenerato si sessualizza immediatamente, mentre ad opera degli stessi elementi è in atto la ricostituzione dei setti mesodermici e la gemmazione di nuovi metameri all'estremo caudale.

La diretta derivazione dei gameti dai neoblasti collocati in cordone longitudinale, è qui ancora più evidente e dimostrativa che non nei quadri istologici osservabili durante la gametogenesi di esemplari non rigeneranti.

La serie femminile, nei due primi segmenti dell'addome, inizia il differenziamento quando ancora i suoi elementi sono attaccati al supporto, mentre invece, nei metameri successivi, i goni maschili cadono precocemente nel celoma, moltiplicandosi quivi attivamente. Questa condizione è del resto comune, come già osservammo in una Nota precedente (Vannini e Stagni 1959) [(4)], ad altri gruppi animali ed è probabilmente uno dei primi aspetti che denotano il diverso orientamento sessuale acquisito dai goni primari.

Fisiologia. — *Convergenza d'impulsi afferenti su unità deitersiane che rispondono alla stimolazione localizzata del cervelletto* [(*)]. Nota [(**)] di Ottavio Pompeiano e Edelweiss Cotti, presentata dal Socio G. C. Pupilli.

Con le presenti ricerche ci siamo proposti di analizzare le risposte di unità deitersiane alla stimolazione specifica di recettori degli arti ovvero a singoli impulsi elettrici applicati a nervi contenenti fibre afferenti. Il risultato più importante da noi ottenuto consiste nel fatto che unità deitersiane, le quali rispondono alla stimolazione di singole lamelle della corteccia cerebellare vermiana del *lobus anterior*, possono essere influenzate da stimoli applicati a un ampio distretto della periferia sensoriale e che queste risposte sono verosimilmente dovute a riverberazioni cerebellari.

Abbiamo già descritto [(1)] le tecniche di registrazione e di localizzazione delle unità deitersiane, come anche il procedimento di stimolazione della corteccia cerebellare, a cui ci attenevamo in queste ricerche. Per la stimolazione della periferia sensoriale venivano usati singoli impulsi rettangolari di 1 msec di durata, forniti da uno stimolatore elettronico Grass mod. S4B e applicati al N. radiale, in sede prossimale rispetto alla sua biforcazione, o al N. ischiatico di un lato o dell'altro; oppure si effettuavano movimenti passivi degli arti o *tappings* a livello del muso o degli arti medesimi. Nel primo caso la derivazione contemporanea, macroelettrodica e monopolare, dell'attività elettrica della corteccia vermiana del *lobus anterior* permetteva di raffrontare le modificazioni di scarica dell'unità deitersiana e la risposta evocata nella corteccia cerebellare.

Gli esperimenti venivano condotti su Gatti decerebrati a livello precollicolare. Un certo numero di Gatti è stato trattato con cloridrato di tubocurarina alla dose di 0,5 mg/kg per via intravenosa: questa dose, sufficientemente piccola per evitare qualsiasi depressione dell'attività elettrica corticocerebellare, veniva ripetuta approssimativamente ogni 45–60 min. Gli animali erano mantenuti in vita mediante respirazione artificiale.

I risultati ottenuti sono i seguenti.

1° Nella grande maggioranza dei casi le unità deitersiane che rispondono in maniera localizzata alla polarizzazione di una singola lamella vermiana del *lobus anterior*, palesano gli effetti di stimolazioni fisiologiche attuate a livello degli arti, come movimenti passivi dei medesimi o *tappings* sui tendini dei muscoli estensori, ovvero a livello del muso e della coda. Per effetto

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1959.

(1) O. Pompeiano e E. Cotti, «Rend. Acc. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. VIII, vol. XXVI, 284 (1959).

della stimolazione si osserva di solito una chiara accelerazione della scarica di *spikes*, i quali risultano per lo più raggruppati in treni.

2° Tra le unità deitersiane che rispondevano in maniera localizzata alla stimolazione galvanica di singole lamelle vermiane, 12 venivano sottoposte ad una più controllata attivazione delle afferenze periferiche degli arti, mediante singoli impulsi elettrici (1,5–4 V) applicati al N. radiale o al N. ischiatico di entrambi i lati. La scarica unitaria era aumentata in 10 unità e inibita soltanto in 2: tra le unità deitersiane appartenenti al primo gruppo, 7 rispondevano alla stimolazione dei NN. radiale e ischiatico di entrambi i lati, 1 rispondeva alla stimolazione dei nervi ipsilaterali, 1 alla stimolazione dei nervi del lato opposto e infine 1 alla stimolazione del N. ischiatico di entrambi i lati, ma non a quella dei NN. radiali. Le risposte di queste unità deitersiane sono contraddistinte principalmente da un'accelerazione del ritmo di scarica, che passa da 15–25/sec a 50–60/sec. Quando l'unità deitersiana non è spontaneamente attiva, la risposta è invece contraddistinta dalla comparsa di uno o più *spikes*, la cui frequenza di scarica è di circa 22–48/sec. La durata della risposta varia da 0,8–1,4 sec, per stimoli applicati ai NN. radiali, a 1–1,8 sec per stimoli applicati ai NN. ischiatici.

L'aumento della scarica di *spikes* dei neuroni deitersiani si manifesta con un ritardo variabile da 14 a 25 msec rispetto all'inizio dell'onda corticale, registrata dal *culmen*, per singoli impulsi elettrici applicati ai NN. radiali. Questo ritardo sale a 18–38 msec per singoli impulsi applicati ai NN. ischiatici.

Tra le unità la cui attività era aumentata per stimolazioni periferiche, una metà rispondeva con un aumento della frequenza di scarica alla polarizzazione localizzata di singole lamelle dell'emiverme corrispondente, mentre l'altra metà rispondeva con una inibizione.

Com'è stato più sopra accennato, 2 delle 12 unità deitersiane studiate venivano inibite da singoli impulsi elettrici applicati ai nervi degli arti (1,5–4 V). In questi casi le risposte erano contraddistinte da un notevole rallentamento o da un blocco completo della frequenza spontanea di scarica. La durata del blocco oscillava, in genere, da 100 a 400 msec ed era maggiore per la stimolazione dei NN. ischiatici che per quella dei radiali. L'intervallo tra l'inizio della prima deflessione positiva della risposta corticale e l'inizio della inibizione dell'attività deitersiana variava da 22 a 28 msec, per stimolazione dei NN. radiali, da 26 a 36 msec per quella dei NN. ischiatici. Alla fine della inibizione si osservava il ritorno dell'attività unitaria, la cui frequenza di scarica raggiungeva valori (30–60/sec) leggermente superiori a quelli di riposo (20–40/sec). Entrambe le unità inibite rispondevano con un aumento della loro frequenza di scarica alla stimolazione di singole lamelle della corteccia vermiana del *lobus anterior*.

3° Le risposte di unità deitersiane a stimoli periferici non erano la espressione di riverberazioni propriocettive prodotte da eventuali movimenti dell'animale, né potevano essere artefatti causati da spostamenti della posizione dell'elettrodo dovuti medesimamente a eventuali movimenti: tali risposte si osservavano infatti anche dopo curarizzazione.

Si conclude pertanto che unità deitersiane, le quali rispondono alla stimolazione corticocerebellare localizzata ad una singola lamella vermiana del *lobus anterior*, manifestano gli effetti di stimolazioni periferiche e che queste risposte sono dovute a riverberazioni cerebellari degli impulsi destati con tali stimolazioni.

L'attualità di un alto grado di convergenza di impulsi originanti dai quattro arti sulla stessa unità deitersiana, può sembrare in contrasto con la localizzazione della risposta di unità deitersiane alla polarizzazione di una singola lamella vermiana del *lobus anterior*. È per altro noto che la localizzazione somatotopica delle risposte elettriche della corteccia cerebellare del *lobus anterior* a stimoli periferici [Adrian (2), Snider e Stowell (3)] manca negli animali decerebrati non anestetizzati [Combs (4)]: il fatto che in queste condizioni sperimentali è possibile da uno stesso punto della corteccia cerebellare del *lobus anterior* registrare potenziali in risposta a stimolazioni periferiche effettuate in un arto qualsiasi, potrebbe spiegare come nella stessa unità deitersiana convergano impulsi che originano dai quattro arti.

Se l'attivazione di unità deitersiane per stimolazioni periferiche è dovuta a riverberazioni spino-cerebellari, si dovrebbe pensare che la risposta deitersiana sia dello stesso segno di quella che si ottiene con la stimolazione di *folia* della corteccia vermiana del *lobus anterior*. Ciò si verifica in alcuni casi, mentre in altri si osserva che gli stimoli periferici destano una risposta deitersiana di segno opposto a quella dovuta alla stimolazione della corteccia cerebellare. La stimolazione dei nervi periferici verosimilmente produce a livello corticocerebellare l'attivazione di meccanismi funzionalmente differenti da quelli messi in giuoco dalla stimolazione galvanica diretta della corteccia cerebellare. In ogni caso non si deve dimenticare che la risposta dell'unità deitersiana a stimoli periferici può esser dovuta all'attivazione di aree corticocerebellari diverse da quelle stimolate con la corrente galvanica. Ricerche morfologiche [cfr. Brodal (5)] e funzionali [Dow (6), Grundfest e Campbell (7), Dow e Anderson (8), Combs (4)] hanno infatti dimostrato che anche il verme del lobo posteriore cerebellare riceve afferenze spinali; e d'altra parte è noto che le fibre corticifughe del verme posteriore proiettano alla parte caudale del *nucleus fastigii* [Jansen e Brodal (9)], le cui fibre efferenti seguono il decorso del fascio uncinato di Russell [Jansen e Jansen (10), Batini e Pompeiano (11)]

(2) E. D. ADRIAN, « Brain », LXVI, 289 (1943).

(3) R. S. SNIDER a. A. STOWELL, « J. Neurophysiol. », VII, 331 (1944).

(4) C. M. COMBS, « J. Neurophysiol. », XVII, 123 (1954).

(5) A. BRODAL, *Afferent cerebellar connections*. In J. JANSEN a. A. BRODAL, *Aspects of cerebellar anatomy* (pp. 82–188). Oslo, Johan Grundt Tanum (1954).

(6) R. S. DOW, « J. Neurophysiol. », II, 543 (1939).

(7) H. GRUNDFEST a. B. CAMPBELL, « J. Neurophysiol. », V, 275 (1942).

(8) R. S. DOW a. R. ANDERSON, « J. Neurophysiol. », V, 363 (1942).

(9) J. JANSEN a. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940).

(10) J. JANSEN a. J. JANSEN jr., « J. comp. Neurol. », CII, 607 (1955).

(11) C. BATINI a. O. POMPEIANO, « Arch. it. Biol. », XCV, 147 (1957).

prima di raggiungere il nucleo di Deiters del lato opposto [Allen [12], Mussen [13], Rasmussen [14], Rand [15], Jansen [16], Thomas, Kaufman, Sprague e Chambers [17]]. Rimane pertanto la possibilità che afferenze spino–cerebellari attivino il nucleo di Deiters attraverso vie diverse da quella cerebello–fastigio–bulbare diretta.

(12) W. F. ALLEN, « J. comp. Neurol. », XXXVI, 399 (1924).

(13) A. T. MUSSEN, « Brain », L, 313 (1927).

(14) A. T. RASMUSSEN, « J. comp. Neurol. », LVII, 165 (1933).

(15) R. W. RAND, « J. comp. Neurol. », CI, 167 (1954).

(16) J. JANSEN, *Efferent cerebellar connections*. In J. JANSEN a. A. BRODAL, *Aspects of cerebellar anatomy* (pp. 189–248). Oslo, Johan Grundt Tanum (1954).

(17) D. M. THOMAS, R. P. KAUFMAN, J. M. SPRAGUE a. W. W. CHAMBERS, « J. Anat. », XC, 371 (1956).

Fisiologia. — *Effetti del cortisone sugli elementi del sistema dineuronico transcallosale nel Gatto con nevrasse integro* [*]. Nota [**] di Paolo Crepax e Angelo Volta, presentata dal Socio G. C. Pupilli.

Le risposte della corteccia cerebrale agli impulsi transcallosali possono riguardarsi come la manifestazione bioelettrica dell'attività delle strutture terminali di una via monosinaptica intracerebrale, come quella rappresentata dalle fibre che attraverso il corpo calloso connettono punti simmetrici degli emisferi cerebrali. Il fenomeno elettrico registrabile in un'area corticale per effetto di uno stimolo applicato nella regione omotopica contralaterale è espressione tanto degli impulsi afferenti, nella sua parte iniziale che è rappresentata da un'onda positiva, quanto della reazione degli elementi locali e quindi degli impulsi efferenti, nella successiva onda negativa. Secondo Marrazzi [1], a cui si deve un approfondito studio delle modificazioni che le risposte transcallosali palesano per effetto di sostanze biologicamente attive di natura assai diversa [2], una modificazione degli impulsi efferenti, in mancanza di una corrispondente variazione di quelli afferenti, indicherebbe specificamente una alterazione nei processi di trasmissione sinaptica. Sebbene distinguere i fenomeni riferibili a tali processi da quelli dovuti alle modificazioni reazionali degli elementi postsinaptici non appaia sempre agevole per le ragioni che esporremo appresso, le risposte della corteccia cerebrale agli impulsi transcallosali sono state largamente utilizzate a fine di contraddistinguere il meccanismo dell'azione che diverse sostanze esercitano sugli elementi nervosi [1].

Nella presente Nota riferiamo i risultati degli esperimenti da noi eseguiti a fine di esaminare gli effetti del cortisone sulle manifestazioni bioelettriche ora discusse. Facciamo presente come le ricerche che precedentemente abbiamo fatte intorno alle azioni nervose di tale ormone, abbiano dato evidenza alla complessità degli effetti dell'ormone medesimo. Infatti l'azione atti-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna e Sezione I del Centro di Neurofisiologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Dei due Autori della Nota, P. Crepax è direttore dell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Urbino e ricercatore presso detto Centro.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1959.

(1) A. Marrazzi, in: *Brain mechanisms and drug action.* Ch. C. Thomas, Springfield Ill., 1956.

(2) Le sostanze i cui effetti sul sistema dineuronico transcallosale sono state indagate da Marrazzi, sono: diversi principi attivi tessutali, che verosimilmente intervengono nel processo della formazione, della conduzione e della trasmissione dell'eccitamento (come l'acetilcolina, l'adrenalina, la noradrenalina, l'adrenocromo e la 5-idrossitriptamina); farmaci che influiscono sul metabolismo tessutale dei possibili mediatori (come anticolinesterasici, amide dell'acido lisergico, atropina) ovvero semplicemente dotati di effetti caratteristici sul sistema nervoso (mescalina, amfetamina).

vante che nel Gatto con nevrasse integro il cortisone palesa sull'attività elettrica corticocerebrale, appare sostanzialmente riferibile agli effetti che la sostanza esercita sulla formazione reticolare bulbopontina; d'altra parte l'azione facilitante che in lembi isolati di corteccia il cortisone manifesta sull'attività convulsiva corticocerebrale, dimostra come esso modifichi la reattività dei neuroni corticali anche in modo diretto ossia indipendentemente dai suoi effetti su quelle strutture sottocorticali che controllano l'attività dei neuroni stessi e dalle cui modificazioni funzionali sono apparse di fatto dipendenti le alterazioni elettroencefalografiche prodotte dall'ormone nei preparati in cui siano conservate le connessioni tra la corteccia e le strutture medesime [3].

Abbiamo indagato le risposte della corteccia agli impulsi transcallosali, in Gatti con nevrasse integro e sottoposti a una curarizzazione superficiale.

L'intervento preparatorio consisteva nella introduzione di una cannula nella trachea e nello scollamento dei tessuti pericranici. Si asportava quindi ampiamente il tavolato cranico, in modo da mettere allo scoperto dai due lati gran parte del *gyrus lateralis*, del *suprasylvius* e dell'*ectosylvius*, proteggendo quindi tale aree corticali mediante un sottile strato di olio di vaselina. Al termine dell'intervento, che comprendeva anche l'incannulamento della V. femorale e che era eseguito in anestesia locale associata ad inalazione di etere, gli animali venivano curarizzati superficialmente mediante *d*–tubocurarina ovvero Flaxedil (rispettivamente 0,15 mg/kg e 2,0 mg/kg *pro dose*) e soccorsi con la respirazione artificiale.

Le risposte corticali alla stimolazione transcallosale erano derivate col metodo monopolare, impiegando elettrodi costituiti da sottili fili (0,2 mm) di argento clorurato, montati sopra supporti spostabili nelle diverse direzioni mediante movimenti a cremagliera. L'elettrodo indifferente era costituito da un grosso filo di Ag–AgCl, posto a contatto con la superficie cauterizzata del M. temporale di un lato. Le risposte venivano derivate generalmente dal *gyrus suprasylvius* ed erano provocate da singoli impulsi elettrici rettangolari, della durata di 0,1 msec, forniti da uno stimolatore Grass S4B, provvisto di un dispositivo atto a ridurre l'artefatto della stimolazione (*stimulus isolation unit* costruito dalla stessa ditta costruttrice dello stimolatore). Alla stimolazione si provvedeva con un eccitatore dipolare, i cui elettrodi erano simili a quelli di derivazione (distanza interelettrodica: 2 mm) ed erano posti a contatto col punto omotopico dell'emisfero contralaterale alla sede di derivazione. L'esperimento era iniziato effettuando la stimolazione con valori di voltaggio sottoliminali (abitualmente 4–5 V) e aumentando poi il voltaggio stesso di una unità fino a 15 V: per ogni successivo aumento, gli effetti erano indagati ripetutamente (5–8 volte) avanti di passare al voltaggio successivo. Tra due stimolazioni susseguentisi intercorreva sempre una pausa

(3) P. CREPAX e A. VOLTA, « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., serie VIII, note presentate nella seduta dell'11 aprile 1959.

di 10 sec. I potenziali evocati venivano amplificati da un preamplificatore Grass mod. P4 a resistenza-capacità, rivelati mediante un oscillografo Du Mont mod. 322 A e registrati con un fotochimografo Grass mod. C-4C; l'attività corticale spontanea era in gran parte filtrata. Il cortisone è stato sempre somministrato per via intravenosa, ricorrendo agli accorgimenti riferiti nelle Note precedenti [3].

La risposta della corteccia del *gyrus suprasylvius* destata da un singolo impulso applicato nel punto omotopico dell'emisfero contralaterale, è costituita tipicamente da un'onda difasica, composta da una deflessione iniziale superficie-positiva, della durata di circa 15 msec, e da una seconda oscillazione superficie-negativa della durata di 50-80 msec [Curtis [4]]. Reazioni di aspetto più complesso possono manifestarsi, specie in determinate aree corticali: come ha mostrato Chang [5], la particolare forma della reazione agli impulsi transcallosali, registrata nelle singole aree della corteccia, è infatti determinata dalle proporzioni relative in cui sono rappresentati, nell'area corticale esplorata, gli elementi anatomici che con la loro attivazione partecipano alla risposta stessa [6].

Il cortisone (4-7 mg/kg) provoca modificazioni imponenti e assai costanti della risposta della corteccia a impulsi callosali: mentre il valore degli stimoli soglia diminuisce solo lievemente, l'ampiezza dell'onda superficie-negativa aumenta assai; inoltre, tale onda è seguita da un'oscillazione terminale superficie-positiva, che è in genere scarsamente evidente negli elettrogrammi registrati nell'animale non trattato (fig. 1). La deflessione positiva iniziale palesa sempre modificazioni di scarso rilievo. Le alterazioni elettrografiche ora dette si fanno manifeste 45 min-1 h dopo il trattamento e durano a lungo (fino a 4 h).

Il significato delle diverse componenti della risposta corticale a impulsi transcallosali è stato chiarito dalle ricerche di Curtis e di Chang. L'onda positiva iniziale, che è scarsamente modificata sia dalla stricnina sia dalla novocaina [Chang [5]] corrisponderebbe ai potenziali dendritici destati per via antidromica e agli impulsi presinaptici delle fibre afferenti callosali. La componente negativa è espressione degli impulsi afferenti callosali che raggiungono la superficie corticale, ma soprattutto dei potenziali postsinaptici evocati negli strati superficiali della corteccia dal bombardamento degli impulsi afferenti [7]. Quanto all'onda positiva terminale non abbiamo trovato,

(4) H. J. Curtis, «Amer. J. Physiol», CXXIX, 341 (1940); «J. Neurophysiol.», III, 405 e 414 (1940).

(5) H.-T. Chang, «J. Neurophysiol.», XVI, 117 (1953).

(6) I neuroni i cui assoni ovvero le cui collaterali assoniche contribuiscono alla formazione del corpo calloso, sono situati negli strati profondi della corteccia, specialmente nello strato VI; le terminazioni delle fibre che da essi originano, si distribuiscono principalmente negli strati corticali più superficiali, e cioè I, II e III [cfr. Chang (5)].

(7) La natura prevalentemente somatica della componente negativa ci sembra in accordo con l'azione aumentatrice elettiva che la stricnina esercita su tale componente. Chang (5), che ha documentato brillantemente tale effetto del farmaco e che ha sottolineato come d'altra parte la stricnina non modifichi i potenziali presinaptici [H.-T. Chang a. B. Kaada, «J. Neurophysiol.», XIII, 305 (1950)], riguardo alla genesi della componente negativa dice che

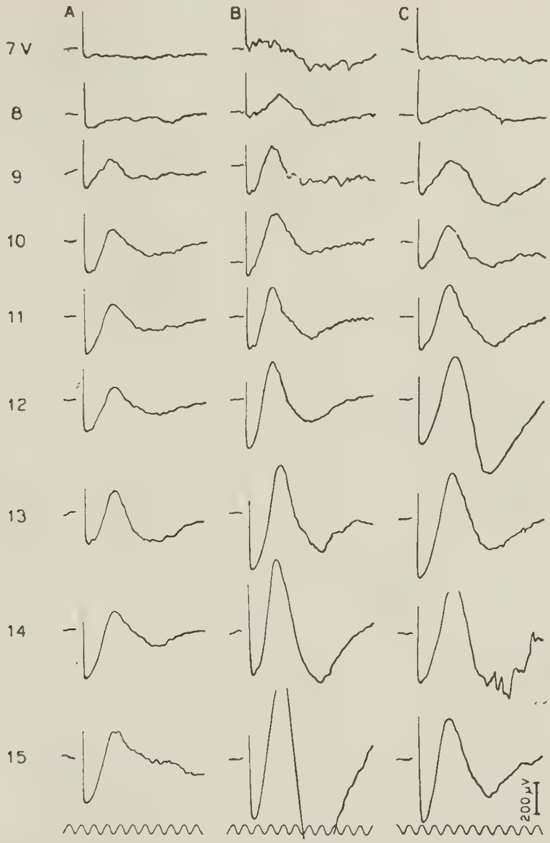


Fig. 1. – Modificazioni delle risposte della corteccia cerebrale a impulsi transcallosali provocate dal cortisone nel Gatto con nevrasse integro.

Animale preparato per le registrazioni in leggiera narcosi eterica associata ad anestesia locale e quindi superficialmente curarizzato (0,15 mg/kg di *d*–tubocurarina); le stimolazioni, della durata di 0,1 msec e del voltaggio corrispondente ai valori indicati a sinistra, erano eseguite sul *gyrus suprasylvius* di destra e le risposte erano registrate dal punto omotopico dell'emisfero contralaterale; la calibrazione riportata in basso a destra è comune a tutti gli elettrogrammi; la frequenza della corrente sinusoidale riportata a piè dei tracciati è di 100 Hz. Le risposte ordinate sotto A sono state ottenute 2 h dopo la fine dell'intervento preparatorio e immediatamente avanti la introduzione di 6 mg/kg di cortisone per via intravenosa; quelle ordinate sotto B e sotto C sono state ottenute rispettivamente 1 h e 1 h e 45 min dopo la somministrazione di cortisone.

nella letteratura concernente le risposte transcallosali, alcun cenno circa al suo significato e al suo meccanismo genetico. Per altro, in molti lavori, anche quando nel testo non è fatto cenno di tale deflessione, la sua frequente presenza è ben documentata dai tracciati. In generale la sua ampiezza varia nello stesso senso di quella dell'onda negativa; il quale fatto può di massima

essa « represents not only the arrival at the cortical surface of impulses from the callosal afferents but also the postsynaptic potentials in the superficial layer of the cortex induced by the bombardment of incoming volleys ». Sul fondamento degli effetti esercitati dalla stricnina sull'onda negativa ci sembra giustificato ammettere, come è detto nel testo, che i potenziali postsinaptici, siano la componente essenziale e non quella accessoria dell'onda stessa.

considerarsi un elemento in favore della possibilità che si tratti di un potenziale postumo positivo delle fibre efferenti. Da un raffronto tra il decorso temporale dei fenomeni e il calibro delle fibre stesse potrebbero scaturire elementi atti ad assodare la fondatezza dell'ipotesi prospettata: si veda la interpretazione che Fadiga, Pupilli e von Berger [8] hanno prospettata della componente lenta terminale delle reazioni elettriche cerebellari.

Gli effetti del cortisone sulla risposta corticale a impulsi transcallosali presentano analogie con quelli della stricnina, la quale manifesta la sua azione aumentatrice esclusivamente sui fenomeni tardivi della reazione elettrica corticale e cioè sull'onda negativa e sull'onda positiva terminale. Quanto al meccanismo di tali effetti, per formulare una risposta fondata occorrerebbe sapere se il sistema reticolare eserciti o no un controllo sulle risposte della corteccia agli impulsi transcallosali.

La risposta primaria della corteccia a stimolazioni periferiche della più diversa natura [Moruzzi e Magoun [9]; Hagbarth e Kerr [10]] è grandemente ridotta per attivazione delle proiezioni ascendenti del sistema reticolare, le quali palesano un'azione soppressoria anche sulle risposte secondarie della corteccia nell'animale cloralosato e, in modo assai costante, sulla scarica postuma che segue queste ultime [9]. È però da notare come le manifestazioni bioelettriche corticali ora considerate importino la partecipazione anche di neuroni estracorticali; l'effetto soppressorio che sulle manifestazioni stesse esercita l'attivazione reticolare, non ha quindi un significato patente rispetto al livello d'integrazione interessato, giacché l'effetto stesso potrebbe ricollegarsi anche o prevalentemente con un'azione esercitata in modo diretto su neuroni estracorticali (per esempio, su quelli talamici o sui neuroni sensitivi di secondo ordine). Esempi sicuri di azioni dirette del sistema reticolare ascendenti sui neuroni corticali scarseggiano: Desmet e La Grutta [11] trovano che la stimolazione reticolare provoca una diminuzione dell'ampiezza delle risposte primarie corticali destate mediante singoli impulsi applicati al corpo genicolato mediale; ma secondo Hagbarth e Kerr [10] la stimolazione reticolare, mentre influenza nettamente le risposte ad aumento provocate mediante la stimolazione a bassa cadenza dei nuclei talamici con proiezione specifica, sarebbero tipicamente senza effetto sulle risposte corticali evocate mediante stimoli elettrici isolati applicati negli stessi nuclei.

Le risposte corticali a impulsi transcallosali non implicano necessariamente l'intervento di strutture sottocorticali; d'altra parte, non sono note reazioni corticali, sulle quali il sistema reticolare ascendente eserciti azione aumentatrice. Appare quindi fondato ritenere che le modificazioni delle reazioni elettriche della corteccia a impulsi transcallosali provocate dal cortisone siano dovute a un'azione diretta dell'ormone sugli elementi reattivi.

(8) E. Fadiga, G. C. Pupilli e G. P. von Berger, « Arch. Sci. biol. », XL, 541 (1956).
(9) G. Moruzzi a. H. V. Magoun, « EEG clin. Neurophysiol. », I, 455 (1949).
(10) K. E. Hagbarth a. D. I. B. Kerr, « J. Neurophysiol. », XVII, 295 (1954).
(11) J. E. Desmedt a. G. La Grutta, « J. Physiol. », CXXXVI, 20 (1957).

Fisiologia. — *Effetti del Fattore I e dell'acido γ-aminobutirrico sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto* [*]. Nota [**] di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata dal Socio G. C. PUPILLI.

Negli estratti di cervello e di midollo spinale di Mammifero è presente una sostanza, che Florey [1,2,3] ha denominata Fattore I per richiamare gli effetti essenzialmente inibitori che esssa manifesta in quei sostrati biologici, rispetto ai quali la sua azione è stata dapprincipio indagata. Poi si è visto come il principio attivo palesi su altri sostrati azioni di tipo eccitatorio.

Una classificazione provvisoria degli effetti del Fattore I può al presente formularsi nel modo seguente. 1° Effetti inibitori si fanno per azione di tale principio manifesti nei tensocettori muscolari, nel cuore, nell'intestino e nelle giunzioni neuromuscolari di Crostacei [3,4]; una inibizione si osserva anche nei movimenti spontanei dell'intestino di Coniglio, nei fenomeni di trasmissione sinaptica a livello di alcuni gangli vegetativi e nei riflessi spinali monosinaptici [5] di Gatto. 2° Effetti eccitatori, dovuti a tale fattore, compaiono nell'intestino retto di Cefalopodo, nel nucleo del N. ipoglosso di Gatto e sui riflessi polisinaptici della stessa specie [5]. 3° Il Fattore I palesa proprietà antiacetilcoliniche, dimostrandosi capace di ostacolare nei tensocettori di Crostacei e nell'intestino sia di Crostacei sia di Mammiferi gli effetti eccitatori dell'acetilcolina [3]; un caso particolare di antagonismo è quello manifestato nell'intestino di Cefalopodo, il pretrattamento del preparato con acetilcolina impedendo l'azione stimolante del Fattore I [4]. 4° Il Fattore I può imitare sia gli effetti di tipo eccitatorio (nucleo del N. ipoglosso di Gatto), sia quelli di tipo inibitorio (cuore di Cefalopodo) dell'acetilcolina [4]. 5° Un antagonismo tra Fattore I e stricnina si manifesta nel caso dei riflessi spinali monosinaptici, dosi subconvulsivanti di stricnina ostacolando l'azione inibitoria che il Fattore I esercita su tali riflessi, inoltre il Fattore I protegge il Topo dall'azione letale della stricnina [5].

Bazemore, Elliot e Florey [6] hanno fatto noto come gli estratti di tessuto nervoso che palesano gli effetti inibitori propri del Fattore I, conten-

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna. Dei due AA. della Nota, P. Crepax è direttore dell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Urbino, F. Infantellina è direttore dell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Catania; entrambi sono ricercatori presso la Sezione di Bologna del Centro di Neurofisiologia istituito dal CNR.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1959.

(1) E. FLOREY, «Naturwissenschft.», XL, 295 (1953).

(2) E. FLOREY, «Z. vergl. Physiol.» XXXVI, 1 (1954).

(3) E. FLOREY, «Arch. internat. Physiol.», LXII, 33 (1954).

(4) E. FLOREY, «Can. J. Biochem. Physiol.», XXXIV, 669 (1956).

(5) E. FLOREY a. H. MCLENNAN, «J. Physiol.», CXXX, 446 (1955).

(6) A. BAZEMORE, K. A. C. ELLIOT a. E. FLOREY, «Nature», CLXXVII, 1052 (1956).

gano acido γ–aminobutirrico e come le quantità di tale sostanza presenti negli estratti stessi rendano ragione, in linea di massima, del potere inibitore che essi manifestano. Tuttavia, le proprietà biologiche del Fattore I corrispondono a quelle dell'acido γ–aminobutirrico solo rispetto ad alcuni sostrati [McLennan (7), Brockman e Rurson (8), Eliot, Kaji, Seeman, Ubell, Kuffler e Burgen (9)].

Con le ricerche di cui riferiamo nella presente Nota abbiamo indagato con criteri comparativi gli effetti dell'acido γ–aminobutirrico e quelli del Fattore I sulla corteccia cerebrale isolata di Gatto. La tecnica seguita per l'allestimento del preparato di *slab* [Burns (10), Burns e Grafstein (11)] è quella medesima in uso in questo Laboratorio e descritta in una precedente pubblicazione [Infantellina (12)]. I potenziali elettrici corticali erano derivati con metodo monopolare, mediante una micropipetta riempita di soluzione di NaCl al 0,9 °/₀, la cui estremità aveva un diametro di 50–100 μ e la cui resistenza variava tra 0,2 e 2 MΩ; l'elettrodo indifferente, una piccola sfera di Ag–AgCl, veniva posta su una zona di corteccia necrotizzata (mediante elettrocoagulazione) a 1 cm circa dall'elettrodo critico. La coppia di eletrodi di derivazione era collegata con un *cathode follower* e con un preamplificatore ad accoppiamento diretto (mod. Tönnies), le cui uscite andavano direttamente alle placche di deviazione del tubo catodico dell'oscillografo (Du Mont 322); si registrava mediante un fotochimografo Grass. Per la stimolazione del preparato ci siamo serviti di uno stimolatore Grass mod. S4: ciascun impulso era costituito da un'onda rettangolare della durata di 0,5 msec. Gli elettrodi erano fili di platino del diametro di 20–30 μ. Le soluzioni contenenti il Fattore I (fornitoci molto cortesemente dal prof. E. Florey, al quale rinnoviamo qui i più vivi ringraziamenti) e quelle di acido γ–aminobutirrico venivano applicate localmente sul lembo, utilizzando dischetti di carta da filtro del diametro di 5 mm contenenti la sostanza in esame. La quantità di Fattore I absorbita in ciascun dischetto e solubilizzata al momento del trattamento mediante una soluzione di NaCl al 0,9 °/₀ è di 0,0035 B.E., essendo 1 B.E., (*brain equivalent*) la quantità di Fattore I contenuta normalmente in 1 g di cervello fresco di Bue [Florey e McLennan (5)]. Per l'applicazione locale dell'acido γ–aminobutirrico, abbiamo adoperato soluzioni all'1 °/₀ dell'aminoacido in liquido di Tyrode. Il trattamento locale, mantenuto per 4–10 min, era effettuato nel tratto di corteccia interposto tra gli elettrodi di stimolazione e quello attivo di derivazione.

(7) H. McLennan, « J. Physiol. », CXXXIX, 79 (1957).

(8) J. A. Brockman Jr. a. S. L. Rurson Jr., « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », XCIV, 450 (1957).

(9) C. R. Eliot, A. Kaji, P. Seeman, E. Ubell, S. W. Kuffler a. A. S. Burgen, « Biol. Bull. », CXIII, 344 (1957).

(10) B. D. Burns, « J. Physiol. », CXII, 156 (1951).

(11) B. D. Burns a. B. Grafstein, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(12) F. Infantellina, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955).

I risultati ottenuti sono i seguenti.

1° Nel 40 % dei casi i preparati di *slab* presentano un'attività ritmica (fig. 1 A; 2 A), la quale è costituita da scariche di onde che insorgono in modo spontaneo e che di continuo si rinnovano con una frequenza di 0,5–0,2 Hz. Ciascuna scarica, della durata di 0,5–4 sec, è formata da numerose piccole onde difasiche (μV 25–350) aventi la frequenza media di 65 Hz e inscritte su una deflessione positiva (μV 360–1300). Per effetto del trattamento locale con Fattore I (0,007–0,02 B.E.), la durata delle singole scariche e specialmente l'ampiezza della deflessione positiva e quella delle piccole onde difasiche, sono ridotte (fig. 1 C). Se il trattamento con Fattore I è prolungato (15 min) ovvero viene ripetuto più volte, l'attività ritmica del lembo scompare

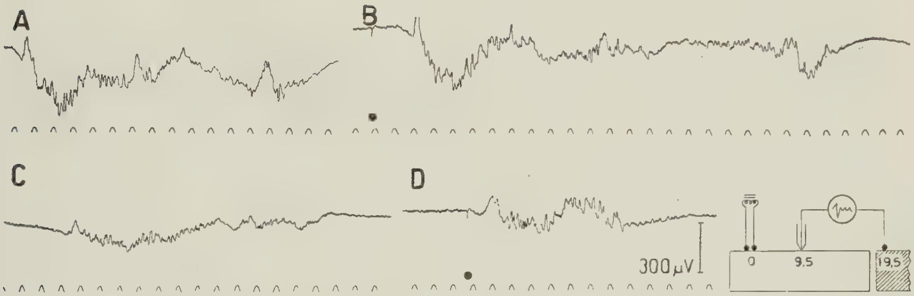


Fig. 1. – Modificazioni prodotte dal Fattore I dell'attività elettrica spontanea e della risposta a singoli stimoli elettrici nel lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto.

La stimolazione elettrica è indicata con un cerchio pieno. In questa figura come in tutte le successive la deflessione del tracciato verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Lo schema disegnato a destra e in basso indica la posizione degli elettrodi di stimolazione e di quelli di derivazione e i valori in millimetri delle rispettive distanze; la parte tratteggiata corrisponde alla zona di corteccia elettrocoagulata. Tempo = 0,1 sec. La taratura affiancata al grafico D vale anche per tutti i precedenti. Tra B e C il lembo è stato trattato per 16 min con Fattore I (0,007 B. E.).

A e B, prima del trattamento: attività spontanea e risposta a uno stimolo di voltaggio liminale. C, 5 min dopo l'inizio del trattamento con Fattore I: attività manifestatasi senza l'applicazione di stimoli elettrici. D, 10 min dopo C: il valore della soglia è del 13 % superiore a quello determinato in B.

del tutto. Il trattamento locale con acido γ-aminobutirrico, che non provoca la comparsa di attività ritmica in lembi che ne sono inizialmente privi, accresce notevolmente la durata delle singole scariche e l'ampiezza della deflessione positiva (fig. 2 B): l'aumento della durata delle scariche è dovuto al fatto che quando l'onda superficie-positiva sta per estinguersi, compare una nuova deflessione positiva. L'ampiezza e la frequenza delle piccole onde difasiche inscritte sulla deflessione positiva e la frequenza con la quale compaiono le singole deflessioni positive, non sono sostanzialmente modificate.

2) La stimolazione mediante impulsi elettrici isolati, di un voltaggio pari a 1–2 V, provoca nel lembo la comparsa di un'onda superficie-negativa (μV 50–750) della durata di 10–30 msec, che rappresenta la risposta degli elementi nervosi degli strati superficiali della corteccia cerebrale. Per voltaggi più elevati, l'eccitazione si propaga agli strati corticali profondi e l'onda superficie-negativa è allora seguita da un'ampia deflessione positiva, sulla quale sono

inscritte numerose piccole onde difasiche (fig. 1 B e 3 A): l'ampiezza e la durata dell'onda superficie–positiva, l'ampiezza e la frequenza delle onde difasiche sono all'incirca eguali a quelle delle analoghe onde che si osservano nelle scariche ritmiche del lembo. Quando la distanza tra punto stimolato e area di derivazione supera i 5–10 mm, l'onda superficie–negativa manca e la risposta del preparato s'inizia con la deflessione positiva. L'applicazione locale di Fattore I (0,007–0,02 B.E.) provoca una diminuzione dell'eccitabilità del lembo e una modificazione notevole delle caratteristiche della risposta del preparato allo stimolo elettrico singolo (fig. 1 D). Il valore dei voltaggi liminali della risposta aumenta (del 15 %, in media) rispetto a quello del preparato non trattato. La variazione è costante ed è sempre accompagnata da diminuzione

Fig. 2. – Modificazioni prodotte dall'acido γ–aminobutirrico dell'attività elettrica spontanea manifesta nel lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 4 min con una soluzione di acido γ–aminobutirrico all'1 %. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della fig. 1.

A: attività spontanea avanti il trattamento. B: 1 min dopo la fine del trattamento: attività insorta in modo apparentemente spontaneo.

sia della durata complessiva della risposta sia dell'ampiezza delle oscillazioni (superficie–negativa, superficie–positiva, difasiche) che la compongono. Per effetto del trattamento con acido γ–aminobutirrico, il valore dei voltaggi liminali della risposta al singolo stimolo, rispetto a quello determinato prima della applicazione della sostanza, è diminuito (del 15 %, in media). L'onda superficie–negativa con cui s'inizia la risposta, quando la distanza tra la coppia di elettrodi di stimolazione e l'elettrodo di derivazione è inferiore a 5–10 mm, scompare dopo il trattamento con acido γ–aminobutirrico (fig. 3 B): l'effetto risulta costante, la scomparsa e la ricomparsa della risposta superficiale essendo graduali. L'ampiezza e la durata della deflessione positiva della risposta del lembo al singolo impulso elettrico sono, dopo trattamento con acido γ–aminobutirrico, aumentate; costante e notevole (del 200–300 %, in media) è l'aumento dell'ampiezza, meno costante e verosimilmente dovuto al formarsi di nuove deflessioni positive appare invece quello della durata. Le modificazioni delle caratteristiche della risposta profonda si svolgono contemporaneamente a quelle dell'onda superficiale.

3° La stimolazione iterativa per la durata di 5 sec, effettuata con impulsi elettrici (0,5 msec) susseguentisi alla cadenza di 50–120 Hz e di tensione pari a 1,5–2 volte quella liminale, di norma provoca nel lembo privo di attività spontanea la comparsa di una o poche scariche di onde, nel corso stesso della stimolazione e talora nei primi 1–3 sec che seguono il suo cessare; solo nel 30 % dei casi si palesa invece un'attività pulsatoria, che può durare fino a 30 sec. Il trattamento con Fattore I (0,01–0,02 B.E.) non influenza sostanzialmente la forma dell'attività ritmica provocata nel lembo dalla stimolazione iterativa; si osserva però nella maggior parte dei casi una modica diminuzione della durata dell'attività medesima e uno scarso appiattimento delle onde costituenti le singole scariche. Per effetto del trattamento del

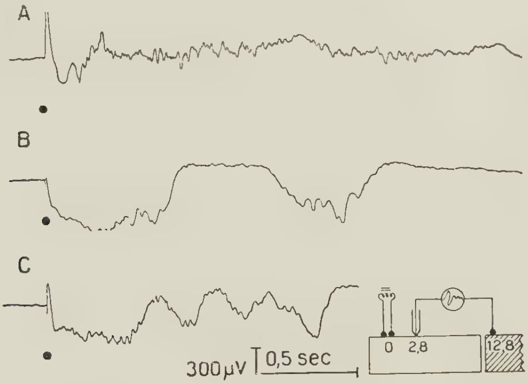


Fig. 3. – Modificazioni prodotte dall'acido γ–aminobutirrico della risposta a singoli stimoli elettrici del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto.

Tra A e B il preparato è stato trattato per 5 min con una soluzione all'1 % di acido γ-aminobutirrico. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della fig. 1.

A, risposta a uno stimolo di voltaggio liminale avanti il trattamento. B, 9 min dopo l'inizio del trattamento: il valore della soglia è del 10 % inferiore a quello determinato in A. C, 25 min dopo l'inizio del trattamento: il valore della soglia è uguale a quello determinato in A.

lembo con acido γ–aminobutirrico si ha una lieve riduzione della durata e dell'ampiezza delle onde della risposta del lembo alla stimolazione iterativa. Nei preparati su cui ha agito l'aminoacido, si fa inoltre palese una caratteristica modificazione della morfologia delle onde: nei lembi normali la risposta alla stimolazione iterativa è infatti formata prevalentemente o esclusivamente da onde superficie–negative, mentre dopo applicazione di acido γ–aminobutirrico si osserva la inversione della polarità di tali onde (fig. 4 B).

Come abbiamo detto nelle premesse, con le presenti indagini abbiamo esaminato comparativamente gli effetti del Fattore I e dell'acido γ–aminobutirrico sui fenomeni elettrici del preparato di *slab* corticocerebrale di Gatto. I risultati da noi ottenuti provano innanzi tutto come gli effetti provocati sul preparato dalle due sostanze non siano i medesimi. Infatti, il Fattore I

esercita, in generale, un'azione inibitrice su tutte quelle forme di attività spontanea o provocata del lembo isolato di corteccia cerebrale che abbiamo prese in esame, mentre dopo il trattamento del lembo stesso con acido γ–aminobutirrico si osservano effetti più complessi, d'inibizione ovvero di facilitazione, sui diversi fenomeni elettrici del preparato.

L'analisi delle modificazioni che il Fattore I e l'acido γ–aminobutirrico provocano nella risposta del preparato di *slab* al singolo impulso elettrico, permette inoltre di stabilire che la sede d'azione delle due sostanze, è diversa. Occorre aver presente che l'onda superficie–negativa è il potenziale post–sinaptico generato nei dendriti apicali delle cellule piramidali, i quali si espandono nello strato molecolare della corteccia; all'opposto, la deflessione posi-

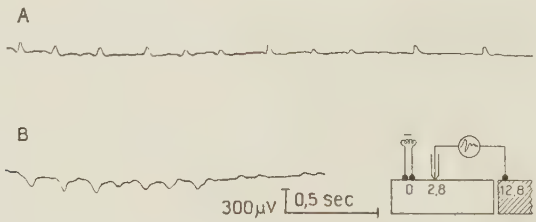


Fig. 4. – Modificazioni prodotte dall'acido γ–aminobutirrico della risposta alla stimolazione iterativa del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto.

Tra A e B il preparato è stato trattato per 5 min con una soluzione di acido γ–aminobutirrico all'1 %. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della fig. 1.

A, registrazione iniziata 0,5 sec dopo la fine di una stimolazione iterativa (0,5 msec; 12 V; 120 Hz; 5 sec). B, 10 min dopo l'inizio del trattamento con acido γ–aminobutirrico: registrazione iniziata 0,5 sec dopo la fine di una stimolazione avente le medesime caratteristiche di quella effettuata in A.

tiva e la scarica asincrona che l'accompagna, sono fenomeni elettrici riferibili all'attività dei neuroni degli strati profondi della corteccia [cfr. Eccles [13]].

Dai fatti esposti risulta quindi evidente che l'azione inibitrice del Fattore I si esercita sui neuroni sia degli strati superficiali sia di quelli profondi della corteccia cerebrale. Per quanto si riferisce alla più complessa azione dell'acido γ–aminobutirrico, che determina effetti d'inibizione e di facilitazione, si può innanzi tutto affermare che la sostanza agisce sullo strato molecolare della corteccia cerebrale: la rapida scomparsa dell'onda superficie–negativa della risposta del lembo al singolo impulso elettrico è senza dubbio dovuta all'azione inibitrice che la sostanza esercita sul processo di attivazione del dendrita apicale delle cellule piramidali. Degli altri effetti che l'aminoacido determina sull'attività elettrica del preparato di *slab*, è possibile dare una spiegazione sul fondamento dell'azione inibitrice esercitata dalla sostanza sul potenziale dendritico; il che viene chiarito dalle considerazioni seguenti.

(13) J. C. Eccles, «EEG clin. Neurophysiol.», III, 449 (1951).

Com'è noto, le azioni sinaptiche sono di due tipi, eccitatorie ed inibitorie [cfr. Eccles [14]]: l'onda superficie–negativa della risposta corticocerebrale è appunto il potenziale post–sinaptico eccitatorio del dendrita apicale delle cellule piramidali [cfr. Purpura e Grundfest [15]]. L'analisi delle interazioni tra le vie afferenti corticipete provviste di terminazioni paradendritiche e quelle con terminazioni pericorpuscolari, ha dimostrato che l'attivazione del dendrita apicale importa modificazioni dell'eccitabilità dei neuroni corticali mediante effetti di facilitazione ovvero d'inibizione sulla trasmissione dell'eccitamento nei circuiti neuronici specifici [Chang [16]]. Il fatto da noi osservato che per effetto dell'acido γ–aminobutirrico, contemporaneamente alla scomparsa dell'onda superficiale si ha un aumento della risposta profonda, sembra indicare che l'attivazione dendritica, effettuata mediante impulsi elettrici applicati sulla superficie della corteccia cerebrale, importi nel preparato di *slab* una inibizione dell'attività profonda. Ciò sarebbe avvalorato dal fatto che nella corteccia cerebrale integra, in cui i dendriti sono sottoposti all'azione tonica dei centri sottocorticali, la risposta dei neuroni degli strati profondi agli stimoli applicati sulla superficie corticale appare solo dopo stimolazione iterativa [Adrian [17], Jung e Tönnies [18], Bonnet e Bremer [19]], mentre nel lembo isolato, in cui sono assenti le influenze sottocorticali, l'onda superficie–positiva compare per effetto di un solo stimolo elettrico. A tale proposito appare suggestivo il fatto che nella corteccia integra la comparsa della risposta profonda, per effetto della stimolazione iterativa applicata sulla superficie della corteccia, è sempre preceduta dalla scomparsa dell'onda superficie–negativa [17,18,19].

Tale processo di facilitazione della reattività dei cumuli neuronici degli strati corticali profondi, determinato dal trattamento del preparato con acido γ–aminobutirrico, è rivelato anche dall'abbassamento della soglia della risposta del lembo. E dell'aumento dell'attività ritmica da noi riscontrato nel lembo trattato con l'aminoacido ci si rende ragione, se si considera che attività è di regola costituita da scariche di onde in tutto simili alle risposte profonde del preparato al singolo impulso elettrico. L'inversione della polarità delle onde osservata in alcuni casi di risposte del lembo alla stimolazione iterativa, si deve ritenere come la conseguenza della scomparsa delle onde superficie–negative, scomparsa che importa appunto un processo di facilitazione della reattività dei neuroni degli strati profondi della corteccia.

(14) J. C. Eccles, *The physiology of nerve cells*. Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1957.

(15) D. P. Purpura a. H. H. Grundfest, « J. Neurophysiol. », XIX, 573 (1956).

(16) H. T. Chang, « Symp. quant. Biol. Cold Spring Harbor », XVII, 189 (1952).

(17) E. D. Adrian, « J. Physiol. », LXXXVIII, 127 (1936).

(18) R. Jung u. J. F. Tönnies, « Arch. Psychol. Z. Neurol. », CLXXXV, 701 (1950).

(19) V. Bonnet et F. Bremer, « J. Physiologie », XLVIII, 399 (1956).

Fisiologia. — *Influenza diretta del fascio piramidale sui nuclei di Goll e di Burdach* (*). Nota (**) di FRANCO MAGNI, RONALD MELZACK (***), GIUSEPPE MORUZZI e CHARLES JAMES SMITH (****), presentata dal Corrisp G. MORUZZI.

Le presenti ricerche s'inseriscono nel tema più vasto della regolazione centrale dell'afflusso degli impulsi sensitivi e sensoriali al cervello [cfr. Granit [1]]. Esse sono rivolte allo studio delle influenze corticifughe sui nuclei *gracilis* e *cuneatus*. Il problema è controverso. Secondo Hernández-Peón e coll. [2] queste azioni sono mediate dalla sostanza reticolare del tronco dell'encefalo, mentre osservazioni anatomiche recenti [Chambers e Liu [3]; Walberg [4]; Kuypers [5,6]] dimostrano concordemente che fibre piramidali terminano nei nuclei di Goll e di Burdach.

METODI.

Le presenti ricerche sono state eseguite su 50 Gatti adulti in cui con metodo stereotassico, ed in narcosi da etere, era stata praticata una lesione elettrolitica del mesencefalo a livello postcolliculare, in modo da risparmiare il *pes pedunculi*. Il cervello di questo preparato «piramidale» [cfr. Whitlock, Arduini e Moruzzi [7]] era dunque collegato alle parti più caudali del nevrasse attraverso le vie corticospinali.

Stimolatori Tektronics permettevano d'applicare, con qualsiasi intervallo di tempo, un impulso rettangolare (0,1 msec) al nervo radiale ed un treno di 5 impulsi (0,2 msec; 300–500/sec) al fascio piramidale, mediante

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della Università di Pisa e nel Centro di Neurofisiologia del C.N.R., sezione di Pisa, col sussidio dell'Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite l'Ufficio Europeo e con contratto No. AF 61 (052)–107, e della Rockefeller Foundation.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1959.

(***) Borsa di studio della Dazian Foundation for Medical Research. Indirizzo attuale: Psychology Section, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Mass.), U.S.A.

(****) Borsa di studio Fullbright. Indirizzo attuale: Psychology Department, University of Michigan, Ann Arbor (Mich.), U.S.A.

(1) R. GRANIT, *Receptors and sensory perception*. New Haven, Yale University Press, 1955.

(2) R. HERNÁNDEZ-PEÓN, H. SCHERRER a. M. VELASCO, «Acta neurol. latinoamer.», II, 8 (1956).

(3) W. W. CHAMBERS a. C. C. LIU, «J. comp. Neurol.», CVIII, 26 (1957).

(4) F. WALBERG, «Brain», LXXX, 273 (1957).

(5) H. G. J. M. KUYPERS, «J. Anat.», XCII, 198 (1958).

(6) H. G. J. M. KUYPERS, «Brain», LXXXI, 364 (1958).

(7) D. G. WHITLOCK, A. ARDUINI a. G. MORUZZI, «J. Neurophysiol», XVI, 414 (1953).

elettrodi concentrici inseriti rostralmente alla lesione nella capsula interna o nel *pes pedunculi*. Le risposte dei nuclei di Goll e di Burdach venivano derivate dalla sovrastante superficie del bulbo mediante elettrodi a pallina d'argento; o dai nuclei stessi, grazie ad elettrodi isolati ad ago (diametro della punta: 50 μ) introdotti con un micromanipolatore fissato all'apparecchio stereotassico. La registrazione, in oscillografia catodica, veniva fatta con metodo unipolare, attraverso amplificatori a resistenza–capacità.

Alla fine dell'esperimento la lesione ed i punti di stimulazione e di registrazione venivano controllati su sezioni seriate colorate con i metodi di Nissl e di Weil.

RISULTATI.

A. *La risposta dei nuclei di Goll e di Burdach alla stimolazione del pes pedunculi.* – La stimolazione del fascio piramidale con 5 impulsi rettangolari, d'elevata cadenza e di voltaggio soglia per ottenere una risposta motrice, produce una oscillazione superficie–negativa sull'area della midolla allungata che sovrasta i nuclei di Goll e di Burdach, seguita da un'oscillazione superficie–positiva di minore ampiezza. La risposta è bilaterale, ma assai più accentuata in corrispondenza del lato opposto. I suoi limiti rostrali sono netti e corrispondono al polo superiore dei nuclei gracili e cuneato. Solo sul pavimento del quarto ventricolo la risposta allo stimolo piramidale non scompare, ma si converte in un'ampia oscillazione di potenziale superficie–positiva, che probabilmente ha origine nella sottostante sostanza reticolare. L'ampiezza del potenziale evocato decresce bruscamente in corrispondenza del polo caudale dei nuclei di Goll e Burdach, ma però non scompare del tutto al disotto di queste formazioni. Una lieve oscillazione superficie–negativa può essere registrata, a livello dei primi segmenti cervicali, in corrispondenza dei cordoni posteriori. Quest'ultima risposta corrisponde probabilmente ai potenziali di Lindblom e Ottoson [8], il cui significato esula dall'argomento della presente Nota.

B. *Origine piramidale della risposta.* – Non v'è dubbio che i cinque impulsi rettangolari producono una risposta in quanto stimolano il fascio piramidale. Infatti la risposta scompare 1° se si solleva l'elettrodo stimolante di soli 2 mm, o 2° se si seziona caudamente il fascio piramidale in corrispondenza della superficie ventrale del bulbo, ipsilateralmente al punto stimolato. Poiché la lesione mesencefalica spesso risparmiava, oltre al *pes pedunculi*, anche la *substantia nigra* e parte del lemnisco mediale, è opportuno prendere in esame l'obbiezione che la stimolazione (per diffusione di corrente) di fibre lemniscali potrebbe determinare l'attivazione antidromica dei neuroni di Goll e Burdach. Questa obbiezione è resa assai poco verosi-

(8) U. F. LINDBLOM a. J. O. OTTOSON, «Acta physiol. scand.», XXXVIII, 309 (1957).

mile dalle osservazioni più sopra riportate, sopratutto se si tiene presente che i controlli istologici dimostrarono che il lemnisco mediale era stato risparmiato in tutti i nostri esperimenti di piramidotomia bulbare. Esperimenti di controllo appositamente dedicati a questo argomento hanno dimostrato inoltre 1° che identiche risposte si ottengono stimolando il fascio piramidale in corrispondenza della capsula interna, assai lontano dal lemnisco mediale, e 2° che un'estesa distruzione del lemnisco mediale a livello mesencefalico non riduce l'ampiezza della risposta evocata dalla stimolazione del *pes pedunculi*, rostralmente a tale lesione.

È dunque certo che la risposta è dovuta a stimolazione del fascio piramidale e quindi delle fibre cortico-spinali che ne costituiscono l'enorme maggioranza. Appare estremamente improbabile che l'effetto da noi studiato sia dovuto a stimolazione antidromica delle fibre ascendenti descritte da Brodal e Walberg [(9)], che rappresentano solo il 4 °/₀ delle fibre piramidali, terminano in gran parte nel ponte e non sono in prevalenza crociate.

C. *La risposta non è legata a mediazione reticolare.* – Se si seziona una piramide in corrispondenza della superficie ventrale del bulbo, subito al di sopra della *decussatio pyramidum*, scompare del tutto il potenziale evocato in corrispondenza dei nuclei di Goll e di Burdach, malgrado la stimolazione piramidale provochi ancora un'ampia risposta in corrispondenza della sostanza reticolare mediale del bulbo. Questo esperimento non permette ovviamente d'escludere che la sostanza reticolare possa esercitare, in altre condizioni sperimentali, un'influenza sui nuclei di Goll e Burdach, ma dimostra con certezza che una mediazione reticolare non è essenziale alla comparsa delle risposte da noi prese in esame.

La brevità dei tempi di latenza e la persistenza delle risposte dopo curarizzazione dimostrano infine che gli impulsi piramidali arrivano direttamente ai nuclei di Goll e di Burdach, senza l'intervento di altri meccanismi, spinali o periferici (fusi neuro-muscolari).

D. *La risposta postsinaptica dei neuroni di Goll e Burdach agli impulsi piramidali e sensitivi.* – L'oscillazione di potenziale superficie-negativa è l'espressione d'una risposta post-sinaptica dei neuroni di Goll e Burdach. Essa è infatti ampliata dall'applicazione locale di soluzioni diluite di nitrato di stricnina (0,1 °/₀) ed è assai meno resistente all'asfissia della risposta che si registra in corrispondenza delle vie cortico-spinali, a livello dei primi segmenti cervicali. È noto da tempo che anche l'oscillazione superficie-negativa prodotta dalla stimolazione d'un nervo sensitivo è espressione d'attività postsinaptica. Quest'ultima però è assai più ampia, il che fa pensare che molte unità attivate da impulsi sensitivi non rispondano alle scariche piramidali.

Questa deduzione è confermata dallo studio del rovesciamento del potenziale negativo che si ottiene approfondendo in direzione dorso-ventrale un

(9) A. BRODAL a. F. WALBERG, «A. M. A. Arch. Neurol. Psychiat.», LX, 755 (1952).

elettrodo focale. I controlli istologici dimostrano che entrambi i potenziali si rovesciano entro il nucleo cuneato, ma a differenti livelli, a riprova che i neuroni responsabili dei due tipi di risposta non hanno identica localizzazione. Anche l'applicazione di stimoli sensitivi e piramidali a diversi intervalli di tempo dimostra una parziale interferenza occlusiva, a conferma delle conclusioni a cui Dawson [10] è giunto per il ratto.

CONCLUSIONI.

Le presenti ricerche dimostrano che impulsi corticospinali 1° arrivano ai nuclei di Goll e Burdach direttamente, in particolare senza che sia necessaria una mediazione reticolare e 2° che ivi producono una risposta postsinaptica che interessa verosimilmente un numero minore di neuroni di quella prodotta da impulsi sensitivi, ma che con essa parzialmente si embrica.

Questa osservazione ed altre eseguite su altri sistemi sensitivi [Desmedt e Mechelse [11, 12]; Mancia, Meulders e Santibañez [13, 14]] suggeriscono che la sostanza reticolare del tronco dell'encefalo non abbia l'importanza che le è stata attribuita da Hernández-Peón e coll. [2] nella regolazione dell'afflusso d'impulsi centripeti al cervello.

(10) G. D. DAWSON, « J. Physiol. », CXLII, 2P (1958).
(11) J. E. DESMEDT et K. MECHELSE, « C. R. Soc. Biol. Paris », CLI, 2209 (1957).
(12) J. E. DESMEDT a. K. MECHELSE, « Proc. Soc. exp. Biol. N. Y. », XCIX, 772 (1958.
(13) M. MANCIA, M. MEULDERS a. G. SANTIBAÑEZ, « Experientia » (in stampa).
(14) M. MANCIA, M. MEULDERS a. G. SANTIBAÑEZ, « Arch. ital. Biol. » (in stampa).

Biologia. — *Frequenza dei quadri della sostanza basofila nei neuroni di Purkinje durante il ciclo vitale di Uccelli* [(*)]. Nota [(**)] di GIORGIO M. BAFFONI e di ANNA MARIA D'ANCONA, presentata dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In una Nota, presentata a questa Accademia nella seduta del mese di giugno [(1)], sono state motivate le ragioni che ci hanno spinto all'esame delle cellule di Purkinje della corteccia cerebellare in adulti di un Uccello a prole inetta (Piccione) e di uno a prole precoce (Pollo); in tale Nota ci ripromettevamo di precisare i risultati sulle variazioni di frequenza dei quadri della sostanza basofila in individui di diversa età, dal termine della morfogenesi cerebellare alla senescenza.

Nella presente Nota riferiremo i risultati dell'esame di preparati di cervelletti, fissati in Helly ed in Carnoy, o in Sanfelice, e sezionati in serie lungo il piano sagittale; i preparati fissati in Helly sono stati trattati con il metodo di Nissl al bleu di toluidina (alla concentrazione di 10^{-4} in buffer citrato–soda a pH 6) e quelli fissati in Carnoy o in Sanfelice sono stati trattati secondo il metodo di Feulgen, seguendo le indicazioni di Stowell [(2)]; nella Tabella e nella fig. 1 sono state espresse le frequenze dei quadri della sostanza basofila ricavate dalla lettura di una media di 4.200 cellule per ogni individuo preso in considerazione.

È noto che l'aspetto della sostanza basofila (zolle di tigroide o di Nissl) nella generalità delle cellule nervose è costante e tipico per le diverse forme di neuroni, però in alcune zone del neurasse, ed in particolare nel cervelletto [(3)], esso è molto vario. Da tempo i quadri della sostanza basofila sono stati impiegati per la diagnosi dell'attività funzionale della cellula nervosa [(4)]; più di recente è stato dimostrato che la basofilia delle formazioni tigroidi è dovuta ad accumulo di pentosonucleotidi [(5)], nucleoproteidi contenenti RNA i quali, con un meccanismo tuttora oscuro, presiedono alla sintesi delle proteine [(6)]. Alcuni quadri della sostanza basofila, però, sono discussi; ci

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 giugno 1959.

(1) G. M. BAFFONI e A. M. D'ANCONA, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), *26*, 811 (1959).

(2) R. E. STOWELL, «Stain Technol.», *20*, 45 (1945).

(3) P. VAN DURME, «Le Nevraxe», *2*, 115 (1901); J. J. SHEININ, «Anat. Rec.», *52*, 83 (1932).

(4) Ved.: G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), *10*, 319 (1951).

(5) T. CASPERSSON, H. LANDSTRÖM e G. WOHLFART, «Zeischr. mikr. Anat. Forch.», *49*, 534 (1941); J. BRACHET, «Arch. de Biol.», *53*, 207 (1942).

(6) H. HYDÉN, «Acta Physiol. Scand.», *6*, Suppl. XVII (1943); T. CASPERSSON, *Cell growth and cell function* (New York 1950).

riferiamo ai quadri d'intensa basofilia, i quali sono stati spesso osservati tra le cellule di Purkinje della corteccia cerebellare: essi secondo alcuni Autori vanno ritenuti espressione dell'attività fisiologica del neurone (7), ma secondo altri vanno interpretati come quadri d'involuzione o comunque di sofferenza della cellula (8). Le osservazioni sulle cellule di Purkinje intensamente basofile sono state finora compiute in Mammiferi e pertanto ci è parso utile estenderle ad un altra Classe di Vertebrati: gli Uccelli.

Nostra prima cura è stata quella di seriare i diversi aspetti della sostanza basofila dei neuroni di Purkinje con l'aiuto di un criterio volumetrico atto a precisare il graduale trapasso di alcuni quadri in altri; con questi presupposti abbiamo distinto tre serie di elementi:

1° una serie nella quale le cellule tipiche, quali quelle osservate al termine della normale istogenesi (di 22,3 μ di diametro nel Pollo e 22,8 μ nel Piccione) si trasformano in elementi di dimensioni progressivamente decrescenti (fino a 8,5 μ di diametro), nei quali le strutture basofile si risolvono in un primo tempo in granulosità intensamente basofile, quindi si rarefanno ed infine scompaiono dal citoplasma del corpo cellulare, tranne che presso alla membrana cellulare ed a ridosso di quella nucleare; gli elementi intensamente e diffusamente basofili o con sostanza cromidiale in rarefazione spesso presentano più di un vero nucleolo (plasmosoma); questa successione di quadri ripete, a ritroso, le modificazioni descritte durante la normale istogenesi delle cellule di Purkinje della corteccia cerebellare in questi Uccelli (9);

2° un'altra serie di elementi in cui dalle cellule di Purkinje tipiche si passa ad elementi lievemente ipertrofici (fino a 23,5 μ di diametro), nei quali la sostanza basofila si rarefà nella regione perinucleare o in quella periferica; negli elementi più voluminosi la membrana nucleare affacciata verso il polo dendritico si presenta frastagliata e sormontata da una calotta di sostanza basofila compatta; nelle cellule di questa serie il nucleolo è sempre intensamente basofilo ed ipertrofico; gli aspetti di questa serie di cellule vanno interpretati come quadri di reattività (cromatolisi perinucleare) e di riparazione (formazione di sostanza basofila dalla calotta nucleare) della cellula di Purkinje in iperattività funzionale: essi infatti corrispondono esattamente a quelli descritti da numerosi Autori in neuroni di diversa natura (10),

(7) P. VAN DURME, «Le Nevraxe», *2*, 115 (1901); S. SAGUKI, «Zytologische Studien», n. 4 (1930); W. ANDREW, «Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat.», *25*, 583 (1936) e *28*, 292 (1938); H. HYDÉN, «Acta Physiol. Scand.», *6*, Suppl. XVII (1943); G. ATTARDI, «Exptl. Cell Res.», Suppl. 4, 25 (1957).

(8) T. INUKAI, «Journ. Comp. Neurol.», *45*, 1 (1928); G. M. BAFFONI, «La Ric. Sci.», *24*, 1641 (1954) e «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), *17*, 269 (1954); G. COTTE, «Arch. de Biol.», *68*, 297 (1957).

(9) G. M. BAFFONI e G. D'ANCONA, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), *24*, 606 (1958).

(10) F. NISSL, «Allg. Zeitschr. f. Psychiatr.», *48*, 675 (1891–92); E. LUGARO, «Lo Sperimentale», *49*, 159 (1895); A. VAN GEHUCHTEN, «La Cellule», *13*, 313 (1897); G. MARINESCO, «Neurol. Centralbl.», 911 (1897); G. BALLET e DUTIL, «Neurol. Centralbl.», 915 (1897); H. SPATZ, «Zeitschr. ges. Neurol. u. Psychiatr.», *58*, 327 (1920); D. BODIAN, «Symp. Soc. Exptl. Biol.», *1*, 163 (1947); ecc.

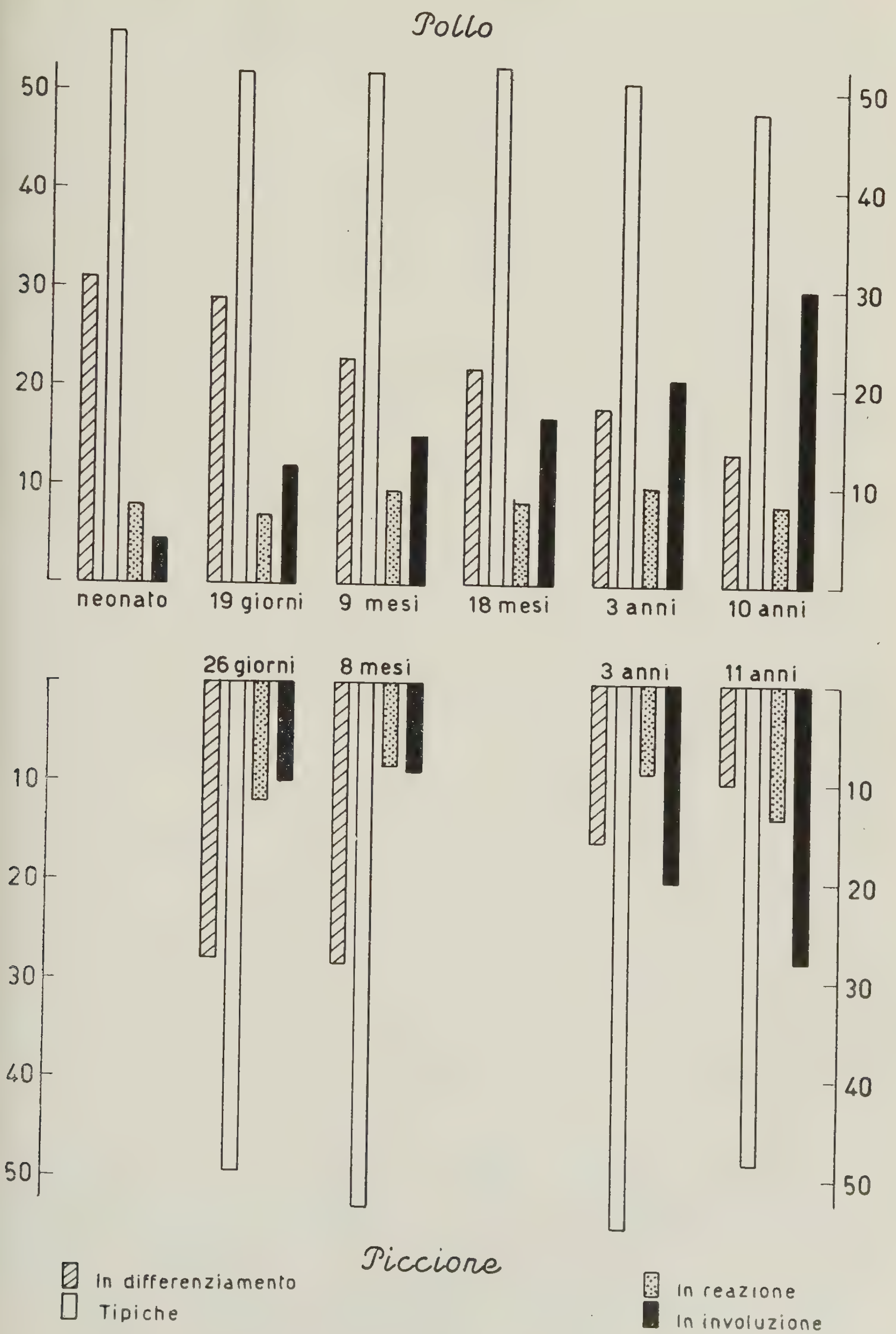
anche nelle cellule di Purkinje [11], e che sono stati interpretati come espressione dell'irritazione del sistema proteico–formatore della cellula nervosa [6];

3° una terza serie di neuroni di Purkinje in cui i diametri trasversali del corpo cellulare delle cellule tipiche decrescono progressivamente ed in cui la sostanza basofila in un primo tempo si rarefà, presentando i quadri della cromatolisi periferica, mentre in un secondo tempo, quando i diametri trasversi si riducono a meno di 15 μ, compaiono nel corpo cellulare ammassi cromofili (contenenti pentosonucleotidi) massicci ed a contorni poco netti, i quali, con il progredire dell'atrofia, si estendono dal polo neuritico a quello dendritico occupando tutto il corpo cellulare; in questi elementi il nucleolo è più piccolo e meno basofilo che nelle cellule di Purkinje tipiche; anche il nucleo di queste cellule si riduce di volume e nelle cellule più atrofiche presenta modificazioni di forma (da rotondo diviene lobato e quindi affusolato) e delle proprie strutture cromatiniche (che divengono meno nette ed infine conferiscono una diffusa e debole Feulgen–positività al succo nucleare, tranne che nella zona centrale occupata dal nucleolo).

TABELLA I.

ETÀ	FREQUENZA DEI QUADRI DELLE CELLULE DI PURKINJE			
	In differenz.	Tipici	In reatt.	In involuz.
In *Pollo:*				
neonato	31,2 %	56,2 %	7,9 %	4,6 %
a 19 giorni	29,0 %	51,9 %	7,0 %	12,1 %
a 9 mesi	23,0 %	52,2 %	9,6 %	15,2 %
a 18 mesi	21,9 %	52,4 %	8,6 %	17,0 %
a 3 anni	17,9 %	50,9 %	10,2 %	21,0 %
a 10 anni	13,4 %	48,0 %	8,3 %	30,2 %
In *Piccione:*				
a 26 giorni	28,3 %	49,6 %	12,2 %	9,9 %
a 8 mesi	28,8 %	53,1 %	8,9 %	9,2 %
a 3 anni	15,9 %	54,9 %	8,9 %	20,3 %
a 11 anni	10,2 %	48,5 %	13,5 %	27,8 %

(11) D. H. DOLLEY, « Journ. Comp. Neurol. », *28*, 465 (1917).



Pollo
50
40
30
20
10
neonato
19 giorni
9 mesi
18 mesi
3 anni
10 anni
26 giorni
8 mesi
3 anni
11 anni
Piccione
In differenziamento
Tipiche
In reazione
In involuzione

Fig. 1.

In osservazioni sulle cellule di Purkinje della corteccia cerebellare di Mammiferi, uno di noi [12] ha ottenuto risultati molto simili ed ha interpretato la prima serie di elementi come espressione di fenomeni del differenziamento di nuovi neuroni di Purkinje (da elementi superficiali dello strato granulare che nell'adulto conservano l'aspetto di cellule nervose indifferenziate) e la terza serie come espressione di fenomeni involutivi, i quali portano alla degenerazione di alcuni neuroni di Purkinje (infatti a carico di alcuni degli elementi più atrofici e basofili sono stati descritti fenomeni di neuronofagia) che è stata messa in rapporto con le modificazioni dell'attività di coordinazione motoria che si verificano durante il ciclo vitale dell'organismo.

I risultati dell'analisi condotta tra le cellule di Purkinje di Pollo e di Piccione a età diverse (dal termine della morfogenesi cerebellare – Pollo neonato, Piccione di 26 giorni – in poi) fino alla senescenza (animali di 10–1 anni) sono rappresentati nella Tabella e nella fig. 1; essi trovano un certo riscontro con quanto è stato osservato nei Mammiferi [12] e ne rappresentano pertanto una conferma; inoltre essi avvallano le supposizioni avanzate nella Nota precedente [1], nella quale sono stati riferiti i risultati sulla densità dei neuroni di Purkinje nella corteccia cerebellare durante il ciclo vitale dell'Uccello a prole inetta ed a prole precoce.

Infatti durante il periodo d'accrescimento somatico e nell'adulto la frequenza della serie di cellule che è stata interpretata come espressione dei fenomeni del differenziamento di nuovi neuroni di Purkinje, si abbassa progressivamente con l'età; l'elevato numero di queste cellule subito dopo il termine dello sviluppo conferma la supposizione che durante il periodo d'accrescimento somatico e nei giovani adulti i neuroni di Purkinje aumentano di numero [1], nonostante che in un primo momento l'estendersi in superficie della corteccia cerebellare mascheri l'effettivo aumento (i valori di densità aumentano infatti solo quando l'accrescimento della superficie cerebellare è cessato). Inoltre le variazioni di frequenza dei quadri ritenuti espressione dell'attività funzionale del neurone di Purkinje non presentano un comportamento correlato con l'età: ciò conferma l'interpretazione avanzata precedentemente, in quanto tali quadri devono ritenersi in relazione con le attività di coordinazione motoria esplicate prima del momento della morte dell'animale, e pertanto variabili da individuo ad individuo. Infine i quadri della terza serie, interpretati come aspetti involutivi dei neuroni di Purkinje, negli Uccelli (come è stato visto nei Mammiferi [12]) aumentano progressivamente con l'età, divenendo particolarmente frequenti durante la senescenza, quando cioè è stata constatata la rarefazione della densità dei neuroni di Purkinje nella corteccia cerebellare [1]; pertanto le variazioni di frequenza dei quadri basofili (ipercromatici) dei neuroni di Purkinje sono in correlazione diretta con l'età degli animali. A questo proposito va aggiunto che tale aumento non può essere ritenuto effetto di lesioni meccaniche (compressioni esercitate sulla corteccia cerebellare) pro-

(12) G. M. Baffoni, «Arch. Zool. Ital.», *41*, 1 (1956).

dotte dall'operazione di isolamento del cervelletto, come ritiene Cotte [13]; ciò perché i quadri basofili (ipercromatici) anzitutto non si presentano in altre cellule nervose più vicine a superfici di lesione (nuclei cerebellari e neuroni romboencefalici) e nelle cellule di Purkinje non risultano limitati a particolari zone dei *folia* o allineati lungo le « linee di forza » supposte dal Cotte, ma si alternano ovunque ed indifferentemente con cellule di Purkinje tipiche; inoltre le difficoltà di isolamento del cervelletto di individui senescenti negli Uccelli non sono risultate maggiori di quelle di adulti al termine dell'accrescimento somatico; infine, a prescindere dall'attenzione riposta onde evitare ogni compressione meccanica sulla corteccia cerebellare, il tempo tra il momento della morte dell'animale e la fissazione del cervelletto è risultato troppo breve (non superiore a 5 minuti) per giustificare la comparsa di alterazioni così profonde nella cellula nervosa e nella sua sostanza basofila; in proposito rammentiamo che osservazioni sulle alterazioni post-mortali [14], sull'azione di agenti traumatici *in vivo* [15] e su culture *in vitro* di cellule nervose [16] hanno dimostrato che la comparsa di alterazioni a carico della sostanza basofila appaiono non prima di un'ora. Ne consegue che i quadri basofili (ipercromatici) dei neuroni di Purkinje, accompagnati da atrofia del corpo cellulare, devono interpretarsi come dovuti a fenomeni d'involuzione fisiologica del neurone; ciò può essere avallato dal fatto che essi aumentano in seguito a forti stimolazioni elettriche [17] ed ad intenso esaurimento funzionale di tali neuroni [18]; ad ogni modo l'aumento di frequenza dei quadri basofili durante la senescenza spiega la rarefazione delle cellule di Purkinje nella corteccia cerebellare degli Uccelli di età più avanzata [1].

In Pollo ed in Piccione i quadri di cromatolisi diffusa, che aumentano notevolmente di numero nei Mammiferi senescenti e che precedono la comparsa di lipocromo nel corpo cellulare dei neuroni di Purkinje, sono molto rari e non si presentano con quella frequenza riscontrata in Mammiferi di età molto avanzata [19]; questo fatto, associato alla minor frequenza degli elementi in involuzione (cellule ipercromatiche) ed alla rarità dei processi di neuronofagia a carico delle cellule più atrofiche e cromofile, indicano che il ritmo di sostituzione dei neuroni di Purkinje è più basso negli Uccelli che nei Mammiferi; il fatto che le cavità di retrazione attorno al corpo cellulare delle cellule di Purkinje cromofile negli Uccelli sono molto meno

(13) G. COTTE, « Arch. de Biol. », *68*, 297 (1957).

(14) V. TIRELLI, « Ann. di Freniatr. », *6*, 281 (1896); A. NEPPI, « Riv. Patol. Nerv. Ment. », *2*, 152 (1897); O. BARBACCI e G. CAMPACCI, « Riv. Patol. Nerv. Ment. », *2*, 337 (1897), ecc.

(15) P. SFAMENI, « Lo Sperimentale », *51*, 38 (1897); D. A. B. FORTUNY, « Journ. Comp. Neurol. », *42*, 349 (1927).

(16) G. LEVI e H. MAYER, « Journ. Exptl. Zool. », *99*, 141 (1945).

(17) Z. FUMAGALLI e T. GUALTIEROTTI, « Biol. Latina », *2*, 439 (1950); C. N. LIN, H. L. BAILEY e W. F. WINDLE, « Journ. Comp. Neurol. », *92*, 169 (1950).

(18) G. ATTARDI, « Exptl. Cell Res. », Suppl. 4, 25 (1957).

(19) Osservazioni inedite di uno di noi (G. M. Baffoni).

pronunciate che nei Mammiferi e che i canestri vuoti sono rarissimi, possono indicare che l'attività di sostituzione dei neuroni di Purkinje, oltre che più bassa, è anche più lenta. Nel lavoro per esteso documenteremo le eventuali differenze di frequenza delle singole serie di neuroni di Purkinje in zone della corteccia cerebellare che presiedono a diverse sedi di attività funzionale.

Tra Pollo e Piccione non sono risultate differenze di andamento nella frequenza dei quadri basofili che presentano variazioni con l'età, né sono risultate sensibili differenze di frequenza in individui della stessa età; la frequenza dei quadri d'involuzione e di differenziamento, in genere, sono un po' più elevati nel Pollo che nel Piccione: ciò potrebbe indicare che il ritmo di sostituzione delle cellule di Purkinje è più accentuato nel Pollo, Uccello poco atto al volo, ma con una più perfezionata attività deambulatoria.

CONCLUSIONI. – Sono state individuate tre serie continue di modificazioni volumetriche del corpo cellulare, associate a diversi quadri della sostanza basofila, nei neuroni di Purkinje di Pollo e di Piccione di differente età, a sviluppo cerebellare ultimato. La frequenza delle cellule di Purkinje che ricopiano la successione dei quadri descritta durante la normale istogenesi va decrescendo con l'età; la frequenza degli aspetti che portano alla formazione delle cellule atrofiche e basofile (ipercromatiche), invece, aumenta con l'età; la serie di elementi che ricalcano le modificazioni della cellula nervosa in iperattività funzionale, non risultano correlate con l'età. L'andamento delle frequenze delle singole serie spiega le variazioni di densità dei neuroni di Purkinje messe in evidenza durante il ciclo vitale nelle due specie di Uccelli [1].

Se ne conclude che almeno una parte dei neuroni di Purkinje degli Uccelli sono neuroni « a ciclo vitale breve » (cfr. Stefanelli [20]); il ritmo di sostituzione dei neuroni di Purkinje negli Uccelli risulta più lento che nei Mammiferi.

(20) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), *10*, 159 (1951) e « La Ric. Sci. », *25*, 2778 (1955).

Biologia. — *Sulla presenza di cellule marginali glicogeniche nel midollo spinale del tritone* (Triturus cristatus *Laur.*) (*). Nota (**) di BRUNO BERTOLINI, presentata dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Nel corso di osservazioni sulla distribuzione del glicogeno in diversi tessuti del tritone adulto, ho avuto occasione di notare, nel midollo spinale, particolari cellule che, per posizione e per caratteristiche istochimiche, permettono un paragone con elementi simili, descritti nel midollo spinale di alcuni pesci ed Anfibi, dei Rettili e degli Uccelli e di qualche Mammifero.

Le osservazioni sono state compiute sul midollo spinale della regione cervicale e del tronco di esemplari adulti, sia maschi che femmine, di *Triturus cristatus* Laur.; per la dimostrazione del glicogeno i midolli furono fissati in Gendre da 0 a —1 C come è consigliato da Lison (1953) [1] per diminuire gli artefatti di diffusione, e trattati con il metodo di Hotchkiss–Mc Manus (PAS); l'ossidazione fu effettuata con acido perjodico all'1 °/₀ in alcool etilico al 90 °/₀, a 18–19° C per 2 ore, in modo da evitare l'asportazione del glicogeno ancora non ossidato, da parte di una soluzione ossidante acquosa (Hale 1957) [2].

Furono eseguiti preparati di controllo digeriti con saliva a 37° C per 1 ora prima della PAS–reazione.

Le osservazioni istochimiche sono state corredate da preparati eseguiti con i metodi di impregnazione argentica (fissazione in Bouin ed impregnazione con il metodo di Bodian; metodo di Cajal–De Castro).

Nei preparati eseguiti con i metodi argentici queste cellule appaiono fusiformi (fot. 2), con un prolungamento più cospicuo diretto in alto e lateralmente, e l'estremità opposta, affusolata, del corpo cellulare diretta in basso e medialmente; esse sono disposte nella sostanza bianca della regione latero–ventrale del midollo, vicine e, a volte, quasi parallele con il loro asse maggiore, alla superficie esterna dell'asse nervoso.

Sono quindi lontane dalla sostanza grigia centrale, e discoste anche dal plesso dendritico marginale formato dai grandi neuroni delle corna ventrali (fot. 1).

Nei preparati eseguiti con la PAS queste cellule mostrano il citoplasma ed i prolungamenti completamente riempiti da una sostanza fortemente PAS–positiva, di aspetto granulare, probabilmente per effetto della fissazione (fot. 3).

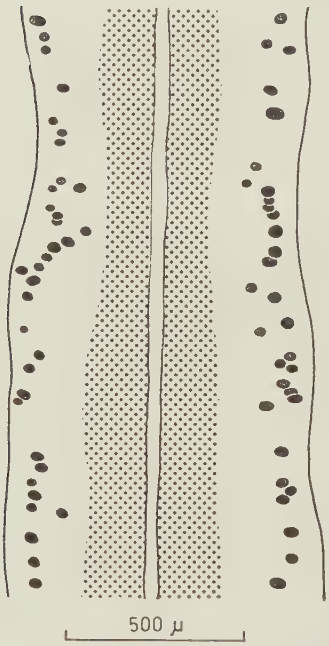
La PAS–positività scompare pressoché completamente dopo la digestione da parte dell'amilasi salivare, e perciò è da ritenersi dovuta ad un accumulo di glicogeno (fot. 4).

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia dell'11 luglio 1959.

La lievissima PAS–positività residua a livello del nucleolo e di alcune parti del citoplasma e, diffusa e non granulare, nella sostanza bianca e fra i neuroni, è dovuta alla presenza di sostanze differenti dal glicogeno (Baffoni 1954 [3]; Bairati e Tripoli 1954 [4]).

Il contenuto in glicogeno di queste cellule è notevolissimo, e senz'altro superiore a quello delle cellule ependimali, delle cellule di glia e dei neuroni della sostanza grigia, per cui esse spiccano fortemente colorate nella sostanza bianca.



Disposizione delle cellule marginali a glicogeno nella sostanza bianca di un tratto del midollo spinale (punteggiata la sostanza grigia).

Per studiarne la disposizione in un tratto del midollo spinale, mi sono servito di una ricostruzione grafica, preparata con la proiezione su di un piano frontale di 300 sezioni trasversali seriali di 5 μ di spessore.

Nella ricostruzione queste cellule appaiono disposte lateralmente, ben lontane dalla sostanza grigia, e vicino alla superficie esterna del midollo, e formano una sottile colonna, pressoché monocellulare, di aspetto continuo, benché le cellule non siano disposte regolarmente in una fila, e senza ispessimenti od interruzioni che denotino una qualche segmentalità (ved. figura).

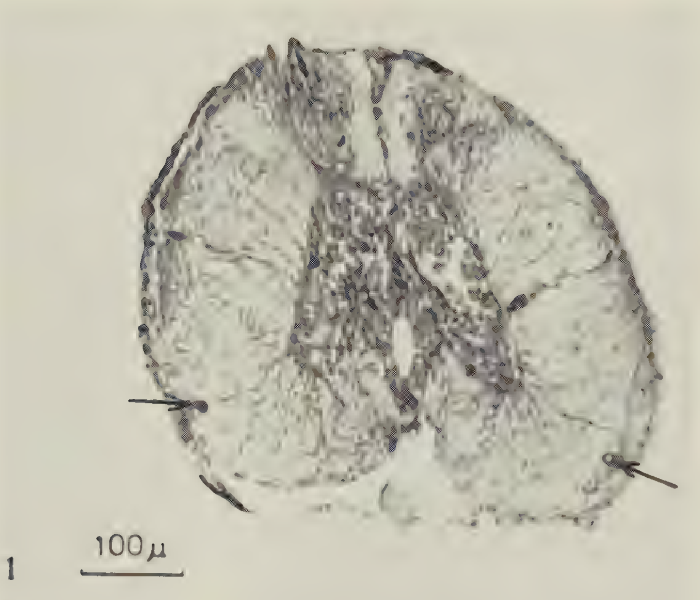
Dove i cordoni posteriori del midollo cominciano ad aprirsi per formare il midollo allungato, esse scompaiono, e non le ho potute ritrovare nei segmenti superiori del neurasse.

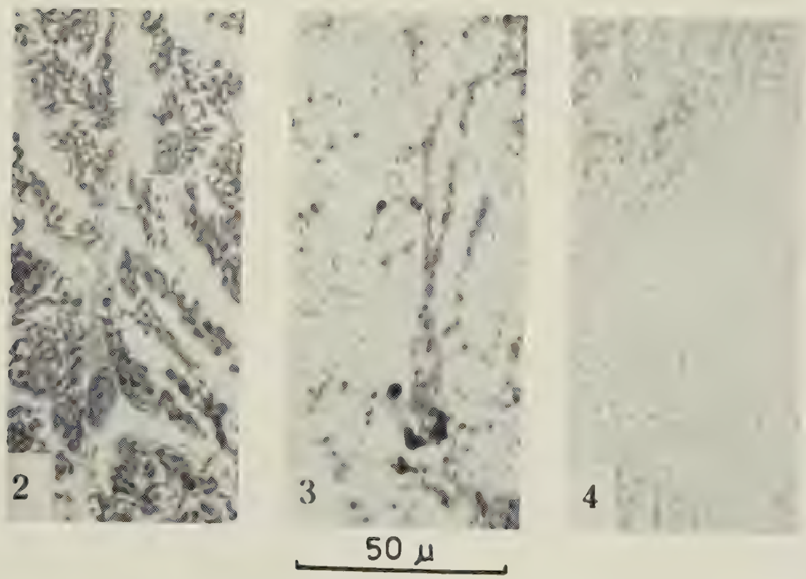
Per la loro forma e posizione queste cellule ricordano molto le cellule marginali descritte in *Proteus*, *Amphiuma*, *Siren* e *Siredon* da von Kölliker (1902) [5], le cellule di Burckhardt (Burckhardt 1896 [6]; von Kölliker 1902 [7]) del *Protopterus* ed altre simili di qualche altro Teleostomo di acqua dolce (von Kölliker 1902 [5]).

La caratteristica istochimica osservata le fa assomigliare inoltre alle cellule dei nuclei marginali di Hofmann–Kölliker (von Kölliker 1901 [8]) o lobi accessori di Lachi (Lachi 1889 [9]) del midollo spinale degli Uccelli, o, con più precisione, ai neuroni che si trovano alla base del peduncolo dei lobi maggiori (Monesi 1958 [10]); la presenza di glicogeno in questi nuclei marginali fu dimostrata per la prima volta da Terni (1924) [11].

Anche negli Uccelli le cellule marginali vengono a costituire, in posizione latero–ventrale, una colonna continua, pur con netti ispessimenti segmentali (Huber 1936 [12]).

Per quel che riguarda le cellule che sono oggetto della presente Nota, due sono i problemi che occorre risolvere per chiarirne il significato: l'omologia con altre cellule simili già descritte in altri gruppi zoologici e l'importanza funzionale.





Fot. 1. – Sezione trasversale del midollo; le freccie indicano una coppia di cellule marginali a glicogeno. PAS, colorazione nucleare con emallume.

Fot. 2. – Cellula marginale glicogenica; impregnazione Bodian.

Fot. 3. – Cellula marginale, glicogeno messo in evidenza dalla PAS–reazione.

Fot. 4. – Scomparsa delle PAS-positività dopo digestione da parte dell'amilasi salivare.

I dati morfologici ed istochimici per ora fanno soltanto intravedere la possibilità di una tale soluzione.

L'elevato contenuto in glicogeno di queste cellule può avere forse il significato di un accumulo di riserve energetiche; il sistema nervoso centrale è infatti assai ricco di glicogeno, soprattutto negli Anamni (Sato 1930 [13]); Oksche 1958 [14]), e questo è stato posto in relazione con il fabbisogno energetico della cellula nervosa; resta però poco chiaro perché alcuni centri ne siano assai ricchi, mentre altri, con attività funzionale certamente non minore, ne siano privi.

Il fatto che le cellule marginali del tritone siano particolarmente ricche di glicogeno non porta necessariamente a considerarle delle cellule di accumulo, e ad escluderne di conseguenza la funzione nervosa.

Questa loro caratteristica può essere dovuta a particolari necessità funzionali, come avviene ad esempio anche per la cellula di Mauthner, che è un neurone così altamente differenziato per la coordinazione dell'attività motoria (Detwiler 1927 [15], 1947 [16]; Stefanelli 1951 [17]).

Il neurone mauthneriano mostra infatti un aumento del suo contenuto in glicogeno proprio man mano che procede il suo differenziamento (Janosky e Wenger 1956 [18]).

È assai difficile però prospettare quale possa essere la funzione nervosa di queste cellule marginali, anche se ci si basa sulle ipotesi che sono state esposte per le consimili cellule dei Sauropsidi, stanti le grandi differenze ecologiche e di struttura tra questi e gli Anfibi.

Per concludere, le cellule marginali glicogeniche del tritone presentano delle nette caratteristiche che le identificano tra le altre cellule del midollo spinale, e probabilmente costituiscono nel loro insieme un sistema con funzione specifica.

Ulteriori ricerche sono in corso per riconoscere una più precisa attività funzionale e le eventuali omologie con quei centri simili di altri Vertebrati.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales*. Paris (1953).

[2] A. J. HALE, *Histochemistry of the polysaccharides*, «Int. Rev. Cytol.», *6*, 193–263 (1957).

[3] G. M. BAFFONI, *Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni dei Vertebrati in condizioni normali e sperimentali*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), *16*, 113–118 (1954).

[4] A. BAIRATI e G. TRIPOLI, *Ricerche morfologiche ed istochimiche sulla glia del nevrasse dei vertebrati. – I. Anfibi*, «Zeitschr. f. Zellforsch.», *39*, 392–413 (1954).

[5] A. VON KOELLIKER, *Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien*, «Zeitschr. f. wissensch. Zoologie», *72*, 126–179 (1902).

[6] R. BURCKHARDT, *Das Centralnervensystem von* Protopterus annectens. Berlin (1892).

[7] A. VON KOELLIKER, *Weitere Beobachtungen über die Hofmann'schen Kerne am Marke der Vögel.*, «Anat. Anz.», *21*, 81–84 (1902).

[8] A. VON KOELLIKER, *Ueber einen noch unbekannten Nervenzellenkern im Rückenmark der Vögel*, «Anz. d. K. Akad. d. Wissensch.», *15* (1901).

[9] P. LACHI, *Alcune particolarità anatomiche del rigonfiamento sacrale del midollo degli Uccelli*, « Atti d. Soc. Toscana di Sc. naturali », *10*, Pisa (1889).

[10] V. MONESI, *Precisazioni sulla anatomia microscopica dei nuclei marginali maggiori (lobi accessori di Lachi; nuclei di Hofmann–Kölliker) e dei nuclei marginali minori del midollo spinale degli Uccelli*, « Biologica latina », *11*, 1–27 (1958).

[11] T. TERNI, *Ricerche sulla cosidetta sostanza gelatinosa del midollo lombo–sacrale degli Uccelli*, « Arch. Ital. d. Anat. ed Embriol. », *21*, 55–86. (1924).

[12] J. F. HUBER, in C. U. ARIËNS KAPPERS, G. C. HUBER, E. C. CROSBY, *The comparative anatomy of the nervous system of Vertebrates, including man*. New York (1936).

[13] T. SATO, *Ueber das Glycogen im Zentralnervensystem*, « Trans. Soc. path. Jap. », *20*, 207–211 (1930).

[14] A. OKSCHE, *Histologische Untersuchungen über die Bedeutung des Ependyms, der Glia und der* Plexus chorioidei *für den Kohlenhydratstoffwechsel des ZNS*, « Zeitschr. f. Zell-forsch. », *48*, 74–129 (1958).

[15] S. R. DETWILER, *Experimental studies on Mauthner's cell in* Amblystoma « Jour. exp. Zool. », *48*, 15–30 (1927).

[16] R. S. DETWILER, *Quantitative studies on the locomotor capacity of larval* Amblystoma *lacking Mauthner's neuron or the ear*, « Jour. exp. Zool. », *104*, 343–352 (1947).

[17] A. STEFANELLI, *The Mauthnerian apparatus in the* Ichthyopsida, « Quart. Rev. Biol. », *26*, 17–34 (1951).

[18] I. D. JANOSKY. e B. S. WENGER, *A histochemical study of glycogen in the developing nervous system of* Amblystoma, « Jour. comp. Neurol. », *105*, 127–150 (1956).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1959 – Settembre–Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Chimica. — *Proprietà e struttura di un nuovo metallo–carbonile: il Vanadio–esacarbonile* (*). Nota (**) di GIULIO NATTA, RAFFAELE ERCOLI, FAUSTO CALDERAZZO, ANGEL ALBEROLA (***), PAOLO CORRADINI e GIUSEPPE ALLEGRA, presentata dal Socio G. NATTA.

Era noto finora che l'attitudine a formare metallo–carbonili è una caratteristica posseduta unicamente dagli elementi di transizione nei gruppi dal VI all'VIII del sistema periodico e dai metalli alcalini e alcalino terrosi (1). All'infuori degli elementi di questi gruppi l'unico metallo carbonile di cui si abbia avuto notizia è un carbonile di rame $[Cu(CO)_3]_2$ della cui esistenza, comunicata nel 1944 e successivamente smentita [1], si trova ancora menzione nella letteratura recente [3].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano – Centro Studi di Chimica Industriale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1959.

(***) Il prof. A. Alberola, dell'Istituto di Chimica «Alonso Barba» di Madrid ha partecipato al presente lavoro usufruendo di una borsa di studio della Fondazione spagnola «Juan March».

(1) In generale i «carbonili» dei metalli alcalini e alcalino–terrosi come ad esempio $[KCO]_n$, $Ca(CO)_2$ ecc. vengono considerati come un gruppo a se stante. Tali composti, in genere poco studiati, hanno proprietà del tutto diverse da quelle dei carbonili dei metalli di transizione. Solo quest'ultimi, infatti, hanno le caratteristiche degli autentici composti covalenti come la volatilità ed una apprezzabile solubilità nei solventi apolari.

Nel corso di nuove ricerche sulle reazioni dell'ossido di carbonio con composti contenenti metalli di transizione [2], noi abbiamo isolato un composto del Vanadio al quale si doveva attribuire la formula $[V(CO)_6]_n$ in base a determinazioni analitiche più volte confermate. Ricerche successive ci hanno consentito di accertare che il composto da noi isolato è monomerico ($n = 1$), per cui esso deve essere considerato come il Vanadio esacarbonile di formula $V(CO)_6$.

La scoperta di questo nuovo metallo–carbonile sembra di particolare interesse scientifico sia perché si tratta del primo esempio sicuro di un carbonile di metallo di transizione non appartenente ai gruppi dal sesto all'ottavo del sistema periodico, sia perché per la prima volta nella chimica dei metallo carbonili si trova un esempio di paramagnetismo. Infatti, a differenza dei metallo carbonili precedentemente noti, che sono tutti diamagnetici [3], il Vanadio esacarbonile risulta paramagnetico. In questa Nota descriviamo le principali proprietà fisiche e chimiche del Vanadio esacarbonile e comunichiamo i risultati ottenuti nella determinazione della sua struttura per via Röntgenografica. La descrizione dettagliata dei metodi adottati per la preparazione e l'isolamento del composto saranno descritti in una Nota successiva [2].

PROPRIETÀ FISICHE E CHIMICHE DEL VANADIO ESACARBONILE. – Il Vanadio esacarbonile è un solido cristallino di colore verde–nero e di odore caratteristico, ingrato, simile a quello del dicobalto ottacarbonile. Esso si ossida rapidamente all'aria, talvolta con auto–ignizione, e perciò deve essere manipolato in atmosfera inerte. Il composto si conserva indefinitamente in fiale saldate in atmosfera di azoto, preferibilmente mantenute al riparo dalla luce ed a bassa temperatura ($0 \div -5°C$). Per riscaldamento in capillare saldato sotto azoto, il Vanadio esacarbonile comincia a decomporsi, senza fondere, intorno ai 70°C, depositando sulle pareti uno specchio metallico. Il composto è notevolmente volatile e può essere sublimato rapidamente per riscaldamento a 45–60°C nel vuoto da 10 a 20 mm Hg.

Misure di suscettività magnetica (2) hanno dato il seguente risultato:

$$\chi_g = +6{,}14 \pm 0{,}05 \text{ a } 20{,}0°C \qquad \mu \simeq 1{,}73 \text{ B. M.}$$

in base al quale si deduce che nella molecola è presente un elettrone non accoppiato.

Il Vanadio esacarbonile è poco solubile negli idrocarburi anche aromatici (solubilità in $C_6H_6 \simeq 1$ ‰ a 20°C) e le soluzioni così ottenute non sono stabili ma dànno luogo a un lento sviluppo di ossido di carbonio, catalizzato dalla luce.

I solventi elettron–donatori, come ad esempio metanolo, acetone, tetraidrofurano e piridina, reagiscono con il Vanadio esacarbonile provocandone

(2) Ringraziamo vivamente il prof. Renato Cini, dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Firenze, per il suo prezioso contributo nell'eseguire le misure magnetiche.

la dismutazione che avviene con rapido sviluppo di una parte dell'ossido di carbonio contenuto nel composto. Per mezzo di questa reazione, che sarà descritta dettagliatamente in seguito, abbiamo potuto isolare il composto Ni(o. fenantrolina)$_3$[$V(CO)_6$]$_2$ caratterizzato dalla presenza dell'anione esacarbonilvanadato $[V(CO)_6]^{-1}$ isoelettronico con i ben noti anioni carbonilmetallati $[Cr(CO)_5]^{-2}$, $[Fe(CO)_4]^{-2}$, $[Co(CO)_4]^{-1}$.

Analogamente a quanto accade per altri metallo-carbonili, il Vanadio esacarbonile è prontamente ossidato dallo iodio in soluzione di solventi organici. La reazione, che avviene secondo lo schema:

$$V(CO)_6 + 3/2\, I_2 \longrightarrow VI_3 + 6\,CO$$

porta allo sviluppo quantitativo dell'ossido di carbonio e perciò è stata da noi utilizzata per l'analisi quantitativa del composto.

ANALISI DEL VANADIO ESACARBONILE. – In un'apparecchiatura adatta alle determinazioni gas-volumetriche, si introducono 10 cm³ di toluolo e 0,1173 g di Vanadio esacarbonile bisublimato, operando in atmosfera di ossido di carbonio. Dopo termostatizzazione a + 15° C, si introducono lentamente nell'apparecchio, per aspirazione, 10 cm³ di una soluzione toluenica di iodio al 4 °/$_0$, avendo cura di evitare uno sviluppo di gas troppo tumultuoso. Cessato lo sviluppo di gas si mantiene ancora in agitazione la sospensione per circa 1 ora. Risultano sviluppati 71,3 Ncm³ di gas che, all'analisi cromatografica, risulta essere ossido di carbonio esente da altri componenti (teorico 72,1 Ncm³). La sospensione toluenica contenente il Vanadio viene trattata con 200 cm³ di acqua ed evaporata a secchezza. Sul residuo si determina volumetricamente il Vanadio secondo il metodo descritto da Hammer [4]. Le determinazioni quantitative sono state eseguite per due volte su campioni provenienti da due diverse preparazioni ottenendo i seguenti risultati:

CO 76,0; 76,3 °/$_0$ calcolato per $V(CO)_6$ 76,73

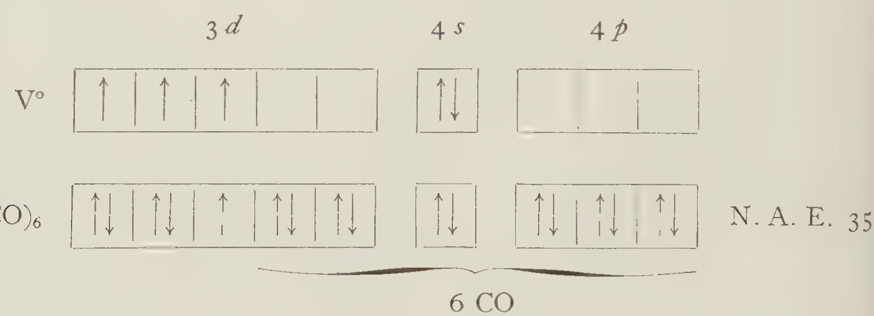
V 23,41; 22,48 °/$_0$ calcolato per $V(CO)_6$ 23,26.

PREPARAZIONE ED ANALISI DELL'ESACARBONIL-VANADATO DI TRI-O. FENANTROLINA-NICHEL. – Operando in atmosfera di azoto, 0,760 g di $V(CO)_6$ sublimato vengono introdotti in un pallone della capacità di 250 cm³ e trattati, sotto agitazione, con una sospensione costituita da 100 cm³ di etere etilico e 80 cm³ di una soluzione acquosa al 4 °/$_0$ di Ni(o. fen.)$_3Cl_2$. Si forma immediatamente un precipitato di colore rosso-bruno che, sempre sotto azoto, viene filtrato, lavato più volte con acqua disaerata, poi con etanolo e con etere anidro ed infine essiccato per breve aspirazione alla pompa. Si raccolgono per infialamento in atmosfera di azoto g 0,81 di prodotto secco (resa 45 °/$_0$ del Vanadio impiegato). Il composto si presenta come una polvere rossa che all'aria si decompone lentamente e che, per riscaldamento in capillare saldato

sotto azoto, sembra restare inalterata fino a 175° C dopo di che si decompone ed annerisce senza fondere.

Analisi:	Ni	V	CO	N
trovato	5,60	9,53	31,02	8,04
calcolato	5,66	9,83	32,41	8,12.

STRUTTURA E PESO MOLECOLARE DEL VANADIO ESACARBONILE. – I metallo carbonili noti finora obbedivano alla regola del raggiungimento della configurazione a gas nobile e contenevano solo elettroni accoppiati. In base a tali elementi si poteva supporre per analogia che il Vanadio esacarbonile avesse la formula dimera $(CO)_6V—V(CO)_6$, capace di soddisfare entrambe le condizioni suddette. In tal caso però si sarebbe dovuto attribuire a ciascun atomo di Vanadio il numero di coordinazione 7, numero che si incontra raramente nella chimica dei composti di coordinazione. La presenza di un elettrone spaiato e la volatilità del composto, superiore anche a quella del cromoesacarbonile sicuramente monomerico, erano in contrasto con l'ipotesi che al Vanadio esacarbonile si dovesse attribuire la formula dimerica. Una formulazione monomerica faceva invece prevedere per il Vanadio esacarbonile una struttura ottaedrica con sei molecole di ossido di carbonio vincolate all'atomo metallico da sei orbitali ibridi equivalenti di tipo d^2sp^3 come indicato nel seguente schema



Tale schema è identico a quello proposto da Fischer [5] per il Vanadio dibenzene, composto che sarebbe da considerare isoelettronico con il Vanadio esacarbonile ora descritto.

Poiché la determinazione del peso molecolare per via crioscopica presentava notevole difficoltà a causa della scarsa solubilità del composto negli idrocarburi e dell'instabilità delle soluzioni così ottenute, abbiamo ritenuto più utile accertare contemporaneamente il peso molecolare e la struttura del Vanadio esacarbonile per mezzo dell'analisi Röntgenografica di cristalli singoli.

Data la estrema decomponibilità del prodotto e la morfologia irregolare, abbiamo eseguito spettri di rotazione di differenti cristalli in capillari di Lindemann, fino ad individuare un cristallo orientato lungo un asse razionale. La tecnica adottata è già stata descritta in un precedente lavoro [6]. Abbiamo

così ottenuto le seguenti costanti della cella elementare:

$$a' = 13{,}61\ \text{Å (asse di rotazione)} \quad ; \quad c = 6{,}47\ \text{Å} \ (c \operatorname{sen} \beta = 5{,}69\ \text{Å});$$
$$b = 11{,}28\ \text{Å} \quad ; \quad \alpha = 90^\circ \quad ; \quad \gamma = 90^\circ \quad ; \quad \beta = 118^\circ\, 23'.$$

L'angolo β era stato dedotto con metodi standard [7] dagli spettri Weissenberg di equiinclinazione sugli strati con $h = 0\,,\,1\,,\,2$. Poiché risultava $|\,F(\bar{h}kl)\,| = |\,F(hk\bar{l})\,|$, il cristallo doveva ritenersi avere almeno simmetria monoclina [8]; il rapporto tra i valori di c e di a', eguale a $-\cos\beta$, dava tuttavia l'indicazione dell'esistenza di un'altra terna primitiva di assi della cella, di cui due coincidenti con b e c, ed il terzo di lunghezza pari ad $a' \operatorname{sen}\beta$, ortogonali tra loro. Essendo la cella descrivibile anche sulla base di una terna trirettangola di assi, poteva il gruppo spaziale appartenere anche al sistema ortorombico.

Effettivamente si è ottenuta, dopo ripetuti tentativi, la centratura di un cristallo lungo uno degli assi a terna trirettangola a, b e c. Essendo risultato: $|\,F(hkl)\,| = |\,F(hkl)\,| = |\,F(h\bar{k}l)\,| = |\,F(hk\bar{l})\,|$, è stata confermata l'ipotesi che il gruppo spaziale fosse ortorombico. Inoltre dalle estinzioni sistematiche dei riflessi con $h = 0$ e $k + l = 2n + 1$ e con $l = 0$ e $h = 2n + 1$, risulta che possibili gruppi spaziali della cella sono, univocamente, il gruppo Pnma o il sottogruppo P$n2_1a$ [8]. La densità sperimentale dei cristalli, determinata con il metodo dei liquidi pesanti [9], risulta 1,65 gr/cm^3, e pertanto il numero N di unità $V(CO)_6$ contenute per cella elementare corrisponde a 4 (3,96 in base alla densità sperimentale). Essendo, per entrambi i possibili gruppi spaziali, 4 le posizioni equivalenti che si corrispondono attraverso operazioni di simmetria con traslazione, si deduce che il composto ha una struttura monomerica, con peso molecolare 219,02. Se in particolare il gruppo spaziale è Pnma (che presenta 8 posizioni generali equivalenti) la molecola deve contenere un centro o un piano di simmetria.

Le dimensioni della cella del $V(CO)_6$ da noi trovate dimostrano una evidente analogia con quelle degli analoghi esacarbonili monomerici di cromo, tungsteno e molibdeno [10], come risulta dalla seguente tabella.

TABELLA.

Confronto delle costanti reticolari del Vanadio esacarbonile con quelle degli esacarbonili monomerici dei metalli del gruppo VI A.

	a	b	c (in Å)
$V(CO)_6$	11,97 ± 0,02	11,28 ± 0,01	6,47 ± 0,02
$Cr(CO)_6$	11,72	10,89	6,27
$W(CO)_6$	11,90	11,27	6,42
$Mo(CO)_6$	12,02	11,23	6,48

In accordo con il fatto che il raggio atomico del Vanadio (1,31 Å) è superiore a quello del Cromo (1,25 Å), il volume della cella elementare del Vanadio esacarbonile (875 $Å^3$) è maggiore di quello della cella del cromoesacarbonile (800 $Å^3$).

Per verificare se l'analogia di struttura si spingeva alla configurazione e al modo di impacchettamento delle molecole, è sembrato opportuno eseguire spettri Weissemberg attorno agli assi di un cristallo di $Cr(CO)_6$, corrispondenti a quelli attorno ai quali avevamo spettrato il composto in esame. In tal caso, essendo il numero atomico del cromo quasi eguale a quello del Vanadio ($Z_{Cr} = 24$, $Z_V = 23$), per entrambi i composti posizione e distribuzione delle intensità dei vari riflessi avrebbero dovuto essere praticamente coincidenti. Questo è quanto effettivamente si constata.

Abbiamo quindi assegnato al $V(CO)_6$ una struttura del tutto analoga a quella dei già citati metallocarbonili.

A questi ultimi W. Rüdorff e U. Hofmann [10] avevano attribuito una struttura, descritta in termini del gruppo spaziale $Pn2_1a$ (C_{2v}^9), in cui gli atomi di Cr occupano le posizioni in $x = 1/8$; $y = 1/4$; $z = 1/16$. L'accordo tra fattori di struttura calcolati ed osservati per tutti i riflessi ($h0l$), da noi ottenuto per il $V(CO)_6$ sulla base di un analogo impacchettamento, è risultato soddisfacente, e riteniamo pertanto che la struttura proposta per gli altri metallocarbonili sia sostanzialmente corretta, contrariamente a quanto affermato da Wyckoff [11]. Facciamo solo osservare che, con le coordinate degli atomi pesanti proposte e l'orientamento della molecola prescelto, la struttura può essere descritta in base al gruppo spaziale più simmetrico P*nma*, che presenta appunto, in aggiunta agli elementi di simmetria del suo sottogruppo $Pn2_1a$, un piano di simmetria in x, 1/4, z [8].

Bibliografia.

[1] P. L. Robinson, K. R. Stainthorpe, «Nature», *153*, 24 (1944); Ibidem, *153*, 593 (1944).

[2] R. Ercoli, F. Calderazzo, A. Alberola. Lavoro non pubblicato.

[3] J. W. Cable, R. K. Sheline, «Chem. Rev.», *56*, 1 (1956).

[4] H. L. Hammer, «Met. Chem. Eng.», *17*, 208 (1917).

[5] E. O. Fischer, H. P. Kögler, «Chem. Ber.», *90*, 250 (1957).

[6] P. Corradini; I. W. Bassi, «Rend. Accad. Naz. Lincei» (8), *26*, 43 (1958).

[7] M. J. Buerger, *X-Ray Crystallography*, J. Wiley & Sons, New York 1949, 375.

[8] *Int. Tab. for X-Ray Cryst.*, Birmingham (1952).

[9] A. Weissberger Ed., *Phys. Meth. of Org. Chem.*, vol. I, «Intersc. Publish. Inc.», New York (1949).

[10] W. Rüdorff, U. Hofmann, «Zeit. Phys. Chem.», 351–370, *B 28* (1935).

[11] R. W. G. Wyckoff, *Cryst. Structures*, «Intersc. Publish. Inc.», New York, Sect. I (1948).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné.* Nota II di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI e ANDRZEJ SZYBIAK, presentata [(*)] dal Socio M. PICONE.

6. Soit $\mathfrak{S}$ la classe de fonctions de la forme

$$(18)\quad F(t, X; s, Y) = (t-s)^{-\varrho/2} \exp\left[-\frac{|X-Y|^2}{4(t-s)}\right] Q(X, Y; (t-s)^{1/2}),$$

ρ étant un nombre entier, tel que $\rho < m$, appelé l'ordre de la fonction F, et $Q(X, Y; (t-s)^{1/2})$ un polynôme en x_i, y_i $(i = 1, \cdots, m)$ et $(t-s)^{1/2}$.

LEMME. – *Si* $F(t, X; s, Y)$ *et* $G(t, X; s, Y)$ *sont deux fonctions de classe* $\mathfrak{S}$ *des ordres* ρ_1 *et* ρ_2, *et* λ *un nombre entier non négatif, l'intégrale*

$$(19)\qquad H(t, X; s, Y) = \int_s^t d\tau \int_{\mathfrak{S}^m} F(t, X; \tau, \Xi)\, |\Xi|^{2\lambda}\, G(\tau, \Xi; s, Y)\, d\Xi$$

est aussi une fonction de classe $\mathfrak{S}$ *dont l'ordre est non supérieur à* $\rho_1 + \rho_2 - m - 2$.

Pour la démonstration on introduit des nouvelles variables d'intégration

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{t-s}{(t-\tau)(\tau-s)}}\left(\xi_i - \frac{\tau-s}{t-s}x_i - \frac{t-\tau}{t-s}y_i\right) \qquad (i = 1, \cdots, m).$$

$$\vartheta = \frac{\tau-s}{t-s}.$$

La fonction $H(t, X; s, Y)$ prend la forme d'une combinaison linéaire aux coefficients constants des fonctions de la forme

$$J_{ijkl} = x_i^{\mu_i} y_j^{\mu_j} (t-s)^{1/2(-\varrho_1-\varrho_2+m+2)} \exp\left[-\frac{|X-Y|^2}{4(t-s)}\right],$$

μ_i, μ_j, k, l étant des nombres entiers non négatifs. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 2. – On a pour les termes W_k de la série (11) les relations (valables dans $\Gamma(\alpha)$)

$$(20)\qquad W_0(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta) = v_0(t, X; s, Y),$$

$$W_k(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta) =$$

$$= \int_s^t d\tau \int_{\mathfrak{S}^m} v_0(t, X; \tau, \Xi \mid \alpha, \beta)\,(\alpha^2 |\Xi|^2 + \beta)\, W_{k-1}(\tau, \Xi; s, Y \mid \alpha, \beta)\, d\Xi.$$

Il en résulte en particulier que les fonctions W_k sont non négatives dans $\Gamma(\alpha)$.

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1959.

Démonstration: Considérons la suite de fonctions $V_k(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ définies par les formules

$$(21) \qquad V_0(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta) = v_0(t, X; s, Y),$$

$$V_k(t, X; s, Y \mid \alpha, \beta) =$$

$$= \int_s^t d\tau \int_{\mathcal{E}^m} v_0(t, X; \tau, \Xi)(\alpha^2 |\Xi|^2 + \beta) V_{k-1}(\tau, \Xi; s, Y \mid \alpha, \beta) d\Xi \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

On obtient par les dérivations membre à membre des formules (21) les équations analogues à (14) pour les fonctions $V_k (k = 1, 2, \cdots)$. D'autre part il résulte des formules (12), (13) et des considérations du n–ro 4 que les fonctions $W_k (k = 1, 2, \cdots)$ sont de classe $\mathcal{K}$ en tant que fonctions de X et de $(t - s)$ pour $X \in \mathcal{E}^m$, $0 < t - s < \pi/2\alpha$. On déduit du lemme qui vient d'être démontré qu'il en est de même des fonctions V_k. Il résulte donc du th. 1 que l'on a $V_k = W_k (k = 1, 2, \cdots)$. Par suite de (21) on a (20).

7. Dans la suite nous allons appliquer les inégalités pour la solution fondamentale U_0 de l'équation (6) et ses dérivées par rapport aux variables x_i jusqu'à second ordre qui constituent des cas particuliers de celles établies par S. Eidelman (voir [2]). Soit T' un nombre positif inférieur à T. Il existe deux nombres K et h, dépendant en général de T', tels que l'on a pour $X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$, $0 \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T'$ des inégalités

$$(22) \qquad |U_0(t, X; s, Y)| \leq K v_0(ht, X; hs, Y),$$

$$(23) \qquad \left| \frac{\partial U_0(t, X; s, Y)}{\partial x_i} \right| \leq K (t - s)^{-1/2} v_0(ht, X; hs, Y),$$

$$(24) \qquad \left| \frac{\partial^2 U_0(t, X; s, Y)}{\partial x_i^2} \right| \leq K (t - s)^{-1} v_0(ht, X; hs, Y).$$

En partant de (22), et en tenant compte de (2), (20) et de l'homogénéité des fonctions W_k par rapport à α^2 et β, on établit des inégalités

$$|U_j(t, X; s, Y)| \leq K^{j+1}(ht, X; hs, Y \mid A, B) =$$

$$= KW_j(ht, X; hs, Y \mid \sqrt{K} A, KB) \qquad (j = 1, 2, \cdots),$$

par suite de quoi la série

$$(25) \qquad W(ht, X; hs, Y \mid \sqrt{K} A, KB) = K \sum_{k=0}^{\infty} W_k(ht, X; hs, Y \mid \sqrt{K} A, KB),$$

qui est convergente dans l'ensemble $\mathcal{S}(A): X \in \mathcal{E}^m, Y \in \mathcal{E}^m, S \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T(A)$, où l'on a posé $T(A) = \min \left[T', \frac{\pi}{2h\sqrt{K} A} \right]$, constitue dans

cet ensemble une majorante de la série (7). La somme $U(t, X; s, Y)$ de la série (7) satisfait dans $\mathcal{S}(A)$ à l'inégalité

$$|U(t, X; s, Y)| \leq KW(ht, X; hs, Y \mid \sqrt{K}\,A, KB). \tag{26}$$

La fonction $U(t, X; s, Y)$ satisfait à l'équation intégrale

$$U(t, X; s, Y) = U_0(t, X; s, Y) + \tag{27}$$

$$+ \int_s^t d\tau \int_{\mathcal{S}^m} U_0(t, X; \tau, \Xi)\, c(\tau, \Xi)\, U(\tau, \Xi; s, Y)\, d\Xi.$$

Il résulte des inégalités (23) et (26) et de l'équation (27) que la fonction $U(t, X; s, Y)$ est de classe C^1 par rapport à X dans $\mathcal{S}(A)$ et que l'on y a

$$U'_{x_i}(t, X; s, Y) = [U_0(t, X, s; Y)]'_{x_i} +$$

$$+ \int_s^t d\tau \int_{\mathcal{S}^m} [U_0(t, X; \tau, \Xi)]'_{x_i}\, c(\tau; \Xi)\, U(\tau, \Xi; s, Y)\, d\Xi \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Ceci permet de démontrer (en appliquant les inégalités (24)) que $U(t, X; s, Y)$ est de classe C^2 par rapport à X et de classe C^1 par rapport à t dans $\mathcal{S}(A)$ et y satisfait à l'équation (1). Il résulte de (26) que l'on a

$$\lim_{|X| \to \infty} U(t, X; s, Y) = \lim_{|Y| \to \infty} U(t, X; s, Y) = 0.$$

On vérifie ensuite que la fonction $U(t, X; s, Y)$ jouit de la proprieté 2° du n–ro 2. On démontre, de plus, le théorème suivant:

THÉORÈME 3. – *Soit* $\varphi(X)$ *une fonction continue et de classe* E_2 *dans* $\mathcal{E}^m$. *L'intégrale de Fourier–Poisson*

$$J(t, X; s) = \int_{\mathcal{S}^m} U(t, X; s, Y)\, \varphi(Y)\, dY$$

existe dans un ensemble $\Sigma^*(A)$; $X \in \mathcal{E}^m$, $S \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T^*(A)$ (*où* $T^*(A) \leq T(A)$) *et on a* $\lim_{t \to s} J(t, X; s) = \varphi(X)$.

8. On a le suivant théorème d'unicité.

THÉORÈME 4. – *Il existe une fonction* $U(t, X, s, Y)$ *au plus, continue dans* $\mathcal{S}(A)$, *de classe* C^2 *par rapport à* X, *de classe* C^1 *par rapport à* t *et satisfaisant à l'équation* (1) *en tant que fonction du point* (t, X), *jouissant de la propriété 2° du n–ro 2 et telle que l'intégrale de Fourier–Poisson* $J(t, X; s)$ *soit de classe* E_2 *dans l'ensemble* $\Sigma(A): X \in \mathcal{E}^m$, $S \leq s < t \leq T$, $0 < t - s < T(A)$ *pour toute fonction* $\varphi(Y)$ *continue pour* $Y \in \mathcal{E}^m$ *et s'annulant en dehors d'une sphère* $|Y| \leq R$ (*le nombre* R *dépendant de la fonction* φ).

9. Nous allons étudier certaines propriétés de la solution fondamentale de (1). Tout d'abord nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5. – Soit $\{c_\nu(t, X)\}$ *une suite de fonctions continues et bornées dans* $\mathcal{C}$, *satisfaisant aux conditions* (H), *les nombres* A *et* B *étant indépendants de* ν, *telle que l'on ait*

$$\lim_{\nu \to \infty} c_\nu(t, X) = c(t, X).$$

Soit $\{U^\nu(t, X; s, Y)\}$ *la suite de solutions fondamentales des équations* $F_0[u] + c_\nu(t, X)u = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. *On a* $\lim_{\nu \to \infty} U_\nu(t, X; s, Y) = U(t, X : s, Y)$ *partout dans* $\mathcal{S}(A)$.

Ce théorème résulte du théorème de Lebesgue sur l'intégration des suites de fonctions terme à terme.

On déduit du th. 5 des extensions de certains théorèmes relatifs aux solutions des équations de la forme (1) à coefficients bornés.

En particulier soit $\tilde{U}(t, X; s, Y)$ la solution fondamentale de l'équation adjointe à (1). On a dans $\mathcal{S}(A)$ l'égalité

$$U(t, X; s, Y) = \tilde{U}(s, Y; t, X), \tag{28}$$

et il en résulte que $U(t, X; s, Y)$ satisfait à l'équation adjointe à (1) en tant que fonction du point (s, Y).

Le théorème qui va suivre est une extension de celui de S. Itô [5] relatif à l'équation de la forme (1) aux coefficients bornés.

THÉORÈME 6. – *La solution fondamentale* $U(t, X; s, Y)$ *est non négative dans* $\mathcal{S}(A)$.

Ce théorème résulte aussitôt du théorème précité de S. Itô et du th. 5.

THÉORÈME 7. – *Soient* $U^{(1)}(t, X; s, Y)$ et $U^{(2)}(t, X; s\, Y)$ *les solutions fondamentales des équations*

$$F_0[u] + c^{(1)}(t, X)u = 0, \tag{29}$$

$$F_0[u] + c^{(2)}(t, X)u = 0, \tag{30}$$

les fonctions $c^{(p)}(t, X)$ $(p = 1, 2)$ *satisfaisant à l'hypothèse* (H) *dans* $\mathcal{C}$. *Si l'on a* $c^{(1)}(t, X) \leq c^{(2)}(t, X)$ *dans* $\mathcal{C}$, *on a aussi*

$$U^{(1)}(t, X; s, Y) \leq U^{(2)}(t, X; s, Y) \text{ dans } \mathcal{S}(A). \tag{31}$$

Pour la démonstration on établit d'abord la relation

$$U^{(2)}(t, X; s, Y) = U^{(1)}(t, X; s, Y) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^*(t, X; s, Y),$$

où l'on a

$$U_k^*(t, X; s, Y) = \tag{32}$$

$$= \int_s^t d\tau \int_{\mathcal{E}^m} U^{(1)}(t, X; \tau, \Xi)\,[c^{(2)}(\tau, \Xi) - c^{(1)}(\tau, \Xi)]\, U_{k-1}^*(\tau, \Xi; s, Y)\, d\Xi$$

$$(k = 2, 3, \cdots)$$

et $U_1^*(t\,;X\,;s\,,Y) = U^{(1)}(t\,,X\,;s\,,Y)$. À cet effet on applique l'inégalité (26).

Il résulte de (32) que l'on a $U_k^* \geq 0$ dans $\mathcal{S}(A)\,(k = 1\,,2\,,\cdots)$ et on en déduit aussitôt (31).

10. Le théorème 6 reste valable lorsque la fonction $c(t\,,X)$ est déterminée et satisfait aux hypothèses (H) dans le demi-espace $X \in \mathcal{E}^m, t > 0$ et le domaine de l'existence de la solution fondamentale s'étend au domaine $\Delta : X \in \mathcal{E}^m,\ Y \in \mathcal{E}^m,\ 0 \leq s < t < \infty$. Ceci résulte aussitôt du th. 1 de [7].

Il en est de même du domaine de validité du théorème 7. En effet, observons qu'en posant $U^{(0)} = U^{(2)} - U^{(1)}$, on a

$$\mathcal{F}_0[U^{(0)}] + c_2(t\,,X)\,U^{(0)} = [c_1(t\,,X) - c_2(t\,,X)]\,U^{(1)},$$

et on déduit du th. 1 de [7] l'inégalité $U^{(0)}(t\,,X\,;s\,,Y) \geq 0$ pour $t - s \geq \sigma_0 > 0$, à condition qu'elle ait lieu pour $t - s = \sigma_0$.

Ce dernier théorème s'applique à l'étude de l'allure asymptotique de la solution fondamentale pour $t \to \infty$. Si l'on considère par ex. la solution fondamentale $V(t\,,X\,;s\,,Y)$ de l'équation

$$\Delta v - v'_t + c(t\,,X)\,v = 0,$$

$c(t\,,X)$ étant une fonction satifaisant aux hypothèses (H) pour $X \in \mathcal{E}^m$, $t > 0$ et si l'on a $c(t\,,X) \leq 0$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} V(t\,,X\,;s\,,Y) = 0$ (si $V(t\,,X\,;s\,,Y)$ est déterminée dans le domaine Δ). Pour des autres applications voir [10].

OUVRAGES CITÉS.

[1] F. G. DRESSEL, *The fundamental solution of the parabolic equation.* «Duke math. Journal», *7*, 186–203 (1940); ibid., *13*, 61–70 (1946).

[2] S. D. EIDELMAN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe), «Matiem. Sbornik», *38* (80) n. 1, 51–92 (1956).

[3] J. HADAMARD, *Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, «Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris», *152*, 1148–1149 (1911).

[4] E. HOLMGREN, *Sur la solution élémentaire des équations paraboliques*, «Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik», *15*, n. 24, 1–5 (1921).

[5] S. ITÔ, *On the fundamental solution of the parabolic equation on the differentiable manifold*, «Osaka Math. Journal», vol. 5, n. 1, 75–92 (1953), ibid., vol. 6, n. 2, 167–185 (1954).

[6] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, «Annales de la Soc. Polon. de Math.», *18*, 145–156 (1945), et ibid., *20*, 7–9 (1947).

[7] M. KRZYŻAŃSKI, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, «Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences», Ser. Math., Astron. et Phys., vol. 7, n. 3, 136–139 (1959).

[8] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion*, «Annales de la Soc. Polon. de Math.», *23*, 95–111 (1950).

[9] M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera*, «Math. Annalen», *10*, 701–712 (1929).

[10] A. SZYBIAK, *On the asymptotic behaviour of the solutions of the equation $\Delta u - u_t + c(x)\,u = 0$*, «Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences», Ser. Math., Astron. et Phys., vol. 7 (1959).

Matematica. — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables.* Nota II (*) di José Sebastião e Silva, presentata dal Socio M. Picone.

6. Les para-distributions associées aux opérateurs différentiels du 2d ordre. – Soit C_0^{**} l'espace des fonctions $u(x)$ nulles pour $x < 0$, admettant dérivée seconde localement sommable sur **R**. Nous désignerons maintenant par le symbole $\mathfrak{D}$ tout opérateur du type

$$\mathfrak{D}u = a(x)D^2u + b(x)Du + c(x)u, \qquad \text{pour} \quad u \in C_0^{**}, \tag{6.1}$$

où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des fonctions localement sommables sur **R**, la fonction $1/a(x)$ étant supposée localement sommable et localement bornée. *Chaque opérateur de ce type définit une application linéaire biunivoque de* C_0^{**} *sur* L_0. En effet, l'équation différentielle en u

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x)$$

admet, pour toute $f \in L_0$, une solution unique *dans* C_0^{**}, donnée par l'expression

$$u(x) = \int_0^x R(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = \mathfrak{D}^{-1} f,$$

où la « fonction de Green » $R(x, \xi)$ est, pour tout $\xi \leq x$, une solution de l'équation homogène $a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0$, telle que $R(\xi, \xi) = 0$, $R'_x(\xi, \xi) = 1$ pour tout ξ; nous supposerons en outre $R(x, \xi) = 0$, pour $x < \xi$.

On peut donc concevoir une extension $\tilde{L}_0$ de L_0, comme nous l'avons fait pour les opérateurs différentiels du 1er ordre: les entités formelles du type $\mathfrak{D}^m f$, avec $f \in L_0$ et m entier seront appelées *para-distributions* (*nulles à gauche de* 0) *associées à l'opérateur* $\mathfrak{D}$, *défini par* (6.1).

7. Nouvelle forme du calcul opérationnel. – La formule (2.1) n'est pas directement applicable aux opérateurs différentiels du 2d ordre. Au lieu de l'espace $\mathfrak{A}_\omega$, il faut considérer son image (vectoriel-topologique) par le changement de variable $\varphi(z) \to \varphi(\sqrt{z})$, $\operatorname{Re} z > 0$, où l'on prend $\sqrt{z}$ positive sur le demi-axe réel positif. Nous désignerons par $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$ cet espace image. Soit $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega^{(2)}$ et $\psi(z) = \varphi(z^2)$. Alors $\psi \in \mathfrak{A}_\omega$ et, puisque

$$\frac{1}{z-\lambda} - \frac{1}{z+\lambda} = \frac{2\lambda}{z^2-\lambda^2}, \qquad \text{pour } z \neq \lambda, z \neq -\lambda,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1959.

on démontre que l'on a, en un sens généralisé, *par rapport à la topologie de* $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$:

$$\varphi = \frac{1}{i\pi} \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\lambda \varphi(\lambda^2)}{\hat{z} - \lambda^2} d\lambda,$$

avec $\alpha > 0$, dépendant de φ. On en déduit la formule

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{i\pi} \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\lambda \varphi(\lambda^2)}{\boldsymbol{a} - \lambda^2} d\lambda, \tag{7.1}$$

où $\boldsymbol{a}$ est encore un élément d'une algèbre **A** vérifiant les conditions indiquées au nº 2. On démontre que, pour que cette formule soit applicable, il faut et il suffit que les conditions suivantes soit vérifiées:

I) *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{C}$, *l'élément* $\boldsymbol{a} - \lambda^2$ *de* **A** *est inversible.*

II) *Il existe une fonction* $\boldsymbol{f}(\lambda)$, *à valeurs dans* **A**, *bornée sur tout demi-plan gauche, telle que*

$$\frac{1}{\boldsymbol{a} - \lambda^2} = \frac{\boldsymbol{f}(\lambda) - \boldsymbol{f}(-\lambda)}{2\lambda}.$$

[On vérifie après que $\boldsymbol{f}(\lambda) = (\sqrt{\boldsymbol{a}} - \lambda)^{-1}$].

Cela étant, la formule (7.1) définit un homomorphisme continu $\varphi \to \varphi(\boldsymbol{a})$ de $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$ dans **A**, faisant correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv z$ l'élément $\boldsymbol{a}$ et à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'élément unité de **A**.

8. Le calcul symbolique des opérateurs différentiels du 2^d ordre. – Soit maintenant $\boldsymbol{a}$ l'opérateur différentiel du 2^d ordre $\mathfrak{D}$ défini par (6.1) et $\mathbf{A} = \mathfrak{L}(\tilde{\mathrm{L}}_0)$ où $\tilde{\mathrm{L}}_0$ est l'espace des para-distributions associées à $\mathfrak{D}$ (nulles à gauche de 0). L'élément $\mathfrak{D} - \lambda$ de **A** est évidemment inversible pour tout λ, puisque l'équation

$$a(x)u'' + b(x)u' + [c(x) - \lambda^2]u = f,$$

admet, pour toute $f \in \mathrm{L}_0$, une solution unique dans C_0^{**}:

$$u = \int_0^x \mathrm{R}(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mathfrak{D} - \lambda^2} f.$$

Il reste à voir si la condition II du n° précédent est vérifiée par cet opérateur $\mathfrak{D}$, à la place de $\boldsymbol{a}$. A cet effet nous avons divisé notre étude en trois étapes successives:

1°) Supposons $b(x) = c(x) = 0$, donc $\mathfrak{D} = a(x)\mathrm{D}^2$. On trouve alors le résultat suivant:

La condition II sera vérifiée, si log $a(x)$ *est une fonction réelle de x à variation localement bornée.*

La démonstration, plutôt longue, que nous avons obtenue, découle des considérations heuristiques suivantes: 1) si $1/a(x)$ est une fonction positive *en escalier*, le noyau de $(\mathfrak{D}-\lambda)^{-1}$, nul pour $x<\xi$, est de la forme

$$R(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[A_\xi(\lambda)\,e^{\lambda x\sqrt{1/a(x)}}+B_\xi(\lambda)\,e^{-\lambda x\sqrt{1/a(x)}}\right]$$

dans chaque intervalle à droite de ξ où $1/a(x)$ est constante, les coefficients $A_\xi(\lambda)$, $B_\xi(\lambda)$ étant de forme semblable en λ dans l'intervalle précédent et ainsi de suite jusqu'au premier intervalle à droite de ξ où ils ne dépendent pas de λ; 2) on en déduit que, dans ce cas, la condition II est vérifiée; 3) dans le cas général, la fonction $\log a(x)$ peut être aprochée par des fonctions en escalier et on voit alors, compte tenu de l'hypothèse, que la condition II est encore vérifiée.

2°) Supposons seulement $b(x)\equiv 0$. Ce cas est plus compliqué: la condition II sera vérifié, si, non seulement $\log a(x)$ est une fonction réelle à variation localement bornée, mais aussi la fonction $\log|\lambda^2-c(x)|$ de x est localement à variation bornée, uniformément par rapport à λ avec $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ borné. Cela se vérifie, en particulier, si, pour tout k, l'intervalle $[0,k]$ se décompose en un nombre fini d'intervalles où $a(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions positives et monotones.

3°) Le cas général peut se réduire à l'antérieur par le changement classique d'inconnue $u=v\exp\left[-\frac{1}{2}\int(b/a)\,dx\right]$; mais cela exige que $a(x)$ et $b(x)$ soient absolument continues. Il serait intéressant de faire, dans ce cas, une étude directe, qui évite cette restriction.

9. Le calcul opérationnel de base exponentielle. – Le calcul opérationnel relatif à $\mathfrak{A}_\omega$ nous permet en particulier de définir l'exponentielle symbolique, $e^{-t\boldsymbol{a}}$ ou $\exp(-t\boldsymbol{a})$, où t est un paramètre réel ≥ 0 (cfr. [6], n° 8). On peut alors définir $\varphi(\boldsymbol{a})$, pour toute $\varphi\in\mathfrak{A}_\omega$, en partant de l'exponentielle symbolique, par la formule d'intégration réelle:

$$\varphi(\boldsymbol{a})=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t\boldsymbol{a})\,\Phi(t)\,dt\,,\qquad \text{où}\quad \Phi=\mathfrak{L}^{-1}\varphi\,, \tag{9.1}$$

l'extrême inférieur $-\infty$ pouvant être remplacé par 0 pour toute $\varphi\in\mathfrak{A}_\omega$. Or la formule (9.1) peut être appliquée à d'autres espaces au lieu de $\mathfrak{A}_\omega$. Dans [6] nous avons considéré le cas de l'espace $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$, des fonctions $\varphi(z)=$ $=e^{\alpha z}\psi(z)$, avec $\psi\in\mathfrak{A}_\omega$ et $\alpha\geq 0$, muni d'une topologie convenable; alors les images inverses de Laplace, $\mathfrak{L}^{-1}\varphi$, de φ, sont les distributions de support borné à gauche. Mais il y a encore d'autres cas qui ont beaucoup d'intérêt, *surtout pour la résolution de problèmes de Cauchy*. Il en est ainsi, par exemple, de l'espace (que nous désignerons par $\mathfrak{O}^i$) des fonctions $\varphi(z)$ définies sur l'axe imaginaire, Re $z=0$, indéfiniment dérivables et à décroissance lente sur cet axe; $\mathfrak{O}^i$ est donc l'image, par la rotation $z\to iz$, de l'espace $\mathfrak{O}$ des

fonctions qui ont les mêmes propriétés sur l'axe réel: nous lui donnerons la topologie image de celle de $\mathfrak{O}$, par cette rotation. La transformation de Laplace $\mathfrak{L}$ coïncide alors avec la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ suivie de la rotation $z \to iz$ (cfr. [7], n° 8) et la formule (9.1) sera applicable à un élément $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{A}$, si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées:

I) *L'équation* $\boldsymbol{v}'(t) = -\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}(t)$ *admet, pour* t *réel quelconque, une solution* $\boldsymbol{v}(t)$, *que l'on désigne par* $\exp(-t\boldsymbol{a})$, *telle que* $\boldsymbol{v}(0) = \mathbf{1}$.

II) *Pour tout* t *réel*, $\exp(-t\boldsymbol{a})$ *est un élément inversible de* $\mathbf{A}$ *commutant avec* $\boldsymbol{a}$.

III) *La fonction* $\exp(-t\boldsymbol{a})$ *de* t, *à valeurs dans* $\mathbf{A}$, *est à décroissance lente sur* $\mathbf{R}$.

On peut encore considérer d'autres espaces fonctionnels (algèbres topologiques, comme $\mathfrak{A}_\omega$ et $\mathfrak{O}^i$), que nous désignerons en général par $\mathfrak{H}$. La condition III) varie avec $\mathfrak{H}$; dans le cas où $\mathfrak{H}$ est l'espace des fonctions entières de type exponentiel sur les horizontales et à croissance lente sur les verticales (exemples: e^z, $\sinh z$, etc.), la condition III sera simplement supprimée, la distribution Φ étant toujours à support borné.

Pour appliquer utilement ces résultats au cas des opérateurs différentiels $\mathfrak{D}$ du 1^er^ ordre définis au n° 3, il convient de considérer l'espace, que nous désignerons par L, de *toutes* les fonctions $f(x)$ localement sommables sur $\mathbf{R}$, et d'envisager une extension formelle, $\tilde{\mathrm{L}}$, de L qui permette de prolonger $\mathfrak{D}$ en une application linéaire de L *sur* $\tilde{\mathrm{L}}$. Il y a maintenant une différence, par rapport à L_0: *l'application* $\mathfrak{D}$ *n'est plus biunivoque, son noyau étant formé par les fonctions* $C \exp r(x)$, C constante arbitraire. Mais notre méthode générale d'extension algébrique et topologique est encore applicable à ce cas. Les éléments de $\tilde{\mathrm{L}}$ seront dits les *para-distributions* associées à $\mathfrak{D}$.

Simplement, si l'on veut employer la formule (9.1) avec φ appartenant à l'espace $\mathfrak{O}^i$, il faudra se borner à un sous-espace de $\tilde{\mathrm{L}}$ formé par les *para-distributions à croissance lente*, c'est-à-dire, de la forme $\mathfrak{D}^p f$, où f est une fonction $\in \mathrm{L}$ à croissance lente, cet espace étant muni d'une topologie semblable à celle de l'espace des distributions tempérées, qui en est un cas particulier.

L'exponentielle symbolique $\exp(-t\mathfrak{D})$ peut être *évaluée* de deux manières différentes: ou bien directament, en résolvant le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{D}_x v = 0\,, \qquad \text{avec} \quad v(x\,,0) \equiv v_0(x)\,,\, v_0 \in \mathrm{L}$$

[on aura alors $v = \exp(-t\mathfrak{D})\,v_0$]; ou bien *indirectement*, en employant l'antérieur calcul opérationnel au cas des espaces $\mathfrak{A}_\omega$ et L_0, en décomposant chaque élément F de $\tilde{\mathrm{L}}$ en une somme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(-x)$, avec $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \tilde{\mathrm{L}}$ (ce qui est toujours possible) et en posant $\exp(-t\mathfrak{D}_x)\,\mathrm{F}(x) =$ $= \exp(-t\mathfrak{D}_x)\,\mathrm{F}_1(x) + \exp(-t\mathfrak{D}_x)\,\mathrm{F}_2(x)$, $\exp(t\mathfrak{D}) = 1/\exp(-t\mathfrak{D})$, pour tout t réel.

REMARQUE. – Le calcul opérationnel de base exponentielle pourra encore s'appliquer au cas des opérateurs différentiels du 2^d ordre, mais cela exige des détours qu'il ne serait pas facile de résumer ici.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. KÖNIG, *Multiplikation von Distributionen I*, «Mathematische Annalen», *128*, pp. 420–452 (1954).

[2] J. LIONS, *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*. «Bull. Soc. Math. France», *84*, pp. 9–95 (1956).

[3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, «Rev. Fac. Ciências Lisboa», 2ª serie A, *4*, pp. 79–186 (1954–55).

[4] —, *Su certe classi di spazi localmente convessi, importanti per le applicazioni*, «Rend. Mat. Univ. Roma», serie V, pp. 388–410 (1955).

[5] —, *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*, «Portugaliae Math.», *14*, pp. 105–132 (1955).

[6] —, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. «Port. Math.», *17*, pp. 1–17 (1958).

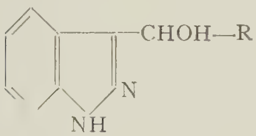
[7] —, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, «Math. Annalen», *136*, pp. 58–96 (1959).

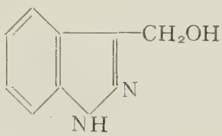
[8] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*. Paris, Gauthier-Villars (1924).

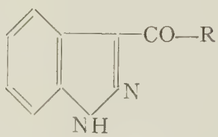
Chimica organica. — *Indazilcarbinoli secondari* [*]. Nota [**] di FRANCO PIOZZI, MIRELLA CECERE e LUCIANA MERLINI, presentata dal Socio A. QUILICO.

Nel corso di ricerche su derivati indazolici abbiamo avuto occasione di rilevare come non sia descritto in letteratura alcun termine degli alchil–(o aril–)–3–indazil–carbinoli di formula generale (I), con R rappresentante un gruppo alchilico o arilico. Solo in un recente lavoro di Snyder e coll. [1] è descritto l'alcool primario corrispondente (II), ottenuto per riduzione del metilestere dell'acido indazol–3–carbossilico con idruro di litio e alluminio.

Poiché disponevamo di alcuni termini della corrispondente serie di chetoni (III), abbiamo sottoposto all'azione di $LiAlH_4$ il 3–acetil–indazolo, il 3–benzoil–indazolo [2], il 3–pivalil–indazolo, il 3–pivalil–5–metil–indazolo e il 3–pivalil–5,7–dimetil–indazolo [3].


(I)


(II)


(III)

Come previsto, la riduzione ha portato all'ottenimento dei rispettivi indazil–carbinoli con resa elevata e senza prodotti secondari; l'anello eterociclico non ha sofferto riduzione,come del resto già riscontrato da Snyder [1] nella sopracitata reazione di $LiAlH_4$ sull'estere metilico e sulle ammidi terziarie dell'acido indazol–3–carbossilico.

I 3–indazil–carbinoli cristallizano agevolmente da alcool etilico acquoso o da miscela benzene–esano in aghetti splendenti o in agglomerati cristallini bianchi; a differenza dai chetoni di partenza essi non sono solubili negli idrati alcalini. Lo spettro IR è in perfetto accordo con la struttura (I): è presente la coppia di bande dell'ossidrile secondario ed è scomparsa la banda del carbonile. A titolo di esempio riportiamo lo spettro del terz. butil–3–(5–metil)–indazil–carbinolo con la coppia di bande a 1305 e 1075 cm^{-1}, mentre è assente la banda del carbonile che giaceva a 1635 cm^{-1} nello spettro del 3–pivalil–5–metil–indazolo [4].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C. N. R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1959.

(1) H. R. SNYDER, G. B. THOMPSON e R. L. HINMAN, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 2009 (1952).

(2) Preparati secondo J. MEISENHEIMER e A. DIEDRICH, « Ber. », *57*, 1715 (1924).

(3) Preparati come descritto da F. PIOZZI e M. DUBINI, « Gazz. Chim. Ital. », *89*, 638 (1959).

(4) Confronta F. PIOZZI e M. DUBINI, loc. cit.

Gli spettri UV dei 3–indazil–carbinoli differiscono notevolmente da quelli dei chetoni corrispondenti: invece dei massimi di assorbimento a 300–310, 240–245 e 235–240 mμ con un profondo minimo nella zona 250–260 mμ [4],

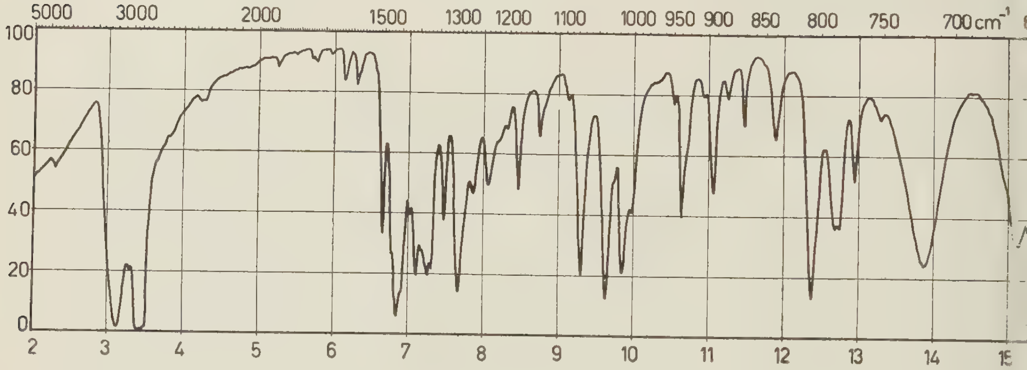


Fig. 1. – Spettro IR in olio di paraffina del terz. butil–3–(5–metil)–indazil–carbinolo.

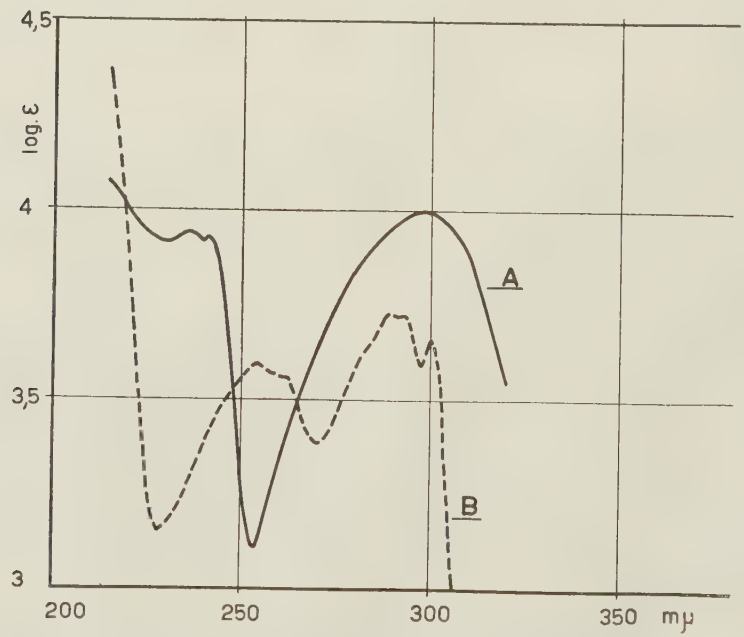


Fig. 2. – Spettri UV in soluzione alcoolica del 3–acetil–indazolo (A) e del metil–3–indazil– carbinolo (B).

si notano tre massimi ben individuati nelle zone 300–310, 290–300 e 255 mμ, e due minimi nelle zone 270 e 230 mμ circa. Gli spettri delle cinque sostanze sono assolutamente analoghi e sovrapponibili in buona parte: anche il fenil–3–indazil–carbinolo si comporta allo stesso modo, causa l'assenza di coniu-

gazione del fenile col nucleo indazolico (coniugazione che era invece presente nel 3–benzoil–indazolo e ne modificava profondamente lo spettro UV). Nella tabella seguente sono raccolti i dati in proposito, mentre a titolo di esempio viene riportato lo spettro del metil–3–indazil–carbinolo, confrontato con quello del 3–acetil–indazolo.

Sostanza	1° max		2° max		3° max	
	mμ	log ε	mμ	log ε	mμ	log ε
Metil–3–indazil–carbinolo	300	3,66	289	3,73	254	3,59
Fenil–3–indazil–carbinolo	301	3,70	290	3,78	255	3,62
Terz. butil–3–indazil–carbinolo	301	3,70	290	3,76	255	3,58
Terz. butil–3–(5–metil)–indazil–carbinolo	309	3,67	297	3,74	256	3,58
Terz. butil–3–(5,7–dimetil)–indazil–carbinolo	309	3,69	298	3,76	256	3,68

Nella parte sperimentale sono descritte brevemente la preparazione e le caratteristiche delle cinque sostanze.

Parte sperimentale.

Metil–3–indazil–carbinolo.

In 250 cm³ di etere anidro (conservato su $LiAlH_4$) si scioglie 1 g di 3–acetil–indazolo; si aggiungono 3 g di $LiAlH_4$ e si bolle a ricadere per sei ore.

Distrutto l'eccesso di idruro, si aggiungono 50 cm³ di acqua e si separa lo strato etereo; lo strato acquoso viene estratto con etere che si riunisce al precedente. L'etere viene lavato con acqua, seccato e svaporato. Il residuo ottenuto è pastoso ma solidifica dopo breve tempo: cristallizzato da miscela benzene–esano si separa sotto forma di aghetti bianchi e duri riuniti a ciuffi; p. f. 113°–114°. Analisi:

	trov. %	C 66,78	H 6,19
per $C_9H_{10}ON_2$	calc.	C 66,65	H 6,22

Fenil–3–indazil–carbinolo.

Si separa da alcool etilico acquoso (1 : 1) come polvere bianca microcristallina; p. f. 166°. Analisi:

	trov. %	C 74,73	H 5,48
per $C_{14}H_{12}ON_2$	calc.	C 74,99	H 5,38

Terz. butil-3-indazil-carbinolo.

Si separa da alcool etilico acquoso (1 : 1) come conglomerato bianco microcristallino; p. f. 172,5°-173°. Analisi:

	trov. %	C 70,17	H 7,80
per $C_{12}H_{16}ON_2$	calc.	C 70,56	H 7,90

Terz. butil-3-(5-metil)-indazil-carbinolo.

Cristallizza da alcool etilico acquoso (1 : 1) in aghetti bianchi lucenti, p. f. 209°. Analisi:

	trov. %	C 71,33	H 8,47
per $C_{13}H_{18}ON_2$	calc.	C 71,52	H 8,31

Terz. butil-3-(5,7-dimetil)-indazil-carbinolo.

Si separa da alcool etilico acquoso (1 : 1) come polvere microcristallina bianca; p. f. 128°. Analisi:

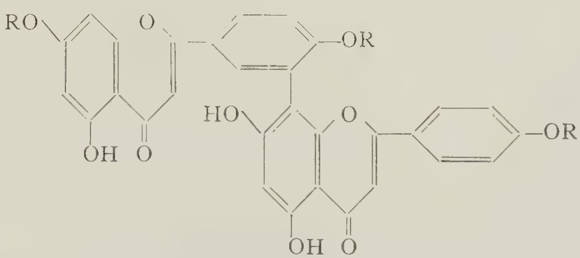
	trov. %	C 72,14	H 8,76
per $C_{14}H_{20}ON_2$	calc.	C 72,38	H 8,68

Chimica organica. — *Su componenti flavonoidi isolati da* Taxus baccata *L.* (*). Nota II (**) di GAETANO DI MODICA, PIER FILIPPO ROSSI e ANNA MARIA RIVERO, presentata dal Socio A. QUILICO.

In una precedente Nota [1] è stato descritto l'isolamento da estratti eterei di *Taxus baccata* L. e l'identificazione di un composto a p. f. 294°–296°, insolubile in metanolo, che è risultato essere la sciadopitisina; per questa sostanza, isolata in altre conifere, W. Baker e N. Kawano hanno proposto una struttura biflavonica del tipo (I) consistente in due molecole di flavone unite in 3'–8'' [2]. Nella stessa Nota veniva segnalata la presenza di altre sostanze di natura flavonica, solubili in metanolo. Proseguendo lo studio di questa frazione abbiamo isolato due nuovi flavoni fondenti rispettivamente a 310° C (con decomposizione) e a 212°–215° C.

Questi due flavoni sono presenti negli estratti di *Taxus* in proporzione molto inferiore a quella della sciadopitisina, che rappresenta all'incirca il 90 °/₀ della componente flavonica del *Taxus baccata* L. L'isolamento è stato effettuato concentrando la soluzione metanolica, ottenuta come descritto nella Nota precedente, e per ricristallizzazione, previa purificazione su colonna di cellulosa, da metanolo stesso. Un tentativo di estrazione con trielina di foglie di *Taxus*, preventivamente sgrassate con etere di petrolio, ha dato praticamente gli stessi risultati.

La separazione delle due nuove sostanze si effettua in base alla loro differente solubilità in metanolo. Il composto meno solubile fonde a 310° C con decomposizione, quello più solubile fonde a 212°–215° C; gli R_f ottenuti per cromatografia su carta Whatman n° 1 (eluente butanolo–ac. acetico–acqua 40 : 10 : 50) sono rispettivamente 0,92 e 0,94: entrambe le sostanze presentano la reazione di Shinoda positiva con colorazione rosa–aranciato e, sottoposte a demetilazione con HI, forniscono una sostanza identica ed eguale al demetilderivato della sciadopitisina (II)



(I) $R = CH_3$

(II) $R = H$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Torino.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1959.

(1) G. DI MODICA, P. F. ROSSI, A. M. RIVERO, «Atti Accad. Naz. Lincei» [VIII], *26*, 785 (1959).

(2) Per una completa bibliografia vedi (1).

In base a questi dati riteniamo di poter assegnare ai due composti una struttura fondamentale di biflavone identica a quella della sciadopitisina, secondo la formula proposta da W. Baker e N. Kawano. Ad ulteriore conferma di questa struttura il demetilderivato è stato acetilato e l'acetilderivato confrontato con quello ottenuto dal demetilderivato della sciadopitisina: il misto non abbassa il punto di fusione e il dosamento degli acetili conferma l'identità dei prodotti.

Il composto a punto di fusione 310° contiene cinque ossidrili liberi, come risulta dalla determinazione del numero di acetile del suo acetilderivato, fondente a 270° C con decomposizione. Il composto a punto di fusione 212°-215° contiene invece tre ossidrili liberi come risulta pure dalla determinazione del numero di acetile del suo acetilderivato (punto di fusione 165°–168°).

Gli spettri U. V. di queste sostanze presentano massimi di assorbimento a 271 e a 332–335 mμ (sciadopitisina λ_{max} 270 e 330 mμ); per aggiunta di acetato sodico il primo massimo rimane invariato mentre il secondo si sposta a 340–342 mμ; con etilato sodico il primo massimo si sposta a 284 mμ [3].

Riassumiamo nella tabella le caratteristiche più significative da noi riscontrate nei flavoni isolati dal *Taxus baccata* L.

TABELLA.

Flavone	p. f.	acetilderiv. p. f.	demetilder. p. f.	λ_{max} (EtOH)	λ_{max} (EtOH+base)
Sciadopitisina . . .	294–6°	264–6°	258–61°	270	284
Flavone 310. . . .	310° (dec)	270° (dec)	260–62°	271	284
Flavone 212. . . .	212–5°	165–8°	260–62°	271	284

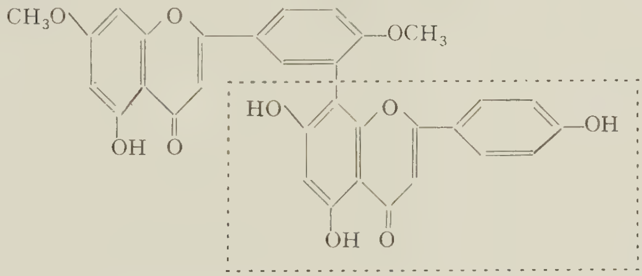
Allo stato attuale del nostro lavoro, nell'attesa di ottenere maggiori quantità dei due flavoni con elaborazione di nuovi estratti di *Taxus baccata* L., riteniamo di poter proporre le seguenti deduzioni:

per il flavone 212 una struttura isomera di quella della sciadopitisina, con diversa distribuzione dei metossili, mantenendo libere le posizioni 5 e 5″ come risulterebbe dall'evidenza spettrale (spostamento dei massimi per effetto di base), dal risultato di reazioni cromatiche (reazione di Wilson positiva) e per analogia con le strutture biflavoniche finora proposte;

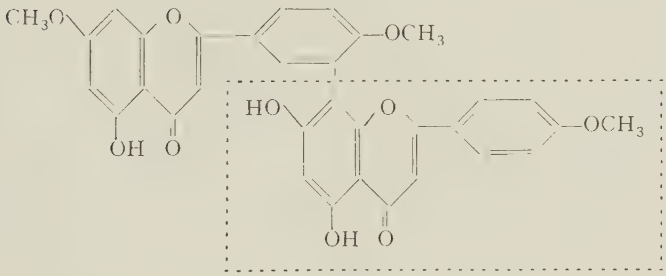
per il flavone 310, mantenendo le considerazioni su esposte per quanto riguarda le posizioni 5 e 5″, trattandosi di un mono-metossi-penta-idrossi-derivato, si potrebbe proporre una struttura risultante dall'unione (secondo i

(3) T. A. GEISSMAN, *Absorption Spectra of Flavonoid compounds*, in «Moderne Methoden der Pflanzenanalyse», vol. III, Springer, Berlino 1955.

presupposti biogenetici formulati per altri biflavoni) delle due metà flavoniche di ginkgetina e sciadopitisina, che differiscono tra loro e che sono messe in evidenza nelle due formule (III) e (IV), sempre nei limiti dell'esattezza delle formule proposte per i composti di questa classe.



(III)



(IV)

Parte sperimentale.

Isolamento. – Da 5 kg. di foglie di *Taxus baccata* L. si sono ottenuti circa 200 mg di flavone 310 (p. f. 310°) e circa 50 mg di flavone 212 (p. f. 212–215°) per cristallizzazione da metanolo. Con tre cristallizzazioni si è ottenuta una buona separazione del flavone 212, più solubile, dal flavone 310, meno solubile.

Demetilazione. – Per demetilazione di entrambi i flavoni studiati si ottiene un prodotto a punto di fusione 260–262°.

Analisi:

per $C_{30}H_{18}O_{10} \cdot 3H_2O$	trov. %	C 60,53	H 4,65
	calc. %	C 60,80	H 4,09

Acetilando il prodotto della demetilazione si ottiene l'esa-acetilderivato della demetilsciadopitisina, p. f. 234–235°.

Analisi:

per $C_{42}H_{30}O_{16} \cdot H_2O$	trov. %	C 62,30	H 4,30
	calc. %	C 62,38	H 3,99

Determinazione degli acetili:

trov. CH_3CO °/o 29,44
calc. CH_3CO °/o 28,36

Acetilazione. – Per acetilazione con anidride acetica e piridina anidra del flavone 212 si ottiene un acetilderivato che cristallizzato due volte da etanolo fonde a 165–168°.

Determinazione degli acetili:

trov. CH_3CO °/o 19,56
calc. CH_3CO °/o 18,27

Preparando in maniera analoga l'acetilderivato del flavone 310, dopo due cristallizzazioni da etanolo, si ottiene un prodotto bianco-giallino che a 270° fonde decomponendosi.

Determinazione degli acetili:

trov. CH_3CO °/o 29,44
calc. CH_3CO °/o 28,36

Petrografia. — *La distribuzione del sodio e del potassio nelle rocce del Massiccio del Gran Paradiso* (*). Nota II di EZIO CALLEGARI e ALESSANDRO MONESE, presentata (**) dal Socio A. BIANCHI.

CONFRONTO DEI RISULTATI SPERIMENTALI CON I DATI OFFERTI DA R. MICHEL.

In una precedente Nota [5] abbiamo offerto e commentato i risultati sperimentali da noi ottenuti con la determinazione degli alcali in numerose rocce scelte a rappresentare i principali tipi petrografici del Gran Paradiso.

Nella Tabella III poniamo ora a confronto i valori degli alcali da noi ottenuti con i valori di Na_2O e K_2O riportati da R. Michel [6] nella Memoria geologico-petrografica sul Massiccio del Gran Paradiso, relativi a rocce analoghe a quelle che sono state da noi analizzate. Per alcune facies (graniti gneissici e gneiss occhiadini) abbiamo considerato anche i dati analitici di C. Viterbo [7].

Poiché le analisi non sono state eseguite su campioni rigorosamente identici, è ovvio attendersi qualche moderata variazione nei risultati analitici. Le differenze riscontrate sono però in alcuni casi molto forti, come ad esempio per il granito di Scalari, per gli gneiss occhiadini di Ceresole, per gli scisti granatiferi ad albite di Noasca ed, in parte, anche per gli scisti di Locana.

Negli ultimi due casi tali differenze possono tuttavia essere ancora giustificabili con la scelta del campione, trattandosi di rocce appartenenti a due gruppi eterogenei, come abbiamo già messo in evidenza nella prima parte del nostro lavoro.

Le differenze osservate sono invece ingiustificabili con la sola scelta del campione, nel caso di rocce sufficientemente omogenee quali il granito gneissico a tessitura massiccia di Scalari e gli gneiss granitici occhiadini o ghiandolari di Ceresole e di Scalari.

Del granito gneissico di Scalari abbiamo eseguito 2 analisi su campioni prelevati in punti diversi ed in entrambi i casi il contenuto di Na_2O da noi trovato è nettamente superiore (vedi Tabella III) a quello trovato da C. Rouger e riportato da R. Michel (op. cit. pag. 114) nella Memoria geologico-petrografica sul Gran Paradiso.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 1° giugno 1959.

(5) E. CALLEGARI e A. MONESE, *La distribuzione del sodio e del potassio nelle rocce del Massiccio del Gran Paradiso*. Nota I. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XXVII, pp. 60–70.

(6) R. MICHEL, *Les Schistes Cristallins des Massifs du Grand Paradis et de Sesia-Lanzo (Alpes Franco-Italiennes)*, « Sciences de la Terre », vol. I, N.ri 3–4, Nancy 1953, con una cartina geologica alla scala 1:100.000.

(7) C. VITERBO, *La composizione chimico-petrografica di alcune rocce tipiche del Gran Paradiso*, « Rend. Soc. Miner. Ital. », vol. XV, 1959.

TABELLA III.

Tipi petrografici	Na_2O %	K_2O %	Na_2O/K_2O mol.
A) Granito di anatessi di Scalari (Michel)	1,53	5,10	0,44
Granito a due miche di Scalari (Viterbo)	2,89	4,72	0,93
Granito di Scalari (Callegari–Monese)	2,95	4,88	0,92
Granito di Scalari (Callegari–Monese)	3,10	5,66	0,83
A′) Granito porfiroide di Piantelessio (Michel)	2,27	5,59	0,62
Granito a due miche di Piantelessio (Viterbo)	2,63	4,90	0,82
Granito di Piantelessio (Callegari–Monese)	2,60	5,02	0,79
Granito di Piantelessio, Alpe Trucco (Callegari–Monese)	2,71	4,74	0,87
A″) Granito porfiroide di Lazinetto (Michel)	2,04	5,02	0,62
Granito di Lazinetto (Callegari–Monese)	2,95	4,75	0,94
Granito di Lazinetto (Callegari–Monese)	3,35	4,45	1,14
B–C) Embrechite occhiolata di Ceresole (Michel)	1,52	3,97	0,57
Gneiss occhiadino di Ceresole (Viterbo)	3,40	4,54	1,14
Gneiss occhiadino a grana grossa di Ceresole (Callegari–Monese)	3,42	4,50	1,15
Gneiss occhiadino a grana grossa, fra Scalari e Noasca (Callegari–Monese)	3,21	4,63	1,05
Gneiss occhiadino a grana media di Scalari (Callegari–Monese)	3,56	4,79	1,13
B–C) Embrechiti occhiolate Valle Valeille (Michel)	3,13	3,94	1,24
Gneiss ghiandone di Valle Valeille (Callegari–Monese)	3,27	5,46	0,91
Gneiss occhiadino a grana media di Valeille (Callegari–Monese)	3,63	4,49	1,23
D) Gneiss albitico–granatifero a due miche di Scalari, sopra Noasca (Michel)	3,92	0,67	0,90
Gneiss migmatitico–granatifero a due miche, con albite e ortoclasio, sopra Noasca (Callegari–Monese)	2,47	4,00	0,94
E) Embrechite albitica occhiadina di Fornello, sopra Locana (Michel)	3,31	3,96	1,27
Gneiss albitico a due miche, poco sopra Locana (Callegari–Monese)	4,23	3,17	2,02
Gneiss minuto albitico–ortoclasico a due miche, con epidoto, associato al precedente, poco sopra Locana (Callegari–Monese)	3,67	3,65	1,53

Poiché le due analisi da noi eseguite sul granito gneissico di Scalari sono sostanzialmente concordanti fra loro, abbiamo ragione di ritenere che il contenuto di Na_2O, ricavato facendo la media delle due analisi (Na_2O = 3,02 %), possa essere assunto come valore rappresentativo per questa massa granitica. Inoltre tale valore di Na_2O è praticamente eguale a quello degli altri graniti gneissici del Massiccio del Gran Paradiso (granito di Piantelessio, di Migliere, di Lazin), ed è pure in accordo con i valori ottenuti da C. Viterbo per i graniti di Scalari e di Piantelessio.

Ne consegue che, nella migliore delle ipotesi, il valore Na_2O = 1,53 % trovato da C. Rouger e riportato da R. Michel, si deve ritenere anomalo e non può quindi essere assunto come rappresentativo della massa granitica di Scalari.

Ad analoghe conclusioni si giunge confrontando il valore di Na_2O (1,52 %) trovato da H. Brousset e riportato da R. Michel (op. cit. pag. 129), con i valori di Na_2O da noi trovati su 3 campioni dello gneiss occhiadino di Scalari-Ceresole, prelevati in punti differenti.

I tre valori da noi ottenuti sono perfettamente concordanti fra loro (Tabella III); infatti Na_2O varia da 3,21 % a 3,56 %, K_2O fra 4,50 % e 4,79 %, ed il rapporto molecolare Na_2O/K_2O è compreso fra 1,05 e 1,15. Questi valori concordano anche con l'analisi del gneiss occhiadino del lago di Ceresole eseguita da C. Viterbo che ha trovato Na_2O = 3, 40 % e K_2O = 4,54 %.

Nel tipo analizzato da H. Brousset (e riportato da R. Michel, op. cit. pag. 129) si trovano invece i seguenti valori: Na_2O 1,52 % e K_2O = 3,97 %, cosicché ne deriva un rapporto molecolare Na_2O/K_2O = 0,57. È evidente che il tipo analizzato da H. Brousset non può essere preso come rappresentativo per la facies media del gneiss occhiadino della zona di Ceresole.

Anche per i graniti di Piantelessio e di Lazinetto i rapporti molecolari Na_2O/K_2O offerti da R. Michel risultano notevolmente inferiori a quelli da noi trovati.

Osservazioni critiche.

Come abbiamo sufficientemente dimostrato, il contenuto in alcali, specialmente in sodio, del granito gneissico di Scalari e del gneiss occhiadino di Ceresole, non può essere rappresentato dai valori offerti dalle analisi di C. Rouger e di H. Brousset e riportati da R. Michel.

Il contenuto di Na_2O trovato dai predetti analisti nell'*unica analisi* eseguita per ciascuna delle due rocce summenzionate, è notevolmente inferiore ai valori medi da noi dedotti *da una serie di analisi.*

Ne consegue che i valori degli alcali ottenuti da H. Brousset e da C. Rouger rispettivamente per il «granito di anatessi» di Scalari e per l'«embrechite occhiolata» di Ceresole non possono essere utilizzati per una seria interpretazione petrogenetica delle rocce del Massiccio del Gran Paradiso.

Al contrario R. Michel attribuisce a queste 2 analisi, specialmente al contenuto di Na_2O, una importanza fondamentale per trarre conclusioni petrogenetiche di notevole entità che avrebbero richiesto una serie ben più ricca di dati analitici.

Infatti, basandosi solamente su tre analisi di « embrechiti occhiolate » prese rispettivamente ai Laghetti di Ceresole (parte inferiore della serie), al Becco dell'Alpetta (parte media della serie) e nella Valle di Valeille (parte superiore della serie), R. Michel trae le seguenti conclusioni (op. cit. pag. 129):

« Si l'on veut bien se rappeler que la teneur en Na_2O du granite d'anatexie fondamental des Scalari est de 1,53 (Analyse 12), on constate bien, grâce aux analyses précédentes, que l'albitisation dans les zones inférieures des embréchites ne montre pas de progression par rapport au granite d'anatexie fondamental. Par contre, les teneurs en soude sont en augmentation constante au fur et à mesure qu'on s'élève dans la série.

On voit, par ailleurs, que, si on excepte l'augmentation progressive des teneurs en soude et la diminution graduelle des teneurs en silice, les autres constituants chimiques des embréchites subissent des variations peu importantes ou nulles ».

Queste deduzioni vengono riprese dall'autore nella parte conclusiva della Memoria geologico-petrografica sul Gran Paradiso (op. cit. pag. 271).

Ben più gravi sono le conclusioni a carattere generale riguardanti l'essenza stessa del processo metasomatico tratte da R. Michel sempre sulla base delle tre analisi di embrechiti summenzionate e di quella del granito di Scalari. Infatti si legge (op. cit. pag. 279):

« Mais il convient en outre de remarquer que les zones les plus profondes de la série polymetamorphique des Alpes Graies (granite d'anatexie des Scalari, majeure partie de la série des embréchites du Grand Paradis) ne sont que peu ou pas affectées par la métasomatose sodique et que leur teneur en soude est même relativement faible si on la compare par exemple à celle des embréchites classiques du Massif Central dont M. Roques ([1941], p. 414 et suiv.) a publié des analyses chimiques. Au contraire les embréchites de la partie supérieure de la série du Grand Paradis, les ectinites de la couverture..... sont, comme on l'a vu, anormalement riches en soude. L'enrichissement en soude des roches de la couverture est donc en quelque sorte compensé par un appauvrissement en soude des roches du socle. Cette constatation conduit à admettre que le matériel sodique diffusé par la métasomatose alpine peut avoir, au moins en partie, une origine relativement peu profonde qui se situerait dans le vieux socle migmatitique ».

Di fronte a tali asserzioni dobbiamo precisare quanto segue:

1) Fra i graniti gneissici massicci (Scalari, Piantelessio, Migliere, Lazin) e gli gneiss ghiandoni, occhiadini e fettucciati (« embrechiti » sec. R. Michel) esiste bensì una certa differenza nel contenuto in alcali, sopratutto in Na_2O, che negli gneiss è sempre un po' più elevato, come risulta dal valore leggermente superiore del rapporto molecolare Na_2O/K_2O calcolato per i due gruppi; ma questa differenza fra i due tipi di roccia è praticamente tras-

curabile ed in ogni caso è notevolmente inferiore a quella che R. Michel vorrebbe assumere a base della sua interpretazione.

2) L'ipotesi di R. Michel circa il progressivo aumento del tenore di Na_2O dal basso all'alto nella serie delle così dette « embrechiti » non è accettabile poiché il contenuto in Na_2O degli gneiss ghiandoni ed occhiadini si mantiene pressoché costante in tutto il massiccio del Gran Paradiso, come risulta chiaramente dalle numerose determinazioni degli alcali da noi eseguite e dalla costanza del rapporto molecolare Na_2O/K_2O.

3) Non trova sostegno quindi l'affermazione generale del Michel (op. cit. pag. 279) che le zone più profonde della serie « polimetamorfica » delle Alpi Graie (« granito di anatessi di Scalari » e la maggior parte delle « embrechiti » del Gran Paradiso) presenti un *debole* tenore in Na_2O, in quanto il contenuto in sodio del granito di Scalari ($Na_2O = 3{,}02\ \%$) in base alle nostre analisi risulta essere circa il doppio di quello trovato da C. Rouger e leggermente inferiore, ma dello stesso ordine di grandezza di quello che si trova in tutta la serie degli gneiss occhiadini e ghiandoni ove il tenore medio di sodio ($Na_2O = 3{,}42\ \%$) è relativamente elevato.

Zoologia. — *Ricerche sull'osmoregolazione nelle anguille gialle e nelle anguille argentine* [*]. Nota [**] di Giuseppe Colombo e Sandra Cecchini, presentata dal Corrisp. U. D'Ancona.

Nel 1931 Key [1] ha dimostrato che nell'anguilla (*Anguilla anguilla* L.) i cloruri sono eliminati per via extrarenale; egli e Willmer (1932) [2] hanno indicato le grosse cellule acidofile che si trovano alla base dei filamenti branchiali come i probabili elementi che svolgono tale funzione.

Questa ipotesi è stata criticata da Bevelander (1935) [3] e recentemente da Parry, Holliday e Buxter (1959) [4] principalmente per il fatto che cellule colle stesse caratteristiche morfologiche si trovano distribuite in tutta la cavità faringea e branchiale dei Pesci. Queste cellule vengono considerate dai suddetti Autori come cellule mucose più o meno trasformate.

La funzione di secernere e forse anche di assorbire cloruri da parte delle cellule acidofile delle branchie è stata dimostrata in *Fundulus heteroclitus* da Copeland (1948) [5] con il metodo istochimico di Leschke. In *Fundulus* queste cellule mostrano inoltre dei regolari cambiamenti delle caratteristiche del citoplasma in relazione all'adattamento all'acqua dolce ed all'acqua di mare (Copeland 1950) [5]. Questi cambiamenti non sono stati osservati da Getman (1950) [6] in *Anguilla rostrata*.

L'anguilla europea (*A. anguilla* L.) abitualmente vive nelle acque dolci allo stadio di anguilla gialla, migra al mare allo stadio di argentina. È ovvio supporre che nella metamorfosi da gialla ad argentina cambino anche i meccanismi di osmoregolazione e che a questo cambiamento sia correlata la tendenza di migrare al mare delle argentine.

Abbiamo perciò studiato con i metodi istologici e con alcuni metodi istochimici (metodo di Leschke per i cloruri modificato da Copeland (1948) [5], metodo di MacManus e del mucincarminio per le cellule mucose, metodo di

(*) Dall'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università di Padova, diretto dal prof. U. D'Ancona.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1959.

(1) A. Key, *Chloride and water secretion and absorption by the gills of the eels*, «Zeitschr. f. vergh. Physiol.», vol. 15, 364–388 (1931).

(2) A. Key e N. Willmer, «*Chloride secreting*» *cells in the gills of Fishes with special references to the common eel*, «J. of Physiol.», vol. 76, 368–378 (1932).

(3) G. Bevelander, *A comparative study of the branchial epithelium in Fishes*, «J. of Morph.», vol. 57, 335–348 (1935).

(4) J. Parry, F. G. T. Holliday e J. M. S. Buxter, «*Chloride secretory*» *cells in the gills of Teleosts*, «Nature», vol. 183, 1248–1249 (1959).

(5) D. E. Copeland, *The cytological basis of chloride transfer in the gills of* Fundulus heteroclitus, «J. of Morph.», vol. 82, 201–227 (1948); *Adaptive behavior of the chloride cells in the gills of* Fundulus heteroclitus, «J. of Morph.», vol. 87, 369–380 (1950).

(6) M. C. Getman, *Adaptive changes in the chloride cells of* Anguilla rostrata, «Biol. Bull.», vol. 99, 439–445 (1950).

Gomori per le fosfatasi) le lamine branchiali di anguille gialle e di anguille argentine adattate all'acqua dolce ed all'acqua di mare.

In tutte le anguille le cellule acidofile sono chiaramente riconoscibili alla base dei filamenti branchiali e con le caratteristiche citologiche descritte da Key e Willmer 1933 [2] e da Bevelander 1936 [3].

Nelle anguille argentine d'acqua di mare si è trovata una netta reazione positiva *per i cloruri* in quasi tutte le cellule acidofile delle branchie. Nelle anguille argentine provenienti dall'acqua dolce e nelle gialle provenienti dall'acqua di mare poche cellule acidofile presentano reazione positiva. Nelle anguille gialle provenienti dall'acqua dolce la reazione è risultata completamente negativa.

Cellule mucose, identificate col mucincarmio o colla reazione di Mac Manus, sono state trovate alla base dei filamenti branchiali in tutte le anguille; la loro frequenza sembra avere un andamento inverso alla presenza di cellule con reazione positiva per i cloruri.

La reazione di Gomori per la fosfatasi alcalina è risultata nelle branchie sempre e nettamente negativa. È risultata invece positiva nei tubuli convoluti prossimali del rene in tutte le anguille, contrariamente a quanto è stato descritto per l'*A. rostrata* (Browne, Pitts e Pitts 1950) [7].

I risultati delle ricerche qui riferite confermano l'ipotesi di Key e Willmer che in acqua di mare le anguille argentine eliminano cloruri attraverso particolari cellule delle branchie. Probabilmente i cloruri non vengono assorbiti attraverso le branchie. Ciò è in accordo con quanto ha trovato Krogh (1939) [8] che in acqua dolce le anguille trattengono i cloruri ma non sono capaci di assorbirli.

Nelle anguille gialle la funzione escretrice dei cloruri attraverso le branchie non sembra sviluppata.

La trasformazione da gialle ad argentine che è correlata all'attività della tiroide (Fontaine e Callamand 1942) [9] ed alla differenziazione sessuale (D'Ancona 1949) [10] è accompagnata da un cambiamento dei meccanismi di osmoregolazione ed in particolare dalla acquisizione della capacità di eliminare cloruri attraverso le branchie.

Altre ricerche sono in corso principalmente allo scopo di studiare l'osmoregolazione nelle anguille gialle poiché soltanto alcuni (Fontaine e Callamand 1943 [11], Koch 1949 [12]) degli Autori che si sono occupati di questo argomento hanno tenuto conto dello stadio di sviluppo degli animali studiati.

(7) J. BROWNE, M. W. PITTS e R. F. PITTS, *Alkaline phosphatase activity in kidneys of glomerular and aglomerular marine Teleosts*, «Biol. Bull.», vol. 99, 152–156 (1950).

(8) A. KROGH, *Osmotic regualtion in acquatic animals*, Cambridge Univ. Press. (1939).

(9) M. FONTAINE e O. CALLAMAND, *L'activité thyroidienne de l'Anguille au cours de son developpement*, «Arch. Zool. Exp. et Gen.», vol. 82, 129–136 (1959).

(10) U. D'ANCONA, *Condizioni ambientali e correlazioni umorali sul differenziamento sessuale e nello sviluppo dell'Anguilla*, «Verh. Int. Ver. Limnologie», vol. 10, 126 (1949).

(11) M. FONTAINE e O. CALLAMAND, *Les aspects physiologique d'un «vie cyclique» de l'Anguille d'Europe* (Anguilla anguilla *L.*), «Bull. Mus. Hist. Nat.», vol. 15, 373–378 (1943).

(12) M. J. KOCH, *Quelques caractéristique osmotiques de l'Anguille femelle jaune et argentée*, «Arch. int. Physiol.», vol. 57, 125–132 (1949).

Biologia. — *Ricerche sul metabolismo del glicogeno negli spermi di* Ciona intestinalis *(Ascidie)* (*). Nota (**) di Rosa Lentini, presentata dal Socio G. Cotronei.

Gli spermi flagellati essendo mobilissimi, si presenta di un certo interesse il ricercare i materiali da cui essi attingono energia per il movimento, e il meccanismo con il quale tale energia è liberata e utilizzata.

1. Per quanto concerne gli spermi dei Mammiferi, questi posseggono glicogeno in quantità minime, e la loro energia di movimento viene ricavata dalla utilizzazione del fruttosio che è molto abbondante nel liquido seminale [1]. Il fruttosio viene scisso anaerobicamente in acido piruvico ed acido lattico secondo il noto sistema glicolitico di Embden–Meyerhof: gli acidi che così si formano vengono poi ossidati ad acqua ed anidride carbonica a mezzo del ciclo dell'acido citrico e del complesso dei citocromi [2].

Molti dei metaboliti intermedi e degli enzimi che intervengono nel giuoco della demolizione sono stati identificati; la citocromossidasi e la succino-deidrogenasi furono messe in evidenza indirettamente da Lardy & Phillips [3], Zittle & Zitin [4], MacLeod [5]. Inoltre Mann [6] è riuscito a vedere direttamente al microspettroscopio le bande caratteristiche dei citocromi. L'energia liberata in questi processi viene in parte immagazzinata come adenosintrifosfato (ATP): attività ATPasica è stata dimostrata con lo stesso metodo adoperato da Szent–Györgyi [7] per le fibre muscolari; modelli di cellule spermatiche furono estratte con glicerina: l'aggiunta di ATP produsse un ritmico movimento flagellare [8,9].

2. Diversamente da quanto si verifica nei Mammiferi, gli spermi di riccio di mare ritraggono energia mediante un altro sistema, che richiede ossigeno, e dove il materiale ossidato è dato da fosfolipidi endogeni. I fosfolipidi, localizzati soprattutto nella coda, sono legati a proteine sotto forma di lipoproteidi [10]. Il meccanismo di utilizzazione sarebbe quello comune: essi

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo, sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1959.

(1) T. Mann, *The Biochemistry of Semen*. John Wiley & Sons, New York 1954.

(2) N. P. Shergin, « Anim. Breed. », Abstr. 13, 6 (1940).

(3) H. A. Lardy & P. H. Phillips, « J. Biol. Chem. », *138*, 741 (1941).

(4) C. A. Zittle & B. Zitin, « J. Biol. Chem. », *144*, 99 (1942).

(5) J. MacLeod, « Amer. J. Physiol. », *138*, 512 (1943).

(6) T. Mann, « Biochem. J. », *48*, 386 (1951).

(7) A. Szent–Györgyi, « Biol. Bull. », *96*, 140 (1949).

(8) D. W. Bishop, « Fed. Proc. », *17*, 15 (1958).

(9) H. Hoffmann–Berling, « Biochim. Biophys. Acta », *16*, 146 (1955).

(10) Lord Rothschild & K. W. Cleland, « J. Exp. Biol. », *29*, 66 (1952).

verrebbero prima di tutto idrolizzati, gli acidi grassi liberati verrebbero poi ossidati secondo il ben noto ciclo di Krebs e della fosforilazione ossidativa [11]. La presenza del sistema citocromo–ossidasico e della succino–deidrogenasi fu messa in evidenza da Ball & Meyerhof [12], Barron & Goldinger [13], Rothschild [14], Ghiretti & Libonati [15]. I risultati degli esperimenti fatti tenendo gli spermi in anaerobiosi e trattandoli mediante gli inibitori specifici del sistema citocromo–ossidasico confermano l'esistenza di questo sistema: in anaerobiosi gli spermi perdono la loro mobilità [16]; con CO all'oscurità il consumo di ossigeno diminuisce [14]; lo stesso risultato si ottiene con KCN [17], senza però che sia alterata la mobilità degli spermi. In base a questi studi si ritiene che lo sperma di riccio di mare possieda tutti i componenti del sistema dei citocromi e degli enzimi della glicolisi e che metabolizzi i suoi materiali energetici con lo stesso sistema che è usato dal muscolo e dal lievito.

3. Lo studio degli spermatozoi di *Ciona intestinalis* fatto da Restivo & Reverberi [18] ha dimostrato presenza in essi di notevoli quantità di glicogeno (in media γ 28,06 per mg di peso secco), di citocromo–ossidasi e di succino-deidrogenasi, localizzati il primo nel citoplasma caudale e gli enzimi nel pezzo intermedio.

Il fatto di possedere un alto tasso di glicogeno fa pensare che questo sia appunto il materiale da cui viene ritratta l'energia per il movimento; il fatto, poi, che siano presenti la citocromo–ossidasi e la succino–deidrogenasi suggerisce che il meccanismo attraverso il quale il glicogeno viene utilizzato debba essere simile a quello tipico del muscolo.

Il metabolismo degli spermi di *Ciona* sarebbe quindi simile a quello degli spermi dei Mammiferi; solo che nei primi il materiale energetico è endogeno, nei secondi è extra–cellulare.

Se gli spermi di *Ciona* consumano glicogeno per il movimento è evidente che dovrà osservarsi una diminuzione di esso in seguito al movimento degli spermi stessi. Allo scopo di verificare questa ipotesi, è stato determinato il contenuto di glicogeno degli spermi in tempi diversi di soggiorno in acqua; sono state fatte anche determinazioni del glicogeno di spermi trattati con azide sodico (che ne blocca il movimento) e con ATP.

MATERIALE E METODO.

Le ricerche sono state fatte su spermi di *Ciona intestinalis*, prelevati per incisione degli spermidutti; per ogni esperienza sono stati raccolti insieme gli spermi di numerosi individui.

(11) H. A. LARDY, R. G. HANSEN & P. H. PHILLIPS, «Arch. Biochem.», 6, 41 (1945).
(12) E. G. BALL & MEYERHOF, «J. Biol. Chem.», *134*, 483 (1940).
(13) E. S. BARRON & J. M. GOLDINGER, «Biol. Bull.», *81*, 289 (1941).
(14) Lord ROTHSCHILD, «J. Exp. Biol.», *25*, 15, 219, 344, 253 (1948).
(15) F. GHIRETTI & M. LIBONATI, «Acta Embryol. Morphol. Exper.», *1*, 48 (1957).
(16) E. B. HARVEY, «Biol. Bull.», *58*, 288 (1930).
(17) W. A. ROBBIE, «J. Gen. Physiol.», *31*, 217 (1948).
(18) F. RESTIVO & G. REVERBERI, «Acta Embryol. Morphol. Exper.», *1*, 164 (1957).

Le quantità di glicogeno sono state determinate colorimetricamente con due metodi: *a*) con la reazione all'antrone, come descritto da Morris [19]; *b*) con la reazione di Somogyi [20], dopo idrolisi con NaOH. Dal glucosio così determinato è stato rilevato il quantitativo di glicogeno con il fattore di conversione 1 : 1 , 11.

I dati relativi al glicogeno sono stati riferiti all'azoto totale, determinato mediante Nesslerizzazione diretta.

La significatività delle variazioni del contenuto di glicogeno col tempo (Tabella I) è stata calcolata col test *t* di Student.

Risultati.

A) *Glicogeno negli spermi in condizioni normali.*

Sono state fatte 17 esperienze, in ciascuna delle quali una sospensione omogenea di spermi veniva divisa in 3 parti: in una di esse veniva immediatamente determinato il quantitativo di glicogeno, nelle altre due tale determinazione è stata eseguita rispettivamente dopo 7 e 21 ore. Durante questo tempo la motilità degli spermi veniva controllata al microscopio in campo oscuro.

I risultati sono riassunti nella Tabella I, dalla quale appare evidente che la quantità di glicogeno diminuisce col tempo e cioè in rapporto col movimento degli spermatozoi.

Tabella I.

Quantitativo di glicogeno (in γ/mg N) *di spermi di* Ciona *in tempi diversi.*

Tempo	Metodo all'antrone	P delle differenze tra le medie	Metodo di Somogyi	P delle differenze tra le medie	
0	102 ± 28		127 ± 65		
		$< 0,01$ (0–7 ore)		$< 0,1$ (0–7 ore)	$< 0,01$ (0–21 ore)
7 ore . . .	78 ± 31		96 ± 37		
		$< 0,001$ (7–21 ore)		$< 0,02$ (7–21 ore)	
21 ore	35 ± 15		63 ± 23		

Le differenze tra i dati numerici ottenuti con i due metodi possono attribuirsi alla variabilità tra i diversi lotti di spermi.

(19) D. L. Morris, «Science», *107*, 254 (1948).
(20) M. Somogyi, «J. Biol. Chem.», *160*, 61 (1945).

B) *Glicogeno in spermi trattati con azide sodico.*

In 5 esperienze le sospensioni di spermi sono state divise in 3 lotti, come nel paragrafo precedente; inoltre ogni lotto è stato diviso in due parti, una lasciata in acqua di mare normale, e l'altra trasferita in una soluzione molare di azide sodico in acqua di mare; in questa soluzione il movimento degli spermi è stato completamente paralizzato, come si è controllato al microscopio. Le determinazioni del glicogeno, eseguite rispettivamente al principio dell'esperienza e dopo 7 e 21 ore, hanno dato i risultati riassunti nella Tabella II.

TABELLA II.

Contenuto in glicogeno (γ/mg N) *di spermi trattati con azide sodico* 1 M.

Tempo	Controlli	Spermi trattati con NaN_3
0	94 ± 11	102 ± 13
7 ore	60 ± 15	102 ± 13
21 ore	38 ± 19	100 ± 12

Questi risultati indicano che negli spermi paralizzati, nel loro movimento, dall'azide sodico non ha luogo la diminuzione del contenuto in glicogeno, quale si verifica nei controlli normalmente mobili.

C) *Glicogeno in spermi trattati con* ATP.

Sono state fatte 6 esperienze, analoghe a quelle del tipo precedente, in cui degli spermi sono stati immessi in una soluzione 0,001 M di ATP in acqua di mare. È stato infatti visto [8] che l'ATP è in grado di attivare spermi di Mammiferi, opportunamente trattati; nel caso che lo stesso succeda agli spermi di *Ciona*, è da aspettarsi che a una loro maggiore motilità corrisponda un aumentato consumo di glicogeno.

TABELLA III.

Contenuto in glicogeno (γ/mg N) *di spermi trattati con* ATP 0,001 M.

Tempo	Controlli	Diminuzione proporzionale	Spermi trattati con ATP	Diminuzione proporzionale
0	73 ± 26	17 %	95 ± 40	20 %
7 ore . . .	60 ± 27	53 %	76 ± 33	27 %
21 ore. . . .	28 ± 11		55 ± 26	

Di fatto i risultati (riassunti nella Tabella III) sono stati negativi, perché i lotti trattati con ATP non hanno affatto presentato una diminuzione di glicogeno maggiore di quella dei controlli. È tuttavia da rilevare che l'osservazione al microscopio non ha mostrato alcuna evidente differenza di motilità tra gli spermi controllo e quelli trattati con ATP; si deve ammettere che, contrariamente all'aspettazione, l'ATP, nelle condizioni sperimentali usate, non attiva il movimento degli spermi di *Ciona*; questi, del resto, non erano stati sottoposti ai processi di estrazione che Bishop [8], nelle sue esperienze qui sopra ricordate, aveva usato per gli spermi di Mammiferi.

Conclusione.

Dai risultati esposti risulta che il glicogeno costituisce un substrato da cui gli spermi di *Ciona* ricavano l'energia per il loro movimento.

L'alta percentuale di glicogeno, la sua diminuzione nel tempo, la presenza dei sistemi enzimatici della citocromo–ossidasi e della succino–deidrogenasi [18] ci inducono a concludere che il metabolismo degli spermi di *Ciona* avviene in un primo tempo in anaerobiosi e poi si compie in aerobiosi. Il glicogeno viene forse dapprima scisso in acido piruvico o in acido lattico; questi, poi, vengono ulteriormente ossidati ad acqua ed anidride carbonica.

Il metabolismo degli spermi di Ascidie è dunque simile a quello degli spermi di Mammiferi: solo che negli spermi di Ascidie il substrato è costituito da glicogeno endocellulare, mentre in quelli di Mammiferi esso è dato da fruttosio esogeno.

Biologia. — *Azione della idrossilamina sullo sviluppo di uova di* Ciona intestinalis *(Ascidie)* [*]. Nota [**] di ELEONORA PATRICOLO, presentata dal Socio G. COTRONEI.

L'idrossilamina ha, *in vitro*, spiccata azione inibente su numerosi enzimi, tra cui perossidasi, catalasi, deidrogenasi e tutte le decarbossilasi (cfr. [1, 2]).

Raw [3] riporta che l'ossidazione di diversi substrati operata dai mitocondri del fegato di ratto è fortemente inibita da 0,02 M idrossilamina; l'ossidazione del citocromo *c* ridotto è del tutto inibita: secondo tale Autore, l'inibizione sarebbe dovuta alla combinazione della sostanza con gli enzimi contenenti ferro. D'altra parte l'idrossilamina non inibisce la deidrogenasi alcoolica del lievito [3] ed attiva l'adenosin-deaminasi [1]. Nello sviluppo embrionale questa sostanza è stata usata da Rulon [4] su uova di riccio di mare *Dendraster excentricus*. Questo Autore studiò gli effetti di questo agente sullo sviluppo di tali uova, e li comparò a quelli prodotti da altri agenti. Trattando le uova con idrossilamina M/40.000 Rulon ottenne inibizione della segmentazione, exogastrule e larve che presentavano riduzione di strutture entodermiche, mancanza di sviluppo dello scheletro, ectoderma più sottile e poco differenziato. Notò che l'azione della idrossilamina è simile a quella dell'azide sodico e della tiourea. In base a questi risultati Rulon concluse che le anomalie provocate dall'idrossilamina, sono, almeno in parte, dovute alla combinazione di questa sostanza con gli enzimi contenenti ferro, quantunque vi possano essere altri effetti, forse più specifici, sull'attività di altri enzimi.

Allo scopo di raccogliere ulteriori dati sull'azione di questa sostanza nello sviluppo embrionale, sono state fatte esperienze con uova di *Ciona intestinalis*, e di esse vengono qui riferiti i risultati.

MATERIALE E METODO.

Uova di *Ciona intestinalis*, vergini e a diversi stadi di sviluppo, sono state trattate con cloridrato di idrossilamina disciolto in acqua di mare in

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia della Università di Palermo, sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1959.

(1) J. B. SUMNER & G. F. SOMERS,, *Chemistry and Methods of Enzymes*, Acad. Press., New York (1953).

(2) S. P. COLOWICK & N. O. KAPLAN, *Methods in Enzymology*, vol. II, Acad. Press., New York (1955).

(3) I. RAW, «Science», *118*, 159 (1953).

(4) O. RULON, «Physiol. Zool.», *31*, 28 (1958).

concentrazioni comprese tra 0,01 e 0,00005 M; il pH fu portato a 7,8, come quello dell'acqua di mare, mediante aggiunta di N NaOH. Fu tenuto conto dei risultati degli esperimenti i cui controlli diedero almeno il 75 % di larve normali.

Risultati.

A) *Trattamento delle uova vergini* (10 esperimenti).

Le uova furono tenute per due ore in concentrazioni di idrossilamina tra 0,01 e 0,001 M; dopo tale trattamento furono lavate in acqua di mare normale e fecondate. Lo sviluppo fu fatto avvenire interamente in acqua di mare normale.

Fig. 1. – Trattamento con idrossilamina delle uova vergini.

Da sinistra verso destra: una larva controllo; due larve ottenute dopo trattamento con soluzione 0,01 M; due larve ottenute dopo trattamento con soluzione 0,001 M.

Le uova si segmentarono regolarmente, talvolta con un leggero ritardo rispetto ai controlli; da esse si ebbero larve con accentuate anomalie del cefalenteron. Questo si presentò deforme, senza palpi, come un ammasso di cellule, con macchie pigmentate per lo più esterne e senza un evidente intestino né una vescicola cerebrale. La corda, si dimostrò sempre presente e d'aspetto normale: essa si prolungò dentro il cefalenteron spingendosi anteriormente e spostando a volte le formazioni cefaliche lateralmente, oppure dividendole in due ammassi (fig. 1). La coda si presentò più o meno sviluppata, e più o meno attiva, in proporzione alle concentrazioni di idrossilamina adoperate. In ogni caso essa era bene differenziata o organizzata, benché più corta che nei controlli.

B) *Trattamento delle uova a partire dallo stadio di 2 blastomeri.*

1. Trattamento continuato fino allo stadio di larva. – Sono stati fatti 221 esperimenti. Le uova furono immesse in idrossilamina allo stadio di 2 blastomeri, e ivi lasciate fino a completamento dello sviluppo larvale. Sono state usate 9 diverse concentrazioni comprese tra 0,01 e 0,00005 M. I risultati sono stati diversi, in rapporto alle concentrazioni usate, e possono essere così riassunti.

a) *Soluzione 0,01 M.* – In questa soluzione dopo poche segmentazioni lo sviluppo viene del tutto bloccato.

b) *Soluzioni tra 0,001 e 0,00033 M.* – Anche in queste soluzioni lo sviluppo non procede oltre a un certo stadio, che è quello di gastrula (con 0,001 M), di neurula (0,0005 M) o di bottone caudale (0,00033 M).

c) *Soluzioni tra 0,00025 M e 0,0001 M.* – In queste soluzioni lo sviluppo procede fino allo stadio di larva: ma in tutti i casi il cefalenteron di queste larve è profondamente anomalo, con malformazioni simili a quelle descritte per le uova trattate prima della fecondazione. Precisamente, il cefalenteron è di grandezza ridotta, di forma irregolare, senza alcun organo ben differenziato. Mancano i palpi, l'intestino, e la vescicola cerebrale; sono presenti una o più macchie pigmentate, disposte in superficie. La coda invece è ben distinguibile, e presenta una corda organizzata e vacuolizzata. Essa è tozza, corta e poco mobile, negli embrioni sviluppatisi nelle soluzioni più concentrate (0.00025 a 0,0002 M); mentre in quelli lasciati nelle soluzioni più diluite (da 0,0002 a 0,0001 M) può essere lunga e mobile come quella dei controlli (fig. 2).

d) *Soluzione 0,00005 M.* – In questa soluzione si ha sviluppo di larve natanti, che in buona percentuale sono del tutto normali.

2. Trattamento interrotto allo stadio di blastula o di gastrula – Nelle 35 esperienze di questo gruppo le uova furono immesse in soluzioni di idrossilamina allo stadio di 2 blastomeri: ivi furono lasciate sviluppare fino agli stadi di blastula o di gastrula; quindi dopo accurato lavaggio furono trasferite in acqua di mare normale. La più o meno precoce interruzione del trattamento non ha portato evidenti differenze nei risultati, i quali sono stati pure abbastanza simili nelle 6 concentrazioni usate, comprese tra 0,001 e 0,0001 M. In tutte queste concentrazioni le uova si sono sviluppate fino a larve mostranti anomalie a carico del cefalenteron, e con una coda più o meno lunga e mobile, organizzata normalmente. Le anomalie del cefalenteron, e anche la riduzione della lunghezza e della mobilità della coda, sono state proporzionali alle concentrazioni usate; in quelle più deboli (0,0002 e 0,0001 M) erano presenti solo le anomalie del cefalenteron, mentre la coda in molti casi era identica a quella dei controlli. Come nei tipi precedenti di esperimenti, le anomalie del cefalenteron sono consistite in una riduzione di volume e in una mancata differenziazione e organizzazione: esso infatti mancava di palpi, di intestino, di vescicola cerebrale e si presentava come una massa irregolare, di cellule indifferenziate; erano soltanto presenti, in molti casi,

una o più macchie pigmentate, di solito in superficie. Al contrario, la coda si è sempre presentata bene organizzata, con corda vacuolata e cellule muscolari capaci di contrarsi (fig. 2): soltanto dopo trattamento con le soluzioni più concentrate (da 0,001 a 0,00033 M) la coda si presentò tozza, più corta del normale e scarsamente mobile.

C) *Trattamento in stadi più avanzati di sviluppo.*

Embrioni agli stadi di gastrula, neurula o bottone codale furono immessi in soluzioni di idrossilamina tra 0,001 e 0,0001 M, e ivi lasciati fino al termine dello sviluppo, oppure trasferiti di nuovo in acqua di mare normale dopo 2 ore di trattamento.

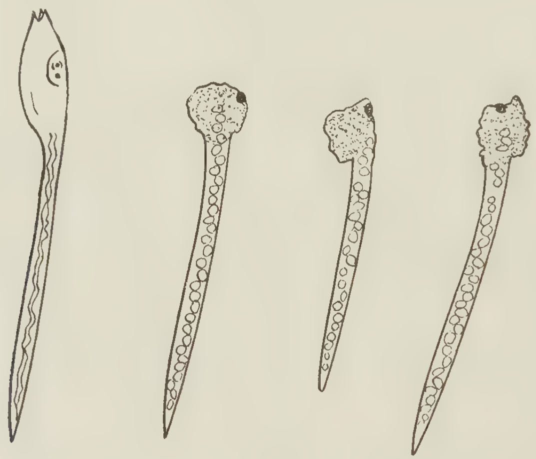


Fig. 2. – Trattamento con idrossilamina delle uova allo stadio di 2 blastomeri.

Da sinistra verso destra: una larva controllo; larve ottenute dopo trattamento ininterrotto con soluzioni rispettivamente 0,001 M; 0,0005 M; 0,0001 M.

In queste esperienze si sono avuti risultati molto simili a quelli già descritti sopra, e cioè in ogni caso si sono sviluppate larve con cefalenteron ridotto, di forma irregolare, non organizzato (perché mancante di palpi, di intestino, di vescicola cerebrale); e con una coda essenzialmente normale, anche se più o meno ridotta, a seconda della concentrazione usata e del tempo di trattamento.

Discussione.

Dai risultati ottenuti appare evidente che l'idrossilamina impedisce, nello sviluppo di *Ciona*, la differenziazione e l'organizzazione degli organi del cefalenteron. Restano in particolare colpiti: l'entoderma, che non si organizza in intestino; il tessuto neurale, che non forma un cervello interno; e anche

l'ectoderma, dal quale non si differenziano i palpi. Gli organi caudali, invece, appaiono molto meno sensibili all'azione dell'idrossilamina: la corda e la muscolatura si differenziano ed organizzano normalmente, pure se con leggere anomalie con le soluzioni più concentrate della sostanza.

L'azione dell'idrossilamina non pare si esplichi in un particolare periodo dello sviluppo, perché abbiamo visto che i risultati su esposti si ottengono anche trattando le uova vergini.

Il problema che si pone è con quale meccanismo si eserciti l'azione inibitrice della idrossilamina. Possiamo escludere che abbia luogo una inibizione della citocromo–ossidasi: infatti gli inibitori specifici di questo enzima producono effetti del tutto diversi, perché inibiscono lo sviluppo della coda, mentre non producono anomalie nel cefalenteron (Reverberi, 1957)[5]. Inoltre la Nadi reazione eseguita sulle larve sviluppatesi in idrossilamina è costantemente positiva come nei controlli.

Rulon[4], a seguito dei suoi esperimenti sul *Dendraster*, ammise che la riduzione delle strutture entodermiche e le altre anomalie fossero, almeno in parte, dovute alla combinazione della idrossilamina con gli enzimi contenenti ferro. Per quanto riguarda la mancata organizzazione dell'entoderma i miei risultati convengono con quelli ottenuti da Rulon; ritengo tuttavia che l'interpretazione di Rulon non si possa applicare alle larve di Ascidie, dato che l'idrossilamina non esercita un'azione sulla citocromo–ossidasi.

(5) G. Reverberi, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», *29*, 187 (1957).

A. Signorini e G. Cotronei.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 novembre

Presiede il Socio anziano GIUSEPPE LEVI

NOTE DI SOCI

Geometria algebrica. — *Sulle irregolarità delle varietà algebriche* [(*)]. Nota II [(**)] del Socio FRANCESCO SEVERI.

1. Anzitutto esporremo una dimostrazione più agile e più completa del teorema IV (cioè della *relazione fondamentale*), contenuta nel n. 6 della Nota I, e dei teoremi V e VI, che ne conseguono. Da questi teoremi risulta qui eliminata l'ipotesi parassitaria che la considerata ipersuperficie topologicamente generale (t. g.) A di V_d, cui essi riferisconsi, abbia l'ultima irregolarità uguale penultima di V_d [(1)].

2. *Un Lemma geometrico–topologico.* – Enunciamo anzitutto esplicitamente un *postulato topologico*. È il seguente:

a) *L'ultima irregolarità q_d di una V_d irriducibile, non singolare, è un carattere topologico*, nel senso che esprime il numero dei $(k-1)$–cicli indipendenti di V_d.

La proprietà è conosciuta per $d = 2$. È probabile che per stabilirla in generale occorra prima un'approfondita analisi dei sistemi algebrici di sottovarietà ∞^{k-1} di V_d, dimostrando che un tal sistema consta di ∞^{q_d} sistemi di equivalenza razionale.

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1959.

(**) Questa Nota fa seguito alla Nota I dallo stesso titolo presentata nella seduta del 9 maggio 1959. Essa è diretta ad esporre taluni complementi ed osservazioni alla Nota precedente.

(1) Tale ipotesi è qui assorbita automaticamente dal Lemma e dalla definizione di irregolarità q_{d-1} di V_d come ultima irregolarità di ogni ipersuperficie irriducibile, non singolare, A, t.g. di V_d.

Ne segue il

LEMMA I. – *Le sottovarietà* ∞^k, *irriducibili, non singolari t.g. di* V_d *hanno la stessa ultima irregolarità* q_k (2).

Infatti due di queste sottovarietà W_k, $\overline{W}_k$ hanno i $(k-1)$–cicli dell'una riducibili per omologia ai $(k-1)$–cicli dell'altra. Dunque, in virtù del postulato le loro ultime irregolarità q_k, $\bar{q}_k$ sono uguali.

Resta così anche legittimata la seguente DEFINIZIONE GEOMETRICO–TOPOLOGICA DELLE IRREGOLARITÀ D'UNA VARIETÀ V_d:

La k–esima irregolarità q_k $(k \geq 1)$ *d'una* V_d $(d \geq 2)$ *è il valore comune delle k–esime irregolarità delle sottovarietà* W_k, ∞^k, *irriducibili, non singolari, topologicamente generali, appartenenti a* V_d.

Pertanto q_k è invariante per ogni trasformazione birazionale regolare di V_d. In particolare, *la* q_{d-1} *di* V_d $(d > 2)$ *è uguale alla* q_{d-1} *di una sezione iperpiana* E *di* V_d *e di un multiplo arbitrario* lE *di tale sezione*, in quanto E che lE (ove per lE si prenda una generica ipersuperficie del sistema lineare $|l\mathrm{E}|$), sono irriducibili, non singolari, t. g. (ved. vol. III, p. 276).

3. Designi i_s il numero delle forme differenziali 1ª specie, appartenenti alla varietà ambiente V_d (e non nulle ivi) $(s = 1, 2, \cdots, d-1)$. Allora, poiché sopra una W_k irriducibile non singolare t.g. di V_d (3), in base al teorema II della Nota I esteso a W_k anche per $k < d-1$ (ved. nota (3)) non può annullarsi nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli delle i_s forme predette $(s = 1, 2, \cdots, k-1)$, ne segue che a W_k spettano gli stessi interi i_s che spettano a V_d. Pertanto, essendo q_k la k–esima irregolarità, sia di V_d che di W_k, ne deriva che la definizione sopra data per q_k coincide con quella (trascendente) indicata nel vol. III, p. 278.

Siccome poi i numeri i_s sono invarianti assoluti per ogni trasformazione birazionale di V_d, possiamo enunciare, a complemento della conclusione del n. 1, il teorema:

Le irregolarità d'una varietà sono invarianti, non soltanto relativi, ma anche assoluti, per ogni trasformazione birazionale delle varietà.

4. LEMMA II. – *Se* A *è una ipersuperficie t.g. su* V_d, *il suo sistema aggiunto* $|A'|$ *sega su* A *un sistema canonico* $|AA'|$, *che ha la deficienza* i_{d-1} *uguale al numero delle forme di* 1ª *specie di grado* $d-1$ *non nulle, indipendenti, appartenenti a* V_d (4).

(2) Nei nn. 3, 8 del presente lavoro, questa proprietà sarà dimostrata per via trascendente, non pertinente alla geometria algebrica classica. Resta aperto il problema di stabilire il postulato *a*) sopra enunciato, con opportuno, approfondito esame topologico.

(3) Il ragionamento del teorema II si può estendere ad ogni W_k, anche per $k < d-1$ e per un h–ciclo qualunque di $R(V_d)$, e conduce *alla conclusione che sopra una sottovarietà* W_k, *irriducibile, non singolare, t.g., di* V_d, cioè tale che ogni h–ciclo $(h \geq k-1)$ di $R(V_d)$ possa ridursi per omologia ad un h–ciclo di $R(W_k)$, *non può annullarsi nessuna forma differenziale di* 1ª *specie di* V_d, *qualunque ne sia il grado s.*

(4) Per $d = 2$ la proprietà riducesi a un classico teorema di Enriques–Picard. Ved. anche vol. III, nota (28) a piè della p. 421.

Dal teorema III della Nota I risulta infatti che, dette in modo generico ω le forme di 1ª specie esistenti su V_d, la traccia sopra A di una ω, di queste forme, non nulla su V_d, non può contenere una varietà AA′ di A, né coincidere con una tale varietà, giacché, a causa del teorema III citato, la forma ω sarebbe nulla su A e, in conseguenza del teorema II (ved. Nota I), essa sarebbe nulla su tutta la V_d, contro il supposto.

Per la stessa ragione, nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli delle forme ω, può essere nulla su A; sicché le i_{d-1} tracce su A delle i_{d-1} forme non nulle indipendenti, esistenti su V_d, sono indipendenti tra loro e non appartengono al sistema deficiente $|AA'|$, il quale pertanto ha la deficienza $\delta = i_{d-1}$. Il Lemma II è così stabilito.

5. Da ciò segue il

TEOREMA IV. – *Se q_d, q_{d-1} sono le ultime due irregolarità di V_d sussiste la* RELAZIONE FONDAMENTALE

$$q_d + q_{d-1} = i_{d-1}.$$

Diciamo invero $\bar{V}_d$ l'imagine proiettiva del sistema lineare $|lE|$.

Applicato il Lemma II, con riferimento ad $|\bar{A}'|$, ove ora $|\bar{A}| = |lE|$ e quindi $|A'| = |l(E)'|$, la relazione (14) della Nota I, viene senz'altro

$$q_d + q_{d-1} = \delta = i_{d-1},$$

perché l'aggiunta $|A'|$ del sistema $|A|$, essendo regolare (ved. la nota (7) a piè della pagina successiva della presente Nota), ha la sovrabbondanza nulla e perché, secondo il Lemma I, q_d, q_{d-1} sono le due ultime irregolarità di V_d, uguali alle corrispondenti di $\bar{V}_d$, tenuto conto che le V_d, $\bar{V}_d$ sono in corrispondenza birazionale regolare e che una sezione iperpiana generica E o A d'una varietà non singolare, V_d o $\bar{V}_d$, è irriducibile, non singolare e t.g. (volume III, p. 276).

Si conclude così col teorema IV enunciato, il quale in tal modo è conseguito (ammesso il postulato *a*)), nel puro terreno algebrico-geometrico (5).

Possiamo subito dedurne il

6. TEOREMA V (DI REGOLARITÀ DELL'AGGIUNTO). – *Condizione necessaria e sufficiente, perché l'aggiunto $|A'|$ ad un'ipersuperficie A di V_d sia regolare, è che A sia topologicamente generale* (6).

(5) Questo è un punto d'arrivo (dimostrazione del Teorema IV nel dominio della geometria algebrica classica) che l'autore si era prefisso fin dalla Nota lincea presentata il 10 gennaio 1959: *Nuove relazioni tra il genere aritmetico d'una superficie algebrica* A *tracciata sopra una varietà algebrica e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di* A. Ved. notizie bibliografiche in proposito alle pp. 294–95 del vol. III, citato nella Nota I, dove però i risultati di cui sopra, muovono da una relazione di Kodaira, esorbitante dal quadro della geometria algebrica classica. Quanto è sopra esposto, costituisce la prima dimostrazione della proprietà in oggetto nel quadro classico.

(6) Questo teorema, come il IV, valgono fino a $d = 2$. Ved. in proposito lavori dell'Autore del 1905, 1908, 1947 e una Nota di A. Franchetta del 1949.

Invero, la dimensione $P_g^d - 1$ del sistema $|A' - A|$ residuo del sistema $|A|$ rispetto al proprio aggiunto $|A'|$, è espressa da

$$P_g^d - 1 = \dim|A'| - \dim|AA'| - 1 .$$

Sicché

$$\dim|A'| = \dim|AA'| + P_g^d .$$

Detti P_g^{d-1}, P_a^{d-1} i generi geometrico ed aritmetico di A, si ottiene:

$$\dim|AA'| = P_g^{d-1} - 1 - \delta ,$$

ove δ è la deficienza del sistema canonico segato da $|A'|$ su A. Viene pertanto:

$$(1) \qquad \dim|A'| = P_g^{d-1} - 1 - \delta + P_g^d = P_a^{d-1} + q_{d-1} - \delta - 1 + P_a^d + q_d ;$$

e, dato che A è t.g., secondo il Lemma II, dal teorema IV, risulta

$$\delta = i_{d-1} = q_d + q_{d-1} ;$$

se ne deduce

$$\rho = \dim|A'| = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d .$$

Si ricordi inoltre che la dimensione virtuale (regolare) dell'aggiunto $|A'|$ ad A (7), è:

$$\bar{\rho} = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d .$$

Pertanto $\rho = \bar{\rho}$; e il Teorema V è dimostrato (8).

7. *Sistemi aggiunti sovrabbondanti.* – Per eliminare completamente dalla successiva trattazione la necessità degli sviluppi di Kodaira, nei riguardi di tutte le proprietà esposte nel vol. III, p. 293, in relazione all'aggiunto $|A'|$ di una data ipersuperficie A, tracciata su V_d, ci manca soltanto di ottenere una dimostrazione, nel dominio della geometria algebrica classica, del teorema seguente:

TEOREMA VI (DELLA SOVRABBONDANZA). – *Quando il sistema* $|A'|$, *aggiunto ad una ipersuperficie* A, *non è regolare, la sovrabbondanza del sistema* $|A'|$ *è data dal numero* σ_{d-1} *delle forme di* 1ª *specie indipendenti, di grado* $d-1$, *che si annullano su* A, *senza esser nulle su* V_d (9).

(7) La regolarità del sistema $|A'|$, per l abbastanza grande, fu dall'autore dimostrata al n. 9, p. 15 dei *Fondamenti I* (1909). Tale teorema rientra in quello che Marchionna chiama il *teorema di regolarità* di SEVERI–ZARISKI, loc. cit. in (2) a pié della p. 4 della Nota I, vol. III, p. 421.

(8) Questa è la prima dimostrazione (ammesso il postulato a)), del teorema di regolarità dell'aggiunto nel dominio classico. La dimostrazione di Kodaira, al quale il teorema è dovuto, richiede le elevate teorie analitico–topologiche, cui più volte si è alluso.

(9) Cfr. altresì l'Appendice di MARCHIONNA nel vol. III, a p. 421; nota (27) a piè di pagina. (Si tenga conto che, secondo il n. 2 della presente Nota, è, con le notazioni di Marchionna: $q_{d-1}(D) = q_{d-1}(V_d)$) !

Dal teorema III della Nota I si deduce invero che ogni forma di 1ª specie di grado $d-1$, non nulla sopra una ipersuperficie A di V_d e avente perciò periodi costanti non tutti nulli ai cicli invarianti di A, è subordinata su A da una forma di 1ª specie non nulla, dello stesso grado $d-1$, sopra V_d.

Ne segue subito, sempre in virtù del citato teorema III, che:

La deficienza δ della serie $|AA'|$ segata sopra l'ipersuperficie A di V_d dal proprio aggiunto $|A'|$, soddisfa alla relazione

$$\delta = i_{d-1} - \sigma_{d-1}, \tag{2}$$

dove i_{d-1} è il numero delle forme differenziali di grado $d-1$ di 1ª specie, indipendenti, non nulle su V_d, e σ_{d-1} è il numero delle forme di 1ª specie, indipendenti, non nulle su V_d, ma nulle su A.

Infatti, allora le i_{d-1} forme di 1ª specie sopra dette dànno, su A, $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$ forme indipendenti; sicché nel sistema canonico completo subordinato su A dalle forme di 1ª specie di V_d, vengono a mancare le varietà canoniche $|AA'|$, le quali, a norma del teorema III della Nota I, provengono da integrali impropri di V_d. Tutte le varietà canoniche di A si ripartiscono dunque soltanto in due classi: le $|AA'|$ che non provengono da alcun integrale $(d-1)$-plo proprio della V_d e le $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$ indipendenti tra loro e dalle precedenti, a norma del teorema III citato, che provengono (a prescindere dalle σ_{d-1} forme nulle su A) da altrettanti integrali $(d-1)$-pli di V_d. Ciò significa che la deficienza δ del sistema $|AA'|$, entro il sistema canonico completo di A, è espressa dal numero delle varietà canoniche indipendenti della seconda classe, cioè da $i_{d-1} - \sigma_{d-1}$.

Si ha pertanto la relazione $\delta = i_{d-1} - \sigma_{d-1}$, che si voleva dimostrare.

Una volta conosciuta δ, sostituendo nella relazione (1) del numero precedente, viene per la dimensione ρ di $|A'|$ l'espressione:

$$\rho = P_g^{d-1} - 1 - i_{d-1} + \sigma_{d-1} + P_g^d$$

e quindi:

$$\rho = P_a^{d-1} + q_{d-1} - 1 - i_{d-1} + \sigma_{d-1} + P_a^d + q_d$$

e, siccome

$$i_{d-1} = q_d + q_{d-1},$$

la precedente dà

$$\rho = P_a^{d-1} - 1 + P_a^d + \sigma_{d-1}$$

e inoltre, poiché $P_a^{d-1} - 1 + P_a^d$ è la dimensione regolare di $|A'|$ (n. prec.), ne deriva, come enuncia il teorema VI, che σ_{d-1} è la sovrabbondanza di $|A'|$.

8. Se ora $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ denotano i numeri delle forme di 1ª specie indipendenti, che appartengono a V_d e (a norma del lemma I) a una sottova-

rietà irriducibile, non singolare, W_k, l'ultima irregolarità q_k di W_k e la irregolarità k-dimensionale di V_d sono simultaneamente espresse da

$$(3) \qquad q_k = i_k - i_{k-1} + i_{k-2}, \cdots + (-1)^k i_1 \qquad (k = 2, 3, \cdots, d-1)$$ (10).

Sussiste cioè il

TEOREMA VII (sostanzialmente già conseguito nel n. 3). – *La irregolarità k-dimensionale d'una varietà* V_d $(k = 2, 3, \cdots, d-1)$ *è uguale alla ultima irregolarità d'una sottovarietà* W_k, *topologicamente generale, irriducibile, non singolare sopra* W_k (11). *Essa viene pure espressa dalla definizione trascendente* (3), *che fu la prima da noi data.*

OSSERVAZIONE. – Volendo eliminare dalla nostra trattazione il postulato *a*), bisogna ammettere conservata la relazione di Severi–Kodaira e definire una sottovarietà ∞^k su V_d, t.g., come una varietà in cui non si annulli nessuna forma differenziale di 1ª specie di V_d.

(10) Ved. vol. III, p. 277.

(11) È opportuno forse di sottolineare che la dimostrazione del teorema VII, a malgrado che sia fondata sopra la relazione di SEVERI–KODAIRA (vol. III, p. 224), in quanto è da questa che discendono le relazioni del tipo (3), mediante cui definimmo (vol. III, p. 277) le successive irregolarità di V_d, è in realtà svincolata da quella relazione o, per meglio dire, dalla trattazione che ne fa Kodaira, e resta invece contenuta nell'ambito classico, perché la relazione di SEVERI–KODAIRA come abbiamo stabilito nel lavoro *Une démonstration de la relation de Severi–Kodaira, dans le domaine de la géométrie algébrique classique* (in corso di pubblicazione nel « Journal de Liouville », in un volume celebrante il giubileo scientifico di René Garnier), è un'ovvia conseguenza della relazione fondamentale $q_d + q_{d-1} = i_{d-1}$, che abbiamo dimostrato prima (a meno del postulato *a*) nel dominio classico (n. 5, teorema IV).

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni e delle congruenze algebriche.* Nota I (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

Dedico la presente Nota, ed una che seguirà, alla memoria dell'indimenticabile amico RENATO CACCIOPPOLI.

In essa, premesse alcune considerazioni (§ 1) riguardanti il numero degli zeri distinti di un polinomio – sopra un campo qualsiasi – che sono radici n^{me} dell'unità, espongo (§ 2) varie proprietà delle matrici circolanti, relative specialmente al rango di queste.

Ne deduco (§ 3) un procedimento estremamente semplice per calcolare il numero delle soluzioni distinte ammesse in un campo di Galois da un'equazione algebrica su esso definita, ciò che viene ad affinare ed estendere noti risultati concernenti le congruenze algebriche rispetto ad un modulo primo.

Siffatte questioni possono venir trattate con un metodo completamente diverso (risalente a Hurwitz nel caso delle congruenze), il quale – come mostrerò nella successiva Nota II – può anche venir esteso ai sistemi di equazioni algebriche in un qualunque numero di variabili sopra un corpo finito.

1. – INTORNO AGLI ZERI DI UN POLINOMIO ASSEGNATO CHE SONO RADICI n^{me} DELL'UNITÀ.

È chiaro che un polinomio

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m , \tag{1}$$

a coefficienti in un dato campo γ, ammette – in γ od in un'estensione algebrica di γ – qualche zero che sia radice n^{ma} dell'unità se, e soltanto se, $f(x)$ e

$$\varphi(x) = x^n - 1 \tag{2}$$

hanno un M.C.D. di grado positivo. Ci proponiamo anzitutto, assegnato $f(x)$, di *determinare il grado* k (≥ 0) *di tale M.C.D.*

Va rilevato che, qualora $\varphi(x)$ abbia n radici distinte (per il che occorre e basta che la caratteristica di γ valga zero o sia un numero primo che non divida n), il grado k suddetto uguaglia precisamente il *numero degli zeri distinti di* $f(x)$ *che sono radici* n^{me} *dell'unità.*

Notiamo inoltre che, in ogni caso, k non muta ove si sostituisca ad $f(x)$ un qualunque polinomio congruo ad $f(x)$ modulo $\varphi(x)$. Possiamo così ridurci ad avere nella (1):

$$m = n - 1 , \tag{3}$$

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1959.

senza tuttavia escludere che i singoli coefficienti a (incluso a_0) possano – tutti od in parte – annullarsi. Allora si ha anzi manifestamente $k = n$ se, e soltanto se, tutte le a si annullano; sicché risulta $0 \leq k \leq n - 1$ ogni qualvolta le a siano non tutte nulle.

Fra i diversi polinomi $g(x)$, a coefficienti in γ non tutti nulli, tali che

$$f(x)\, g(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod } \varphi(x)). \tag{4}$$

ve n'è u n o ben determinato, e sia:

$$g(x) = x^r - \lambda_{r-1}\, x^{r-1} - \cdots - \lambda_1\, x - \lambda_0\,, \tag{5}$$

avente grado m i n i m o e coefficiente direttore unitario. È subito visto che il grado (≥ 0) di quest'ultimo è dato precisamente da $r = n - k$, sicché si ha

$$k = n - r = m + 1 - r \tag{6}$$

e la condizione $k > 0$ equivale alla $r < n$, ossia alla $r \leq m$.

Se ora consideriamo i polinomi

$$\left\{\begin{array}{l} f_0(x) = a_0\, x^m + a_1\, x^{m-1} + a_2\, x^{m-2} + \cdots + a_m \\ f_1(x) = a_1\, x^m + a_2\, x^{m-1} + a_3\, x^{m-2} + \cdots + a_0 \\ f_2(x) = a_2\, x^m + a_3\, x^{m-1} + a_4\, x^{m-2} + \cdots + a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x) = a_m x^m + a_0\, x^{m-1} + a_1\, x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\,, \end{array}\right. \tag{7}$$

in base alle (1), (2), (3) risulta (per $i = 0, 1, \cdots, m$):

$$f_i(x) \equiv x^i f(x) \qquad (\text{mod } \varphi(x)). \tag{8}$$

Ne consegue che, affinché un qualunque polinomio (5) di grado $r \leq m$ soddisfi alla (4), occorre e basta che si abbia

$$f_r(x) \equiv \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i\, f_i(x) \qquad (\text{mod } \varphi(x)); \tag{9}$$

ma poiché, in forza delle (7), (3), ciascuno dei polinomi $f_i(x)$ ha grado i n f e r i o r e al grado n di $\varphi(x)$, così l'ultima relazione implica addirittura l' i d e n t i t à:

$$f_r(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i\, f_i(x).$$

Pertanto, il suddetto grado r m i n i m o è caratterizzato da ciò che, mentre (se $r > 0$) i polinomi

$$f_0(x)\,, f_1(x)\,, \cdots, f_{r-1}(x)$$

sono fra loro l i n e a r m e n t e i n d i p e n d e n t i , supposto $r \leq m$ il polinomio $f_r(x)$ *viene a dipendere linearmente da questi*. Si ha anzi che (se $r < m$) *lo stesso accade conseguentemente dei polinomi* $f_{r+1}(x)\,, f_{r+2}(x), \cdots, f_m(x)$. In-

vero, moltiplicando i due membri della (9) per x, x^2, $\cdots$, e rammentando le (8), si ottengono le congruenze

$$f_{r+1}(x) \equiv \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i f_{i+1}(x), \quad f_{r+2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i f_{i+2}(x), \cdots \qquad (\text{mod } \varphi(x));$$

ma ciascuna di queste congruenze implica addirittura l'identità fra i due membri, in quanto ciascuno di essi ha grado inferiore al grado n di $\varphi(x)$, onde l'asserto.

2. – Alcune proprietà delle matrici circolanti.

Rileviamo che la matrice dei coefficienti dei polinomi (7) è la più generale matrice circolante d'ordine $n = m + 1$:

$$\text{(10)} \qquad M = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \end{Vmatrix}$$

ad elementi in γ. Denoteremo con D_1 il determinante di questa matrice, e – più generalmente – con D_h $(h = 1, 2, \cdots, m+1)$ il determinante della matrice principale (d'ordine $m - h + 2$) che da essa si ricava sopprimendo le ultime $h - 1$ righe e le ultime $h - 1$ colonne [1].

In virtù dell'ultimo capoverso del § 1, il numero r ivi considerato esprime in pari tempo il rango della matrice M ed il rango della matrice formata dalle prime r righe di M. Pertanto:

TEOREMA 1. – *Se una matrice circolante ha rango r positivo, anche la matrice formata da r sue righe consecutive qualsiansi è di rango r.*

Il calcolo di r si effettua nel modo più semplice in base al seguente

TEOREMA 2. – *Affinché la matrice circolante* (10) *abbia rango r occorre e basta che sia*

$$\text{(11)} \qquad D_1 = D_2 = \cdots = D_k = 0, \qquad D_{k+1} \neq 0,$$

(1) L'annullarsi di D_1 essendo, come risulterà dal seguito (teorema 3), condizione necessaria e sufficiente affinché qualche zero di $f(x)$ sia una radice n^{ma} dell'unità – e tenuto conto di note proprietà del risultante – ne discende che, dette $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le n radici n^{me} (eventualmente ripetute) dell'unità, D_1 non può differire da $\prod_{i=1}^{n} f(z_i)$ che per un fattore numerico; e si riscontra facilmente che questo fattore vale $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$. Per una dimostrazione diretta (nel campo complesso) dell'identità

$$(*) \qquad D_1 = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{i=1}^{n} f(z_i),$$

e per ulteriori indicazioni bibliografiche su di essa, cfr. CREMONA [2].

dove i D_h *sono i minori principali definiti nel primo capoverso del* § 2, k *è dato dalla* (6), *e la disuguaglianza va naturalmente soppressa se* $r = 0$ (*e quindi* $k = m + 1$).

Detto ancora r il rango di M, e definito k con la (6), si ha infatti (§ 1) che k è il grado del M.C.D. relativo ai polinomi (1) e (2). In base ad un risultato stabilito nel n. 705 (p. 330) di Capelli [1] (e che riportiamo più oltre con qualche semplificazione formale), ciò si traduce con le condizioni

$$(12) \qquad R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0 \,, \qquad R_{k+1} \neq 0 \,,$$

l'ultima delle quali è da sopprimere se $r = 0$, dove le R si esprimono nel modo seguente.

Poniamo per abbreviare

$$(13) \qquad b_0 = +1 \quad , \quad b_n = -1 ,$$

ed inoltre

$$(14) \qquad a_i = 0 \quad \text{se} \quad i < 0 \quad \text{oppure} \quad i > m \,,$$

$$(15) \qquad b_i = 0 \quad \text{se} \quad i \neq 0 \,, n \,.$$

Denotiamo poi con $A_s^{(c,d)}$ e $B_s^{(c,d)}$ le matrici a c righe e d colonne aventi rispettivamente

$$a_{s-i+j} \quad \text{e} \quad b_{s-i+j}$$

quali elementi di situati all'incrocio della i^{ma} riga colla j^{ma} colonna ($i = 1, 2, \cdots, c$; $j = 1, 2, \cdots, d$). Allora R_h (per $h = 1, 2, \cdots, m+1$) è dato dal determinante d'ordine $m + n - 2h + 2$:

$$R_h = \begin{vmatrix} A_0^{(n-h+1, m+n-2h+2)} \\ B_0^{(m-h+1, m+n-2h+2)} \end{vmatrix} .$$

Avuto riguardo alla precedente definizione delle matrici A, B ed alle (3), (13), (14), (15), se $m - 2h + 2 > 0$ l'ultima relazione può venir scritta nella forma:

$$R_h = \begin{vmatrix} A_0^{(m-h+2, m-h+1)} & A_{m-h+1}^{(m-h+2, h)} & A_{m+1}^{(m-h+2, m-2h+2)} \\ & & -I^{(m-2h+2)} \\ I^{(m-h+1)} & O^{(m-h+1, h)} & \\ & & O^{(h-1, m-2h+2)} \end{vmatrix} ,$$

dove denotiamo rispettivamente con $I^{(c)}$ e $O^{(c,d)}$ la matrice unitaria d'ordine c e la matrice nulla a c righe e d colonne. Pertanto, sommando in questo determinante le colonne dei posti $1, 2, \cdots, m - 2h + 2$ ordinatamente a quelle dei posti $m+2, m+3, \cdots, m+n-2h+2 = 2m - 2h + 3$, otteniamo

$$R_h = \begin{vmatrix} A_0^{(m-h+2, m-h+1)} & A_{m-h+1}^{(m-h+2, h)} & A_0^{(m-h+2, m-2h+2)} + A_{m+1}^{(m-h+2, m-2h+2)} \\ I^{(m-h+1)} & O^{(m-h+1, h)} & O^{(m-h+1, m-2h+2)} \end{vmatrix} ,$$

e quindi:

$$R_h = \pm \left| A_{m-h+1}^{(m-h+2,h)} \qquad A_0^{(m-h+2,m-2h+2)} + A_{m+1}^{(m-h+2,m-2h+2)} \right| .$$

Se invece $m - 2h + 2 \leq 0$, risulta:

$$R_h = \begin{vmatrix} A_0^{(m-h+2,m-h+1)} & A_{m-h+1}^{(m-h+2,m-h+2)} \\ I^{(m-h+1)} & O^{(m-h+1,m-h+2)} \end{vmatrix} = \pm \left| A_{m-h+1}^{(m-h+2,m-h+2)} \right| .$$

Sia nell'un caso che nell'altro, abbiamo così che R_h differisce al più per il segno da un determinante d'ordine $m - h + 2$, formato con le a e dianzi precisato. Tenuto conto delle (14), si vede poi che quest'ultimo coincide con quello che si ottiene dal determinante D_h dello stesso ordine – definito nel primo capoverso del § 2 – invertendone l'ordine delle righe, sicché risulta:

$$R_h = \pm D_h .$$

Le (12) equivalgono pertanto alle (11), onde il teorema 2 rimane stabilito.

Rileviamo che una matrice (10) che sia circolante si conserva tale qualora se ne assoggettino separatamente le righe e le colonne ad arbitrarie sostituzioni circolari; e con ciò è manifestamente possibile di condurre un qualunque elemento della matrice in un posto comunque assegnato. In base a ciò, il teorema 2 – nel caso particolare $r = m - 1$ ossia, in forza della (6), $k = 2$ – fornisce il seguente

COROLLARIO. – *In un determinante circolante d'ordine $m + 1$, che sia nullo, basta che si annulli un qualsiasi minore d'ordine m affinché tutti i minori d'ordine m risultino nulli.*

Dato l'interesse di questo risultato, daremo ora di esso una dimostrazione più diretta, valida però soltanto sotto la condizione che la caratteristica di γ sia zero o – se positiva – non divida $n = m + 1$, ossia (§ 1) nell'ipotesi che l'unità ammetta n radici n^{me} distinte, $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Volendo, tale dimostrazione potrebbe – naturalmente con qualche maggiore complicazione – venire estesa al teor. 2: e si noti che questo – in base al corollario – sussiste più generalmente per $k \geq 2$, ove si convenga di denotare con $D_2, D_3, \cdots, D_{k+1}$ dei minori di D_1 degli ordini rispettivi $m, m-1, \cdots, m-k+1$, il primo dei quali può venir scelto ad arbitrio, mentre poi gli altri vanno definiti convenientemente.

Incominciamo con l'osservare che una qualunque a_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ coincide con $m + 1$ elementi del determinante D_1 della matrice (10); e che questi elementi hanno in D_1 complementi algebrici fra loro uguali, in quanto da uno di essi si può passare ad uno qualsiasi dei rimanenti mediante permutazioni di righe e colonne che non ne alterano il segno. Se denotiamo con $D_1^{(i)}$ il valore comune di quei complementi algebrici, si ha conseguentemente

$$\frac{\partial D_i}{\partial a_i} = (m + 1) D_1^{(i)} .$$

Supponiamo poi che valga la $D_1 = 0$. In forza dell'identità (*) data in nota al principio del § 2, ciò implica l'annullarsi di uno – e, in virtù della ipotesi dianzi ammessa su γ, generalmente di uno solo – dei fattori che in quella compaiono a secondo membro, sicché – per uno j determinato degli indici $1, 2, \cdots, n$ – risulterà

$$f(z_j) = 0.$$

Pertanto, avuto anche riguardo alla (1), la (*) attualmente fornisce (per ogni $i = 0, 1, \cdots, m$):

$$\frac{\partial D_1}{\partial a_i} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \frac{\partial f(z_j)}{\partial a_i} \prod_{i=1}^{n}{}^{(j)} f(z_i) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} z_j^{m-i} \prod_{i=1}^{n}{}^{(j)} f(z_i),$$

ove l'indice j posto in alto alla Π sta per indicare che, nel prodotto, occorre dare alla i tutti i valori $i = 1, 2, \cdots, n$ tranne $i = j$. Si ha dunque

$$D_1^{(i)} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} z_j^{m-i} \prod_{i=1}^{n}{}^{(j)} f(z_i)/(m+1),$$

e quindi (per ogni scelta di $i, i' = 0, 1, \cdots, m$, e poiché $z_j \neq 0$):

$$D_1^{(i')} = z_j^{i-i'} D_1^{(i)},$$

onde discende subito la proprietà enunciata nel precedente corollario.

3. – Sul numero delle radici di un'equazione algebrica in un campo di Galois.

Supponiamo ora in particolare che γ sia un campo di Galois $GF(q)$, d'ordine $q = p^t$ (con p primo, caratteristica di γ), ed assumiamo

$$n = q - 1$$

e quindi, in base alla (3),

$$m = q - 2.$$

In tali ipotesi, il polinomio (2) ammette in γ notoriamente n radici distinte, date dai $q-1$ elementi non nulli di γ (cfr. per esempio Segre [7], n. 54). Avuto riguardo al significato di k dato dal § 1 ed al teorema 2 (§ 2), ne discende subito il

TEOREMA 3. – *Sia dato un polinomio* (1) *sopra* $GF(q)$, *e ne sia* $m = q - 2$ *il grado formale, potendo il grado effettivo risultare inferiore. Il numero* k *delle radici in* $GF(q)$ *di quel polinomio – distinte fra loro e dallo zero – è dato da*

$$k = q - r - 1,$$

essendo r *il rango della matrice circolante* (10).

Dunque intanto a questo carattere r *può venire applicato il teorema* 1 (§ 2), *che ne agevola il calcolo. Inoltre, affinché sia* $k > 0$, *occorre e basta che si annulli il determinante* D_1 *della suddetta matrice. In tal caso, l'intero* k *dianzi definito*

può venire calcolato in base alle (11), *ove* D_h *denoti* (*per* $h=2, 3, \cdots, k+1$) *il determinante* (*d'ordine* $q-h$) *della matrice che si ricava dalla* (10) *sopprimendone le ultime* $h-1$ *righe e le ultime* $h-1$ *colonne.*

Questo ed altri teoremi che otterremo nella Nota II suggeriscono tutto un complesso di ricerche, in vista di possibili applicazioni alla teoria degli spazi di Galois (nel senso di Segre [8], [9]), sulle quali però qui non ci tratterremo. Rileviamo piuttosto che la prima parte del teorema 3 è già stata enunciata da Vandiver [10] (teorema 1) e dimostrata – sotto la condizione aggiuntiva $a_m \neq 0$ – nel volume di Rédei [5] (di cui però chi scrive non ha potuto prendere visione); inoltre, un risultato affine all'ultimo fra quelli contenuti nella seconda parte del teorema 3, ma assai meno semplice ed espressivo di questo, trovasi in un recentissimo lavoro di Rédei e Turán [6].

Nel caso particolare $t=1$, ossia $q=p$, la prima parte del teorema 3 riducesi ad un classico risultato di König e Rados (cfr. Rados [4], od anche Kronecker [3], pp. 389–404). La seconda parte dello stesso teorema fornisce allora senz'altro un notevole affinamento di quel risultato (che – per brevità – non stiamo ad enunciare), offrente il mezzo più semplice – dal punto di vista attuale – per *determinare quante sono le soluzioni di una qualunque congruenza algebrica:*

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \cdots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod p \tag{16}$$

($a_0, a_1, \cdots, a_{p-2}$ interi, p primo), *in interi* x *incongrui fra loro e rispetto allo zero.*

Il suddetto affinamento è altresì da raffrontare con gli sviluppi in Kronecker [3], pp. 404–415. Si noti inoltre che il richiesto numero di soluzioni della (16) può anche venire espresso (mod p) mediante un polinomio nelle a a coefficienti interi, giusta un risultato di Hurwitz del quale fra l'altro – nella Nota II – daremo poi una larga estensione.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica*, 4ª ed. (Napoli, Pellerano, 1909).

[2] L. CREMONA, *Solution de la question 465*, «Nouv. Ann. de Math.», (1) *19*, 151–153 (1860) = *Opere Matematiche*, I (Milano, Hoepli, 1914), pp. 114–115.

[3] L. KRONECKER, *Vorlesungen über die Zahlentheorie*, I, bearb. u. herausg. von K. Hensel (Leipzig, Teubner, 1901).

[4] G. RADOS, *Zur Theorie der Kongruenzen höheren Grades*, «Journ. f. reine u. ang. Math.», 99, 258–260 (1886).

[5] L. RÉDEI, *Algebra*, I (Budapest, 1954, in ungherese).

[6] L. RÉDEI u. P. TURÁN, *Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern*, «Acta Arithmetica», *5*, 223–225 (1959).

[7] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, I (Bologna, Zanichelli, 1948).

[8] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, «Ann. di Mat.», (4) *48*, 1–97 (1959).

[9] B. SEGRE, *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, «Acta Arithmetica», *5*, 313–330 (1959).

[10] H. S. VANDIVER, *Some theorems in finite field theory with application to Fermat's last theorem*, «Proc. Nat. Acad. U.S.A.», *30*, 362–367 (1944).

Elettrochimica. — *Sovratensione di idrogeno su monocristalli di stagno* [*]. Nota di Roberto Piontelli e Luisa Peraldo Bicelli, presentata [**] dal Corrisp. R. Piontelli.

La sovratensione di idrogeno sullo stagno ha formato oggetto di poche ricerche, con risultati scarsamente concordanti [1]. Nel quadro delle ricerche svolte in questo laboratorio sul comportamento elettrodico di superfici variamente orientate di monocristalli metallici [2], abbiamo ritenuto interessante studiare il comportamento di elettrodi di stagno, orientati secondo gli stessi piani reticolari per i quali abbiamo in precedenza studiata [3] la cinetica di scambio di ioni Sn^{2+}, e precisamente: (001), (100), (110). Misure di confronto sono state effettuate anche su stagno policristallino.

La tecnica sperimentale è stata precedentemente descritta, per quanto concerne: la preparazione degli elettrodi [4], la depurazione delle soluzioni [5], la cella [6] e la procedura di misura [7]. Indichiamo ora pertanto solo l'insieme (fig. 1) dell'apparecchiatura, nella forma di realizzazione particolarmente idonea per lo studio della sovratensione di idrogeno, e ci limitiamo al seguente cenno sulla procedura.

L'idrogeno prepurificato dalle eventuali tracce di ossigeno per mezzo di un catalizzatore al palladio, viene inviato successivamente: in un gorgogliatore ad acido solforico concentrato A, in un gorgogliatore ad acqua bidistillata B, ed infine nella cella di misura.

Nello scomparto Z di quest'ultima, viene eseguita la purificazione della soluzione per mezzo di una preelettrolisi con elettrodi di platino F e G, saturi

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(**) La presente ricerca è stata finanziata in parte dall'ARDC, USAF mediante il Contratto AF 61 (052) 144 tramite l'European Office ARDC, Bruxelles. Parte dell'apparecchiatura è stata procurata con fondi concessi dal CNR.

(1) A. Hickling e F. W. Salt, «Trans. Faraday Soc.», *36*, 1226 (1940); *37*, 333 (1941); J. O'M. Bockris and S. Jgnatowicz, «Trans. Faraday Soc.», *44*, 519 (1948); A. G. Pecherskaya e V. V. Stender, «J. Appl. URSS», *19*, 1303 (1946); M. D. Zholuder e V. V. Stender, «Zhur Priklad. Khim», *31*, 719 (1958); J. A. Ammar e H. Sabry, «J. Phys. Chem.», *62*, 801 (1958).

(2) R. Piontelli, U. Bertocci e C. Tamplenizza, «Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett.», (A), *91*, 378 (1957); I. Martin Tordesillas, L. Peraldo Bicelli e B. Rivolta, «Ann. Chim.», *49*, 1585 (1959); I. Martin Tordesillas e L. Peraldo Bicelli, «Z. Elektrochem.» (in corso di stampa).

(3) R. Piontelli, G. Poli e B. Rivolta, questi «Rendiconti», VIII, *26*, 431 (1959); R. Piontelli, G. Poli e G. Serravalle, *Simposio di elettrochimica teorica dell'ECS* (Filadelfia 1959) (in corso di stampa).

(4) R. Piontelli, U. Bertocci, L. Bicelli, G. Poli, B. Rivolta, G. Sternheim e C. Tamplenizza, «Rend. Ist. Lomb. Sci e Lett.», (A), *91*, 347 (1957).

(5) R. Piontelli e G. Poli, «Rend. Ist. Lomb. Sci e Lett.», (A), *92*, 601 (1958).

(6) R. Piontelli, G. Serravalle e G. Poli, questi «Rendiconti», VIII, *25*, 431 (1959).

(7) Ved. nota (2).

di idrogeno, proveniente dal setto poroso S (durata della preelettrolisi: almeno 48 ore a 0,05 A, per circa 150 cm^3 di soluzione da trattare).

Durante la misura, l'idrogeno viene fatto uscire attraverso il setto poroso S', per modo che sussista collegamento liquido tra l'elettrodo di stagno E (in comunicazione con l'elettrodo di riferimento E.R. attraverso la sonda X) ed il controelettrodo C di platino platinato. Come elettrodo di riferimento

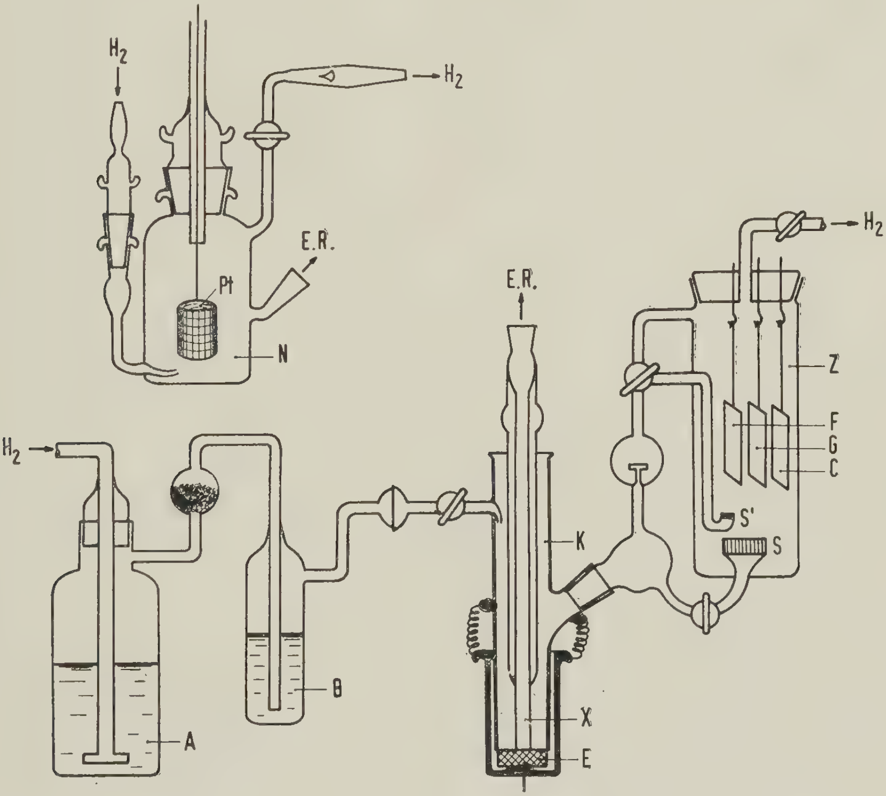


Fig. 1. – Apparecchiatura usata durante le misure.

si è fatto uso dell'elettrodo $Hg/Hg_2SO_4/H_2SO_{4\,aq}$ 0,1 M, per le soluzioni percloriche; e di quello: $Hg/Hg_2Cl_2/HCl_{aq}$ 0,1 M per le soluzioni cloridriche.

In una cella a parte N, è stata poi determinata la forza elettromotrice di una pila costituita da un elettrodo reversibile ad idrogeno e dall'elettrodo di riferimento sopra indicato, nelle stesse condizioni e alle stesse temperature in cui sono state eseguite le misure di sovratensione [8].

I principali risultati delle nostre determinazioni sono riassunti nelle Tabelle I–IV e nella fig. 2 [9].

(8) Come valori assoluti di sovratensione si sono pertanto adottati i valori assoluti della differenza tra le tensioni relative al riferimento dell'elettrodo polarizzato e di quello reversibile a idrogeno.

(9) Data la riscontrata regolarità della legge logaritmica di dipendenza delle sovratensioni dalla d. c., abbiamo ritenuto superfluo riportare altri diagrammi.

TABELLA I.

Sn (001).

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,01 M	30°	540	105	— 5,10	435	650	11
	45°	525	110	— 4,80	415	635	
	65°	495	130	— 3,85	370	625	
$HClO_4$ 0,08 M	25°	490	120	— 4,10	370	610	10
	45°	450	125	— 3,65	330	565	
	65°	400	125	— 3,20	280	520	
HCl 0,03 M	30°	485	100	— 4,95	380	580	7
	45°	470	100	— 4,70	355	570	
	65°	440	100	— 4,35	340	540	

TABELLA II.

Sn (100).

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,01 M	30°	600	125	— 4,75	470	725	4
	45°	575	125	— 4,60	450	700	
	65°	545	125	— 4,40	420	670	
$HClO_4$ 0,08 M	25°	550	130	— 4,20	415	680	15
	45°	500	145	— 3,45	355	645	
	65°	415	145	— 2,85	270	565	
HCl 0,03 M	30°	550	115	— 4,80	435	665	9
	45°	535	120	— 4,50	410	650	
	65°	490	125	— 3,90	350	610	

TABELLA III.

Sn (110).

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,01 M	30°	550	110	— 5,00	440	665	10
	45°	515	105	— 4,95	415	620	
	65°	475	115	— 4,20	360	590	
$HClO_4$ 0,08 M	45°	465	90	— 5,05	375	555	
	65°	410	90	— 4,75	320	495	
HCl 0,03 M	25°	575	115	— 4,94	460	695	9
	45°	560	120	— 4,80	445	680	
	65°	525	130	— 4,05	395	655	

TABELLA IV.

Sn policristallino.

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,03 M	25°	570	130	— 4,30	435	700	9
	45°	535	135	— 4,00	402	665	
	65°	495	140	— 3,50	355	635	
HCl 0,03 M	25°	570	120	— 4,75	430	690	7
	45°	555	125	— 4,45	430	675	
	65°	525	125	— 4,20	380	645	

Come si può rilevare:

1) Il valore assoluto $|\Delta \mathcal{E}|$ della sovratensione (negativa) è funzione lineare del logaritmo della densità di corrente in tutto l'intervallo (tra 0,1 e 10 A/m²) da noi esplorato, in accordo con la nota legge di Tafel:

$$|\Delta \mathcal{E}| = a + b \log i.$$

2) $|\Delta \mathscr{E}|$ dipende dall'orientamento della superficie elettrodica e precisamente, a seconda delle condizioni sperimentali, va crescendo nell'ordine:

$$\text{HCl}\quad 0{,}03\ \text{M}\ (25^\circ\text{C}) : (001) < (100) < (110)$$

$$\text{HClO}_4\ 0{,}01\ \text{M}\ (25^\circ\text{C}) : (001) < (110) < (100).$$

È interessante che, viceversa, per quanto concerne la cinetica degli scambi di ioni Sn^{2+}, abbiamo trovato sovratensione crescente nell'ordine $(100) < (110) < (001)$.

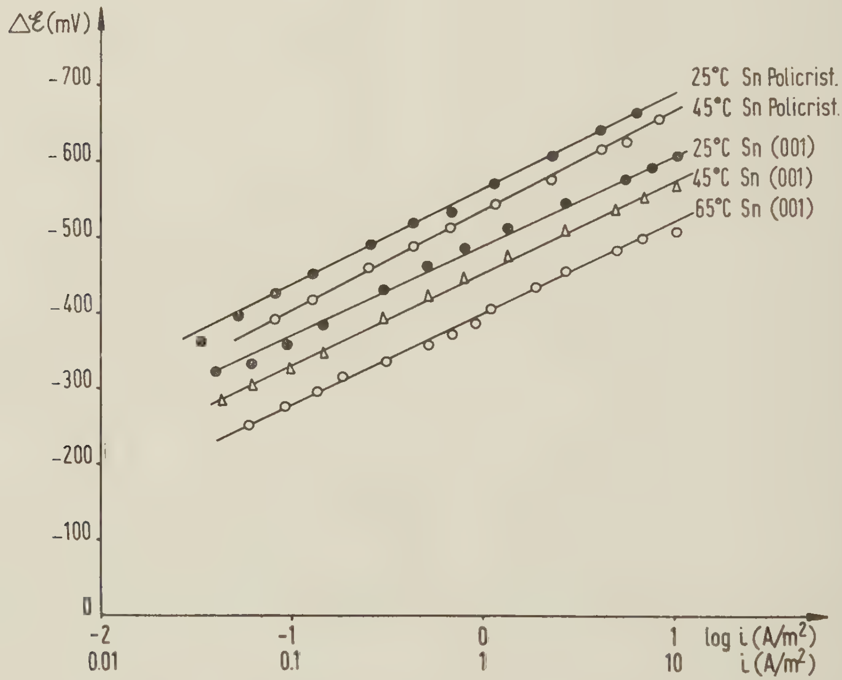


Fig. 2. – Sovratensioni di idrogeno su elettrodi vari.

Sn Policrist.: ($HClO_4$ 0,03 M); Sn (001) : ($HClO_4$ 0,08 M).

3) Al crescere della temperatura, a parità delle altre condizioni, la sovratensione diminuisce.

4) Per quanto concerne l'influenza della concentrazione (per le soluzioni percloriche), la soluzione più diluita ha sempre sovratensione maggiore.

5) L'influenza dell'anione è netta solo per elettrodi orientati secondo (110) e per quelli policristallini, per i quali, in soluzione cloridrica, si sono riscontrate sovratensioni maggiori che in soluzione perclorica, a parità di concentrazione e di temperatura.

Per gli altri due casi (Sn (001) e Sn (100)) l'influenza (tendenzialmente in senso opposto) è poco netta.

L'esame dei risultati precedenti conferma, anzitutto, la regola empirica dell'anticorrelazione tra attività cinetica dei vari metalli, rispetto agli

scambi dei propri ioni, e quella inerente, invece, agli scambi di ioni idrogeno [10]. Così lo stagno, caratterizzato da scambi veloci, per quanto concerne i propri ioni, presenta, viceversa, sovratensioni di idrogeno piuttosto elevate. Nel caso dello stagno, questa anticorrelazione si manifesta anche nei rispetti dell'influenza dell'orientamento [11].

(10) R. PIONTELLI, « J. Chim. phys. », *46*, 292 (1949); « CITCE Rend. », 2ª Riunione (Milano 1950), p. 175; « Z. Elektrochem. », *55*, 128 (1952).

(11) Nel caso del piombo, le sovratensioni sono più elevate sul piano (111) di massimo addensamento atomico, per quanto concerne gli scambi di ioni Pb^{2+} (ved. R. PIONTELLI, G. POLI e B. RIVOLTA, questi « Rendiconti », VIII, *26*, 321 (1959)); mentre, per gli scambi di ioni idrogeno, il comportamento è notevolmente complesso (ved. nota (2)).

Chimica. — *Studio tensiometrico del sistema* $NH_4PF_{6\,(solido)}/NH_{3\,(gas)}$ *fra* —10° *e* —70° C. Nota di VINCENZO CAGLIOTI, PAOLO SILVESTRONI e JAKE SERREQI presentata (*) dal Socio V. CAGLIOTI (**).

In un precedente lavoro [1] era stata messa in evidenza la proprietà dello NH_4PF_6 di fissare, allo stato solido, ammoniaca gassosa, dando soluzioni del tipo delle soluzioni di Divers [2].

Lo studio del sistema NH_4PF_6/NH_3, condotto fra —10 e 50° C, aveva mostrato l'esistenza di un composto solido $NH_4PF_6 \cdot NH_3$, stabile fino a 28° C, e l'andamento delle isoterme pressione di ammoniaca/composizione del sistema lasciava prevedere che in un campo di temperatura più basso potessero esistere ammoniacati a più alto contenuto di ammoniaca.

Nella presente Nota viene appunto mostrata l'esistenza, fra —10° e — 70° C, di un diammoniacato e di un tetraammoniacato.

PARTE SPERIMENTALE.

L'esafluofosfato di ammonio è stato da noi preparato da PCl_5 ed NH_4F, col metodo di Lange [3] e per reazione in HF anidro [4] (1). I controlli sono stati fatti dosando il PF_6^- secondo Lange e Muller [5] e l'NH_4^+ mediante titolazioni amperometriche [6]. L'apparecchiatura usata nel presente lavoro differisce da quella già descritta [1] per la cella di reazione e per il sistema di misura della temperatura e della pressione.

Cella di reazione. – Nel campo di temperatura esaminato, si hanno, per lo più, sistemi solido/gas, e per questi il raggiungimento dell'equilibrio è notoriamente assai lento. Per ovviare a ciò si è cercato di dare un grande sviluppo superficiale al fluofosfato solido; con una soluzione concentrata di tale sale in alcool metilico sono stati imbevuti dei sottili dischi di vetro sinterizzato, a grana grossa, che, sovrapposti e separati da sottili anelli di vetro, sono stati posti in un cilindro, di vetro anch'esso; si è poi eliminato col vuoto l'alcool metilico e si è determinata, per pesata, la quantità di NH_4PF_6 contenuta nel cilindro che, saldato successivamente all'apparecchiatura di misura, viene a costituire la cella di reazione. Con questo accorgimento le misure sono assai meno lente, e si arriva all'equilibrio – per ciascuna temperatura, –

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica Generale ed inorganica dell'Università e Centro di chimica generale del C.N.R. – Roma.

(1) Ringraziamo vivamente la Soc. Montecatini per aver messo a nostra disposizione una notevole quantità di NH_4PF_6 preparata con questo secondo metodo.

in 2 ÷ 3 ore, tolti alcuni campi di temperatura e composizione per i quali, come si dirà, gli equilibri sono particolarmente lenti e si raggiungono dopo 12 ÷ 24 ore o più.

Misura della temperatura. – Si è usato un termometro a resistenza S.I.S. con ponte Leeds e Northrupp.

Misura della pressione. – Si è costruito un McLeod a basso potere moltiplicatore che, con opportune standardizzazioni, permette la lettura delle pressioni moltiplicate per 2, 5, 10, 20.

Dato lo scopo, delle nostre ricerche – di mettere in evidenza l'eventuale formazione di composti tra NH_4PF_6 ed NH_3 – si è curata in modo particolare la riproducibilità delle misure.

Le esperienze sono state condotte nel modo seguente: la composizione del sistema è stata fatta variare fra 0,1 e 13 moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6 e per ogni composizione sono stati determinati i valori della pressione di ammoniaca fra —10° e —70° C, conducendo le misure nel senso delle temperature crescenti e decrescenti. Una prima serie di misure ha permesso di individuare i campi di temperatura e composizione più significativi per lo studio del nostro sistema, e altre tre serie successive, per ciascuna delle quali si è usato NH_4PF_6 di nuova preparazione, hanno permesso lo studio dettagliato ed il controllo della riproducibilità dei risultati sperimentali.

I valori della tensione di ammoniaca alle varie temperature e per le diverse composizioni del sistema NH_4PF_6/NH_3 permettono di tracciare le isoterme p_{NH_3}/composizione, le curve p_{NH_3}/temperatura, ed i relativi diagrammi log p/1/T.

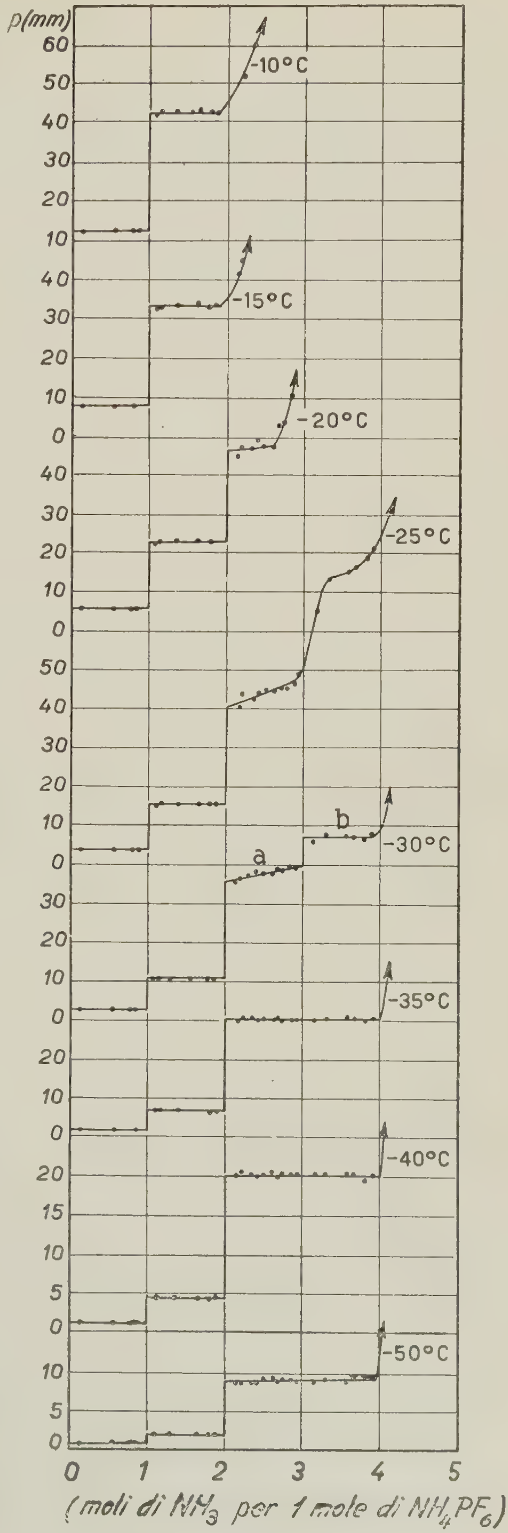


Fig. 1.

RISULTATI SPERIMENTALI.

I valori della tensione di ammoniaca nel campo di temperatura — 10° ÷ — 70° C, per le composizioni del sistema NH_4PF_6/NH_3 prese in esame, sono riportate nelle tabelle di cui al seguente specchietto:

N° della Tabella	Campo di temperatura (°C)		Composizione del sistema. Moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6
I	— 10	— 50	< 1
II	— 10	— 50	1 ÷ 2
IV	— 10	— 50	2 ÷ 4
V	— 40	— 70	3 ÷ 13

La fig. 1 mostra alcune isoterme fra le più significative per i nostri scopi, tracciate in base ai valori riportati nelle predette tabelle; in figg. 2 e 3 sono riportati rispettivamente i diagrammi p/t e log p/1/T relativi alle

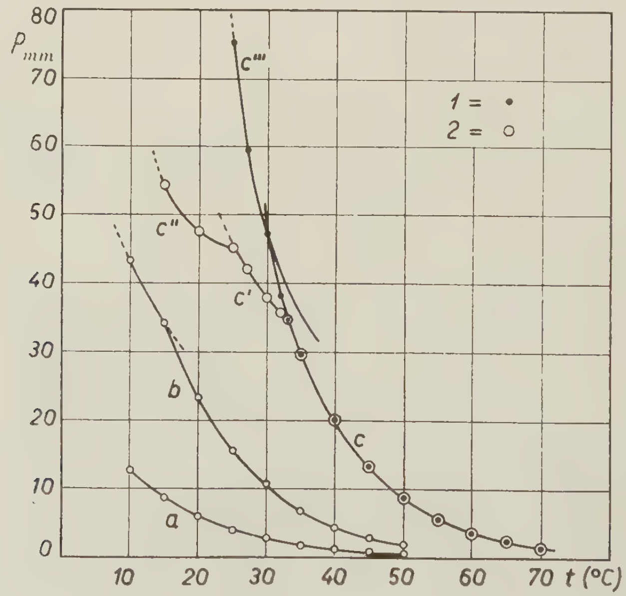


Fig. 2.

composizioni indicate nelle didascalie. Nella Tabella III sono riportati alcuni valori – medi – di ΔH (calcolati mediante la forma integrata dell'equazione di Van't Hoff), che per le varie composizioni del sistema indicano il calore di dissociazione dell'ammoniacato o quello di evaporazione dell'ammoniaca.

TABELLA I.

Valori di p_{NH_3} *in mm di mercurio per sistemi contenenti meno di* 1 NH_3 *per* 1 NH_4PF_6.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6			
	0,133	0,554	0,807	0,827
— 50	0,45	0,55	0,50	0,50
— 45	0,77	0,75	0,75	0,80
— 40	0,10	1,15	1,15	1,15
— 35	1,75	1,75	1,75	1,80
— 30	2,90	2,90	2,90	2,90
— 25	3,90	3,90	4,00	3,95
— 20	6,05	6,00	6,00	6,05
— 15	8,60	8,80	8,70	8,70
— 10	12,60	12,70	12,60	12,55

In Tabella VI è riportata una serie di valori p_{NH_3}/composizione, ottenuti da misure orientative effettuate sul sistema $KPF_{6\,(solido)}/NH_{3\,(gas)}$; la misura relativa alla composizione di 1,77 moli di NH_3 per mole di KPF_6, è stata fatta con maggior cura, e dai valori ottenuti si è calcolato per ΔH il valore di circa 6,2 Kc/M.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Un primo equilibrio

$$(1) \qquad NH_4PF_{6\,(solido)} + NH_{3\,(gas)} \rightleftarrows NH_4PF_6 \cdot NH_{3\,(solido)}$$

esiste in tutto il campo di temperatura esplorato, per concentrazioni di ammoniaca inferiori a una mole di NH_3 per mole di NH_4PF_6; i dati della Tabella I e le isoterme della figura 1 mostrano il tratto monovariante corrispondente all'equilibrio (1) per temperature comprese fra —10° e —50° C; tale equilibrio esiste anche fino a —70° C, ma i valori delle tensioni di ammoniaca in tale campo di temperatura non sono stati riportati nelle tabelle, poiché essi – dell'ordine di pochi decimi di millimetro – sono troppo vicini al limite di sensibilità del nostro apparato di misura delle pressioni, per consentire una soddisfaciente riproducibilità dei dati. La curva «a» della fig. 2 e la retta «a» della fig. 3 sono di conferma all'esistenza dell'unico equilibrio (1) nel campo di temperatura in esse indicato, e la Tabella III attribuisce un valore di circa 10 Kc/mole al calore di dissociazione dell'$NH_4PF_6 \cdot NH_3$.

Un secondo equilibrio

(2) $$NH_4PF_6 \cdot NH_{3\,(solido)} + NH_{3\,(gas)} \rightleftarrows NH_4PF_6 \cdot 2NH_{3\,(solido)}$$

è messo in evidenza dai dati della Tabella II, e – nella fig. 1 – dalle isoterme comprese fra —50° e —20° C, per concentrazioni comprese fra 1 e 2 moli

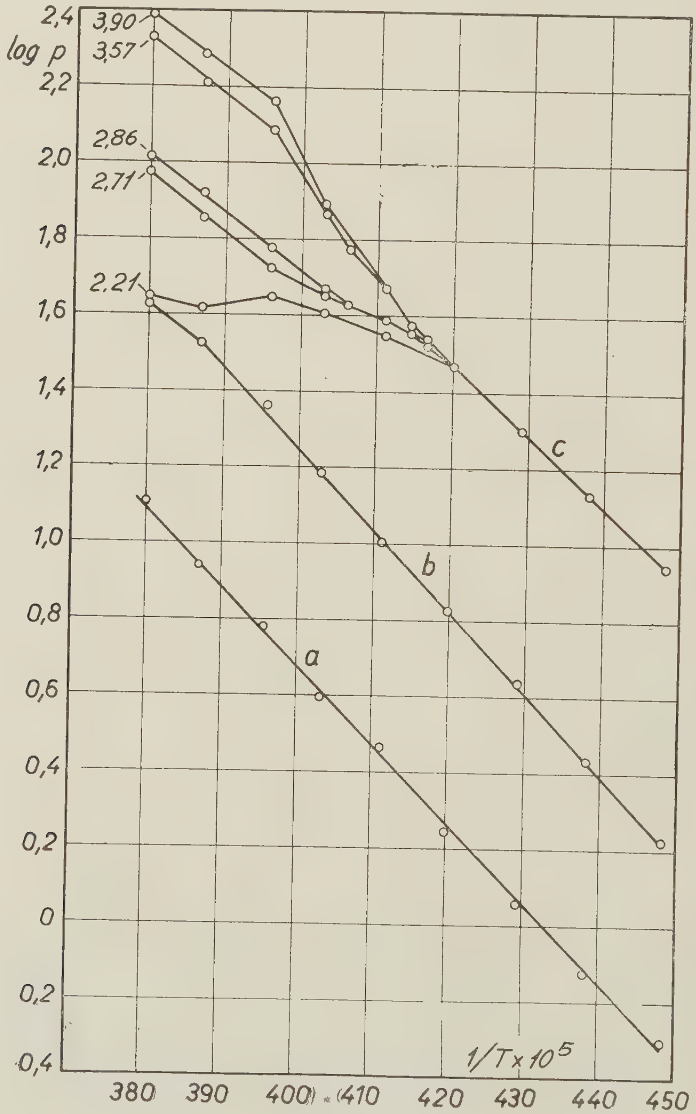


Fig. 3.

di NH_3 per mole di NH_4PF_6. Per temperature comprese fra —50° e —70° C, vale, per l'esistenza dell'equilibrio (2), quanto si è già detto a proposito dell'equilibrio (1). I diagrammi « b » delle figg. 2 e 3, integrando la fig. 1, precisano che l'equilibrio (2) esiste fino a circa —15° C. La Tabella III

mostra che i calori di dissociazione del mono e del bi–ammoniacato sono quasi uguali (9,9 e 9,7 Kc/mole rispettivamente).

TABELLA II.

Valori di p_{NH_3} *in mm di mercurio per sistemi contenenti* $1 \div 2$ *moli di* NH_3 *per* 1 *mole* NH_4PF_6.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6					
	1,107	1,116	1,380	1,658	1,800	1,874
— 50	1,70	1,60	1,70	1,70	1,65	1,75
— 45	2,70	2,70	2,75	2,72	2,70	2,75
— 40	4,35	4,20	4,40	4,20	4,25	4,45
— 35	6,65	6,70	6,90	6,70	6,60	6,80
— 30	10,50	10,40	10,40	10,50	10,40	10,70
— 25	15,10	15,40	15,40	15,50	15,60	15,70
— 20	22,95	23,25	23,25	23,05	23,20	23,15
— 15	33,00	33,40	34,20	34,50	33,40	33,80
— 10	42,75	43,30	43,25	43,40	43,10	43,20

Nel campo di concentrazione $2 \div 4$ moli di NH per mole di fluofosfato, il sistema ha un comportamento meno semplice di quelli finora visti per concentrazioni di ammoniaca $\leq$ 2 moli. I dati della Tabella IV, le isoterme della fig. 1, ed i diagrammi delle figg. 2 e 3, mostrano che il sistema NH_4PF_6/NH_3, in tale campo di composizione, ha un comportamento diverso a temperature inferiori o superiori a —33° C.

TABELLA III.

Riferimento ai diagrammi della fig. 3	ΔH
a	9,9
b	9,7
b'	7,1
c	8,5
Tratti rettilinei, paralleli, successivi al tratto *c* della fig. 3	7,2

TABELLA IV.

Valori di p_{NH_3} *in mm di mercurio per sistemi contenenti* $2 \div 4$ *moli di* NH_3 *per 1 mole di* NH_4PF_6.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6															
	2,16	2,21	2,35	2,43	2,50	2,63	2,70	2,71	2,86	2,94	3,15	3,29	3,57	3,66	3,82	3,91
— 50	8,4	8,5	8,4	8,4	8,8	8,7	8,4	8,8	8,8	8,5	8,4	9,0	8,5	9,2	9,3	9,0
— 45	13,4	13,4	13,6	13,3	13,2	13,3	13,5	13,8	13,7	13,2	13,4	13,6	14,0	13,8	13,4	13,4
— 40	20,0	20,5	20,0	19,9	20,0	20,5	19,9	20,5	20,2	20,1	20,2	20,2	20,4	20,2	19,3	20,3
— 35	29,5	30,2	30,3	29,7	29,8	29,9	29,9	30,0	30,0	30,3	29,8	30,4	31,0	30,6	29,5	30,2
— 33	—	—	—	—	34,6	34,7	—	33,6	34,6	—	34,2	35,3	34,5	—	34,5	—
— 32	—	—	—	—	35,5	36,0	—	35,9	36,6	—	37,3	37,5	38,0	—	37,0	—
— 30	35,6	36,5	37,1	38,4	37,7	37,5	38,8	38,9	39,3	39,0	46,5	47,5	47,2	46,5	46,3	48,3
— 27	—	—	—	—	42,0	42,1	—	42,9	43,5	—	56,5	59,8	59,5	—	62,0	—
— 25	41,0	43,7	43,0	44,5	45,0	45,1	45,5	45,3	46,6	48,8	65,0	73,5	75,0	76,5	79,0	81,5
— 20	45,0*	47,4*	46,8*	49,3*	47,5	47,1	53,2	53,2	60,5	64,0	85,0	95,0	125,0	130,0	136,0	146,0
— 15	42,0*	45,5*	45,6*	50,2*	54,3	63,2	70,2	71,0	84,3	86,7	112,6	132,7	160,0	174,0	185,0	193,0
— 10	44,0*	52,7*	59,5*	66,0*	71,0	84,0	94,0	94,5	104,1	114,5	148,5	171,4	215,0	221,0	233,0	245,0

Temperature inferiori a — 33° C e composizioni comprese fra 2 e 4 moli di NH_3 *per mole di* NH_4PF_6.

In queste condizioni, i dati della Tabella IV, le isoterme della fig. 1 ed i tratti « c » delle figg. 2 e 3 concordano per l'esistenza – fra — 33° e — 70° C – dell'equilibrio.

$$NH_4PF_6 \cdot 2NH_{3\,(solido)} + 2NH_3 \rightleftarrows NH_4PF_6 \cdot 4\,NH_{3\,(solido)} \tag{3}$$

La Tabella V mostra l'esistenza, a concentrazioni superiori a 4 moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6, di un ulteriore tratto monovariante, attribuibile alla soluzione satura in NH_3 del tetraammoniacato.

Temperature superiori a — 33° C e composizione comprese fra 2 e 4 moli di NH_3 *per mole di* NH_4PF_6.

In queste condizioni, il comportamento del sistema è più complesso: per temperature comprese fra — 33° e — 27° C (fig. 1, Tabella IV), il tratto monovariante esistente a temperature inferiori a — 33° C e relativo al campo di composizione 2 ÷ 4 moli di NH_3 per mole di NH_4PF_6, si spezza in due tratti « a » e « b », visibili nella isoterma a — 30° C della fig. 1; il tratto « a » è relativo alle composizioni comprese fra 2 e 3 moli di NH_3 ed il tratto « b » a quelle comprese fra 3 e 4 moli di NH_3, sempre per una mole di NH_4PF_6; attorno a — 25° C il tratto « b » scompare, e a temperature superiori a — 20° C scompare anche il tratto « a ». Entro i limiti di composizione e temperatura quì indicati, il raggiungimento dell'equilibrio è assai più lento (15 ÷ 30 ore), e la riproducibilità dei dati sperimentali non è del tutto soddisfaciente. Questo comportamento, e l'andamento analogo della p_{NH_3} con la temperatura, desumibile dalla Tabella IV (valori asteriscati) sono assai simili al comportamento notato da Biltz e Stallenwerk [7] nello studio del sistema $AgCl/NH_3$, e fanno pensare che anche nel nostro caso possa verificarsi la formazione di soluzioni solide, fra il bi ed il tetra ammoniacato, e di soluzioni sature in NH_3. Le misure relative ai campi di composizione e temperatura ora indicate sono state numerosissime (varie centinaia), ma non hanno consentito di trarre conclusioni risolutive.

A temperature superiori a — 30° C si ha formazione di $NH_4PF_6 \cdot 2NH_3$, fin verso — 15° C; e a temperature superiori e fino a 28° C [1] formazione di soluzioni di NH_3 in $NH_4PF_6 \cdot NH_3$.

Riassumendo si può concludere che il sistema NH_4PF_6/NH_3 – nel campo di temperatura e composizione studiato nel presente lavoro ed in uno precedente [1], – dà luogo alla formazione dei seguenti composti:

$NH_4PF_6 \cdot NH_3$ (stabile fra — 70° e 28° C)

$NH_4PF_6 \cdot 2\,NH_3$ (stabile fra — 70° e — 15° C)

$NH_4PF_6 \cdot 4\,NH_3$ (stabile fra — 70° e — 33° C)

TABELLA V.

Valori di p_{NH_3} in mm di mercurio per sistemi contenenti 3 ÷ 13 moli di NH_3 *per 1 mole di* NH_4PF_6.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole NH_4PF_6							
	3,27	3,63	3,75	3,90	4,12	4,48	4,60	4,85
— 40	20,4	20,5	—	20,0	111,5	—	222	230
— 45	12,8	12,9	13,5	13,0	—	182	183	182
— 50	9,0	8,7	8,8	8,9	69,1	148	149	150
— 55	5,7	5,5	5,3	6,1	—	107	106	107
— 60	3,4	3,6	3,5	4,0	44,5	83	83	83
— 65	2,2	2,3	2,4	2,4	33,2	—	—	63
— 70	1,3	1,4	1,6	1,7	25,6	—	45	44

segue: TABELLA.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole di NH_5PF_6								
	5,70	6,20	6,69	7,30	7,93	8,42	9,29	10,28	13,83
— 40	234	—	237	—	294	315	341	377	—
— 45	182	182	—	200	—	235	—	276	343
— 50	148	148	147	—	164	172	184	—	255
— 55	107	106	—	115	—	125	—	143	183
— 60	84	—	85	—	86	—	86	107	130
— 65	64	66	—	66	—	66	67	68	92
— 70	45	44	45	46	46	47	—	50	65

Con metodo analogo a quello descritto nella presente Nota per lo studio del sistema NH_4PF_6/NH_3, si sta ora esaminando il comportamento di altri sistemi XPF_6/NH_3; in Tabella VI è riportata una serie orientativa di misure relative al sistema KPF_6/NH_3, dalle quali può desumersi che il KPF_6 non dà composti definiti con l'NH_3.

Il confronto fra il comportamento del sistema KPF_6/NH_3 – nel quale non si riscontra la formazione di ammoniacati – e quello del sistema NH_4PF_6/NH_3, nel quale invece si ha formazione di tali composti, fa ritenere che, negli ammoniacati che si riscontrano in quest'ultimo sistema, l'NH_3 sia legata allo ione ammonio.

TABELLA VI.

Valori di p_{NH_3} in mm di mercurio.

Temperatura °C	Moli di NH_3 per mole di KPF_6												
	0,11	0,37	0,59	1,18	1,77	2,98	5,50	5,82	6,70	7,21	7,92	8,59	8,90
— 70	27	27	28	28	26	29	34	38	41	43	45	48	52
— 65	41	40	41	41	41	41	51	53	60	65	71	77	80
— 60	58	58	58	60	60	62	69	73	86	91	101	107	112
— 55	78	78	78	80	81	82	99	106	123	132	144	—	154
— 50	111	114	115	115	116	116	134	145	165	175	195	208	—
— 45	150	152	154	154	154	165	190	—	235	245	270	280	—
— 40	201	212	212	213	211	—	265	270	305	320	350	360	—

Il confronto del valore della vibrazione di stretching asimmetrico del gruppo N–H, relativo allo ione ammonio dell'NH_4PF_6, e di vari altri sali di ammonio [8], ha mostrato che nel caso ddll'NH_4^+ dell'NH_4PF_6, si ha il valore più alto della ν_3, cui corrisponde la maggiore «libertà» dello ione NH_4^+ e quindi la maggiore protonizzazione degli idrogeni. Questi protoni acidici dello ione ammonio possono giustificare [9] l'ipotesi del legame fra ione ammonio ed ammoniaca, al quale noi riteniamo possa essere attribuita l'esistenza degli ammoniacati dell'esafluofosfato di ammonio.

BIBLIOGRAFIA.

[1] « Ric. Sci. », *28*, 2090 (1956).
[2] « Proc. Roy. Soc. », *21 A*, 109 (1873).
[3] « Ber. », *61*, 799 (1928); « Ber. », *65*, 1253 (1932).
[4] *Audrieth. Inorganic Syntheses.* Mc. Graw. Hill Inc. 1950 (vol. 3°, p. 111).
[5] « Ber. », *63*, 1062 (1930).
[6] « Analyst », *78*, 405 (1953).
[7] « Z. An. Chem. », *114*, 181 (1920).
[8] « Rend. Accad. Lincei », VIII, *26*, 625 (1959).
[9] « J. A. C. S. », *80*, 1038 (1958).

Geologia. — *Il Mesozoico epicontinentale della Sardegna.* Nota (*) del Corrisp. SILVIO VARDABASSO.

È una conoscenza da tempo acquisita che l'ambiente paleogeografico della Sardegna è stato ben diverso da quelli dell'Italia continentale (Alpi) e peninsulare (Appennini) con l'appendice insulare siciliana.

Questo risulta in modo particolare già dalle formazioni mesozoiche epicontinentali nel primo caso, di geosinclinale dall'altra parte.

La Sardegna, consolidata e stabilizzata dal plutone granitico ercinico, si è trovata cioè durante il Mesozoico in condizioni di terra emersa pianeggiante (peneplanata) per demolizione delle montagne paleozoiche. Così l'Isola è stata appena lambita da mari poco profondi, che solo temporaneamente la hanno in parte invasa, come lo indicano in modo schematico le tre cartine allegate (fig. 1). Perciò in contrasto con quelle coeve delle altre regioni italiane le formazioni mesozoiche della Sardegna sono poco estese, poco potenti, poco dislocate e per lo più in facies diverse (fig. 2).

Questo risulta dalle ricerche stratigrafico–paleontologiche incominciate cento anni fa da A. Lamarmora, in collaborazione con G. Meneghini, e poi continuate da parecchi studiosi italiani (Lovisato, De Stefani, Parona, Fucini, Dainelli, ed altri) e stranieri (Bornemann, Tornquist, Deninger, Sterzel, Krasser, Teichmüller, Dorn, Oosterbaan, ed altri). In questi ultimi anni poi le nostre conoscenze per i lavori di rilevamento in corso e per quelli nel campo della geologia applicata, in rapporto col grande impulso dato all'economia sarda, si sono notevolmente allargate anche in questo campo.

Qui mi propongo pertanto di fare brevemente il punto su alcuni aspetti del Mesozoico della Sardegna, rimasti finora alquanto in ombra, come quelli paleogeografici delle discordanze e lacune o tettonici, delle dislocazioni.

Siccome il nostro Mesozoico è meno incompleto lungo il bordo occidentale del massiccio ercinico, rivolgiamo l'attenzione prima a questo per passare poi a quello più lacunoso della costa orientale.

M e s o z o i c o della S a r d e g n a o c c i d e n t a l e. Questo raggiunge il massimo sviluppo nella piccola appendice di NO (Nurra), dai dintorni di Alghero a quelli di Porto Torres. È conservato inoltre in piccoli testimoni isolati, appartenenti all'uno o all'altro periodo, lungo la costa dell'Iglesiente a nord di Capo Pecora, da dove questi depositi di mare epicontinentale continuavano probabilmente fino nel Campidano (Guspini); inoltre lungo le coste del Sulcis (Golfo di Palmas) ed in qualche altro punto.

Nella N u r r a la serie ha una potenza complessiva di circa 1200 m così ripartita: Trias 250–300 m, Giurese 600 m, Cretaceo 250–300 m. La

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1959.

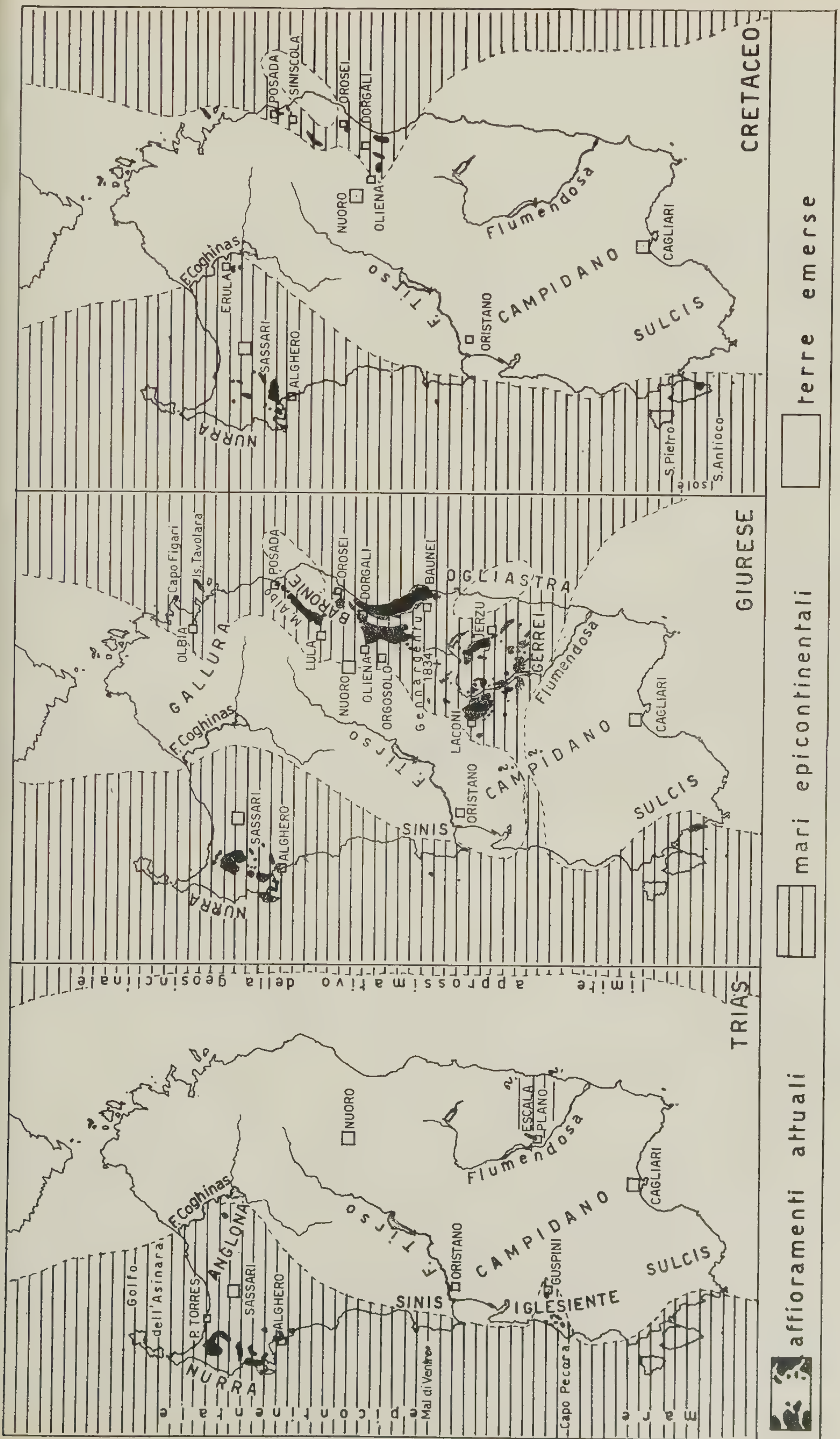


Fig. 1. – *Cartine paleogeografiche della Sardegna durante il Mesozoico.*

serie, sia per sprofondamenti tettonici che per erosione, non affiora mai in un unico profilo.

Il Trias in facies germanica (Buntsandstein, Muschelkalk, Keuper) è compreso fra il Permico a facies continentale (conglomerati ed arenarie del

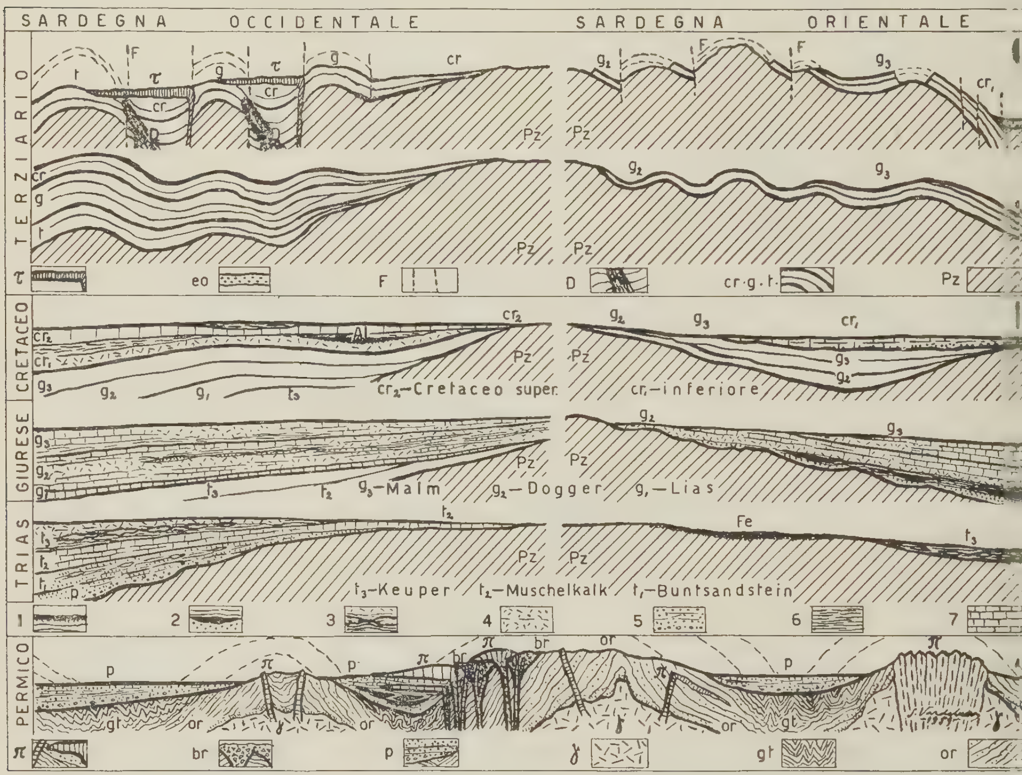


Fig. 2. – *Facies, discordanze e dislocazioni del Mesozoico in Sardegna.*

A – Rilievo ercinico parzialmente demolito.

π – porfidi e porfiriti in generale, br – brecce vulcaniche, p – sedimenti clastici con flora del Rotliegend e lenti di antra

γ – granito ercinico, gt – Gotlandiano schistoso più o meno grafitico, or – Ordoviciano schistoso filladico;

B – Facies mesozoiche continentali e di mari epicontinentali.

1. – paleosuoli: Fe – lateriti limonitiche, Al – bauxiti; 2. – lenti di carbone; 3. – lenti di gesso; 4. – dolo

5. – conglomerati ed arenarie; 6. – argille e marne; 7. – calcari vari;

C – Deformazioni tettoniche delle coperture mesozoiche.

τ – trachiti oligoceniche co – arenarie eoceniche con lenti di calcare nummulitico; F – pieghe fagliate; D – diapir gessosi; cr.g.t. – Mesozoico in generale; Pz – Paleozoico in generale.

Rotliegend con molto scarse tracce di piante e limitati espandimenti porfirici) ed un Lias molto ridotto (15 m di calcari grigi). Il passaggio dal Permico al Trias inferiore è graduale per cui, in mancanza di fossili, finora non si è riusciti a tracciare un limite netto.

Sorvolando su altri particolari, già noti, rivolgiamo piuttosto l'attenzione sulle facies gessose del Trias. Siccome il gesso, più abbondante nel Keuper, si presenta anche nel Buntsandstein, l'interpretazione tettonica di qualche piccola zolla gessosa, isolata per faglia, può essere incerta. D'altra

parte con la presenza del gesso si potrà spiegare meglio qualche piegamento disarmonico e qualche dislocazione, probabilmente diapirica, del Mesozoico della Nurra.

Sta il fatto che in un sondaggio profondo 600 m (Cugiareddu), recentemente da noi diretto per la ricerca di un presunto bacino antracitifero permico, invano già cercato con tre sondaggi da B. Lotti (1930), i gessi del Keuper, fortemente dislocati, sono stati attraversati per oltre 200 m, mentre il loro spessore stratigrafico probabilmente è di circa 50 m.

In contrasto con questo raddrizzamento degli strati gessoso–marnosi del Trias superiore sta la giacitura poco disturbata della circostante serie calcareo–dolomitica a piegamento di tipo sassone.

L'Istituto Geologico di Cagliari ha in corso ricerche strutturali sul Mesozoico della Nurra per tentare di individuare altre discordanze tettoniche (diapiriche) analoghe, riferibili appunto ad una serie stratigrafica litologicamente così eterogenea come il nostro Trias epicontinentale.

Un secondo particolare, di recente segnalazione, riguardante il Mesozoico della Nurra è invece un riflesso della discontinuità di sedimentazione. Essendo emersi per una debole regressione marina, durante il Cretaceo medio, i precedenti depositi calcareo–dolomitici, si è potuto formare un paleosuolo a terra rossa, dal quale ha avuto origine la scarsa bauxite della Nurra, poi coperta e protetta dal calcare del Cretaceo superiore, come è stato esaurientemente illustrato da Cocco e Pecorini in una recente Memoria della nostra Accademia.

Mentre in questo settore estremo della costa occidentale il Cretaceo, sia pure lacunoso, poggia sul Giurese e questo sul Trias, che a sua volta segue sul Permico, se ci spingiamo solo un poco nell'interno dell'Isola, a circa 20 km dal Golfo dell'Asinara in sinistra del Fiume Coghinas, piccole placche di Muschelkalk, rispettivamente di calcare ippuritico del Cretaceo superiore sono direttamente discordanti sugli schisti cristallini paleozoici e restano coperte dalle trachiti oligoceniche (Monte Sassu fra Chiaramonti ed Erula). Queste trachiti dell'Anglona si estendono indifferentemente anche sugli schisti e sui graniti, presumibilmente in gran parte spogliati della sottile copertura mesozoica, qui molto lacunosa.

Gli stessi espandimenti invece nella Nurra hanno fossilizzato una superficie scolpita (paleoidrografia eocenica) nella serie mesozoica dislocata per ampie pieghe fagliate, coprendo le lave indifferentemente lembi di Trias, Giurese o Cretaceo. Il Mesozoico epicontinentale della Nurra, in coincidenza con la lacuna eocenica, è stato cioè dapprima coinvolto dal piegamento laramico e poi in parte anche eroso.

Nel settore meridionale della stessa costa occidentale, invece, l'Eocene conservato entro il bacino lignitifero del Sulcis (Carbonia) risulta discordante su qualche lembo di Mesozoico, dislocato ed isolato sia a nord (Campo a mare) che a sud (Monti Sari). Al Cretaceo dell'Isola di S. Antioco, dislocato e coperto dal complesso vulcanico oligocenico, sappiamo che – come a quello della Nurra – sono legate tracce di paleosuolo bauxitico; ma qui le nostre ricerche sono appena iniziate.

Una più grande estensione dei mari epicontinentali mesozoici in questa zona costiera è da considerarsi come accertata dalla frequenza di ciottoli di calcari mesozoici nel conglomerato eocenico dell'Iglesiente (Montevecchio, ecc.) e dalle coltri degli stessi ciottoli, presumibilmente rimessi in parte in circolazione durante il Terziario recente; dei quali si ha conoscenza in parecchi tratti della zona costiera e anche sopra le trachiti dell'Isola di S. Pietro.

In altri termini non è azzardato pensare che al largo della costa sulcitana esistesse, per così dire, una seconda Nurra mesozoica poi scompaginata, smantellata e sprofondata. E, per interpolazione, potremmo anche ammettere che questa fascia marginale di depositi mesozoici epicontinentali si appoggiasse sul Cristallino antico del tratto intermedio, ora rappresentato solo dall'isoletta gneissica di Mal di Ventre, di fronte alla quale, lungo la costa del Sinis, a nord del Golfo di Oristano, non sono infrequenti i ciottoli di calcari mesozoici, la cui provenienza non può essere cercata nell'interno della Sardegna.

Del resto una chiara documentazione della platea continentale mesozoica sommersa è fornita dalle tenui placche di Trias (in media 40 m di Muschelkalk) tra la miniera di Ingurtosu e il mare a nord di Capo Pecora (Scivo, Naroci, ecc.), dove le sottostanti arenarie rosse poggiano sugli schisti paleozoici e in qualche punto anche sopra un Permico in facies di Verrucano; cioè dal più al meno come nella Nurra.

M e s o z o i c o della S a r d e g n a o r i e n t a l e. Per estensione questa copertura del massiccio ercinico è molto più importante e conferisce al paesaggio un maggior risalto che non il Mesozoico della costa occidentale. Stratigraficamente però la serie è molto più ridotta (dal Giurese medio-superiore al Cretaceo inferiore).

Possiamo distinguere qui tre settori, i quali, scendendo da nord verso sud, sono sempre più estesi e precisamente:

1° la zona costiera della Gallura, con l'Isola Tavolara ed il Capo Figari all'imbocco del Golfo di Olbia;

2° la zona costiera delle Baronie in senso lato, col Golfo di Orosei, il tratto di Monte Albo ed i Monti di Oliena–Orgosolo, Dorgali–Baunei;

3° la zona interna a sud del Gennargentu (Alto e Medio Flumendosa) coi caratteristici piccoli altopiani carsici (Tacchi e Tonneri), i quali dall'Ogliastra si continuano nella Barbagia, nel Gerrei e nel Sarcidano.

L'attuale, ineguale sviluppo superficiale degli affioramenti mesozoici di queste tre zone non dovrebbe però essere originario, ma almeno in parte una conseguenza dello smantellamento, perché nella Sardegna orientale sopra un tratto di circa 200 km, partendo da sud verso nord, si constata una progressiva demolizione non solo delle coperture ma anche delle stesse strutture paleozoiche. Tanto è vero che a nord affiora quasi esclusivamente il nucleo granitico (Gallura), fiancheggiato solo da strette fasce di schisti molto cristallini, mentre a sud (Gerrei) prevalgono gli schisti poco cristallini, anche fossiliferi, coperti da estese placche discordanti di Mesozoico e di Terziario

Mentre per i particolari rimando a mie precedenti pubblicazioni, nelle quali è riportata anche la vecchia bibliografia, qui mi propongo di cogliere solo qualche aspetto caratteristico specialmente dal punto di vista delle discordanze e dislocazioni del Mesozoico epicontinentale della Sardegna orientale.

A tale scopo ci conviene prendere le mosse dalla costa del Golfo di Orosei, cioè dalla zona intermedia, dove la serie è più potente per una relativa, temporanea subsidenza della platea continentale qui alquanto instabile. Infatti la serie raggiunge uno spessore massimo di circa 800 m, conferendo al rilievo un maggior risalto morfologico. Ed invero, il paesaggio giovanile, quasi alpino (zona elvetica), dei Monti di Oliena contrasta con quello senile, sia pure alquanto ringiovanito, del retrostante rilievo del Gennargentu ed offre così anche la possibilità di esaminare buoni profili.

Questo spessore della serie mesozoica del Golfo di Orosei (in prevalenza Dogger e Malm e solo subordinatamente Cretaceo inferiore) si riduce a vista sia verso sud che verso nord anche in prossimità dell'attuale costa tirrenica.

Il profilo longitudinale più chiaro ed immediato è quello del fronte occidentale dei Monti di Oliena, dove partendo dalle molte centinaia di metri di dolomia ma specialmente di calcari compatti, ben stratificati, superiormente anche selciferi, delle cime dietro il villaggio, si arriva dopo meno di 20 km alle poche decine di metri dei termini basali arenaceo–conglomeratici e calcareo–dolomitici dei piccoli testimoni (Monte Nuovo S. Giovanni, Monte Fumai, ecc.) in vicinanza del Passo di Corr'e boi (Gennargentu). Su tutto il tratto la serie mesozoica è discordante solo sugli schisti paleozoici.

Un secondo profilo longitudinale per oltre 30 km, partendo dai dintorni di Dorgali verso quelli di Baunei, ci mostra invece che a nord la dolomia del Dogger è direttamente discordante sul granito, mentre a sud i calcari litografici del Malm sono discordanti sul complesso filladico silurico.

Un terzo profilo longitudinale, ancor più istruttivo, è quello del tratto di Monte Albo (Lula–Siniscola–Posada). Anche in questo la serie incomincia con i soliti termini basali clastici (arenarie) discordanti sugli schisti silurici e su qualche sacca di Verrucano entro gli stessi (come del resto si constata anche per il tratto Dorgali–Baunei). Seguono poi la dolomia del Dogger ed i calcari bianchi bene stratificati del Malm con qualche passaggio laterale ad una facies dolomitica, poco diversa da quella inferiore. Fin qui il profilo ricorda quello dei Monti di Oliena. La differenza invece si manifesta nel Cretaceo, che nel Monte Albo è caratterizzato da una discordanza (brecce e conglomerato poligenico) sul Giurese per passare, fra Siniscola e Posada, addirittura sui micaschisti e gneiss del Silurico.

Evidentemente le condizioni paleogeografiche al tempo dell'invasione marina giurese lungo la costa orientale sono state alquanto diverse da quelle della costa occidentale. Un rilievo accentuato da dislivelli, lungo la prima, ha incanalato l'ingressione marina di preferenza entro le zone schistose per sommergere solo marginalmente quelle granitiche più elevate.

Qualche movimento oscillatorio durante la sedimentazione ha favorito la lacunosità della serie e la discordanza fra il Giurese e il Cretaceo.

Si tratta qui forse già di un blando accenno alla fase neocimerica dell'èra alpidica.

Ma le dislocazioni che hanno veramente interessato il Mesozoico della costa orientale sono da riferirsi alla fase laramica, come notoriamente lo mostrano alcuni profili tipici dei dintorni di Dorgali e di Orosei.

Passando rapidamente alla zona interna (bacino del Flumendosa) già oggetto di parecchie pubblicazioni, specialmente per l'interesse destato dai giacimenti ferriferi sul penepiano sotto i tavolati calcareo-dolomitici (tacchi), basterà accennare alla potenza ineguale (da qualche centinaio a qualche decina di metri) della serie attribuita esclusivamente al Dogger. Questa è discordante per lo più sul Silurico ma anche sul Permico ed in qualche punto pure sul Trias superiore (Keuper dei dintorni di Escalaplano). In prossimità della depressione tettonica del Campidano gli ultimi lembi di calcare giurese poggiano però direttamente sul granito (Nureci).

Così anche qui, come presso Dorgali, alla Tavolara ed altrove si ha la prova di una inversione del rilievo, già elevato al tempo della trasgressione giurese ed abbassato durante il Terziario.

Questo abbassamento è avvenuto attraverso un piegamento molto ampio accompagnato da fratture, già segnalate, fra il Gennargentu e la fossa del Campidano.

Entro questo quadro stratigrafico e tettonico del Giurese epicontinentale della zona dei tacchi male si inquadrerebbero però le presunte zolle di calcare mesozoico dislocate ad ovest di Laconi (dintorni di Asuni) e profondamente sezionate dall'Araxisi. Sorge il sospetto, cioè, che le «prove» portate in favore di questo mesozoico non siano altro che brecce tettoniche entro la massa dei calcari gotlandiani prese per brecce stratigrafiche basali di un Mesozoico del tutto singolare.

Nota bibliografica.

La bibliografia sul Mesozoico della Sardegna occidentale è già riportata da A. Oosterbaan, *Étude géologique et paléontologique de la Nurra* (*Sardaigne*), Utrecht 1936.

Quella per la Sardegna orientale figura in S. Vardabasso, *Il Mesozoico della Sardegna orientale*, «Rend. Sem. Fac. Scienze», XVI, Cagliari 1948.

Qui appresso vengono citati solo gli ultimi studi apparsi sull'argomento, anche questi con la bibliografia più recente.

Calvino, Dieni, Ferasin e Piccoli, *Relazione preliminare sui rilevamenti geologici nel foglio N. 195 (Orosei)*, «Boll. Soc. Geol. It.», 77, Roma 1958.

Cocco e Pecorini, *Osservazioni sulle bauxiti della Nurra*, «Mem. Acc. Lincei», serie VIII, vol. V, sez. II, fasc. 7, Roma 1959.

Caria Comaschi, *Le piante fossili della Sardegna*, «Rivista It. Pal. e Strat.», Memoria VII, Milano 1959.

M. Deriu e G. C. Negretti, *Il giacimento marmifero di Asuni*, Assessorato Industria Regione Sarda. Roma 1959.

Botanica. — *Effetti di denutrizione in* Zea Mays. Nota (*) del Corrisp. ROBERTO SAVELLI.

Un sufficiente depauperamento dell'organismo *Zea Mays* lo conduce ad un assetto nuovo, altrettanto fisso e tipico quanto il normale, i cui caratteri principali sono:

1° *La scomparsa della funzione maschile.*

2° *La mutata sistemazione topografica del sesso superstite, i cui fiori vanno ad inserirsi al sommo della pianta.*

Circa il primo punto sarebbe vano consentire ad interpretazioni finaliste, perché la natura offre a scelta, nei diversi ordini di piante, i comportamenti più varî. In certe stirpi di *Cucurbita* si otterrebbe l'effetto opposto: l'abolizione del sesso femminile.

Circa il secondo punto occorre richiamare a mente l'ordinamento normale:

al sommo della pianta, una grande pannocchia terminale, lassa e scoperta, riunisce i fiori maschili; il suo asse centrale è dato dalla terminazione dello stelo, che porta molte ramificazioni spiciformi;

i fiori femminili invece si riuniscono, disponendosi in molte file, intorno ad un grosso asse carnoso, quasi cilindrico, solitario e semplice: uno spadice ravvolto in ampie guaine, dalla sommità delle quali, a un certo momento, fuoriescono soltanto gli stimmi, lunghissimi, formanti come un ciuffo di rossastra capigliatura: ogni infiorescenza ♀ è una spiga, e ve ne sono parecchie in ogni pianta, inserite ascellarmente sulla parte media e bassa dello stelo.

Nella pianta depauperata tutto si riduce ad una sola spiga terminale. L'unico asse vegetativo della pianta, l'asse primario, raccorcia fortemente verso l'alto gli internodî, ivi assumendo l'aspetto di una rachide dentata, ogni dente portando quello che io direi l'elemento costruttivo fondamentale della nuova architettura: *una coppia di spighette, una peduncolata ed una sessile.*

Quest'ultima, la sessile, contiene un fiore femminile, fertile, con ovario globoso–appuntito. Non ho visto né il secondo fiore, né le traccie rudimentali d'androceo, che appajono nella spighetta ♀ normale. Ogni ovario è sormontato dal suo *stylo longissimo gracili exerto pendulo*, secondo la felice espressione della classica diagnosi; ed è circondato da invogli protettivi: con facilità ne ho contati quattro, ma probabilmente ve ne sono altri due, più brevi e meno visibili.

La spighetta peduncolata è generalmente « vuota », cioè le glume non contengono se non altri invogli bratteali (diciamo *glumelle* e *glumellule*, per non entrare nelle specificazioni più impegnative di una diversa terminologia) e nessun organo sessuale.

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1959.

Così mi è apparso in tutti i casi esaminati, eccetto uno, nel quale un peduncolo ornato di rari, brevi e robusti peli, era percorso da un grosso fascio vascolare centrale, che poi si biforcava per mandare le nervature a due glume. In fondo alla cavità determinata dalle glume, sopra una specie di ricettacolo, erano chiaramente visibili tre abbozzi di antere, con al centro un corpicciolo globoide dotato di appendice filiforme, il tutto protetto da sottili trasparenti membranosi invogli bratteali: un abbozzo, o meglio un aborto di fiore ermafrodito. Esso non merita molto rilievo, perché tanto il fiore femminile quanto il maschile sono nel Mais fondamentalmente ermafroditi, divenuti unisessuali per riduzione. Lo stesso fatto dell'abbinamento di due spighette, una peduncolata e una sessile, è un atteggiamento maschile; nondimeno la riduzione della mascolinità a tenui vestigia puramente morfologiche è – nelle imposte condizioni – tassativa. Resta tuttavia spiegato come – in condizioni meno severe – infiorescenze consimili possano essere apparse androgine (1).

L'ottenimento di infiorescenze femminili terminali ha, fra l'altro, la conseguenza probabile di riabilitare il disegno dato da Li-Shi-chen (16° secolo) e troppo frettolosamente giudicato fantastico. La figura di questo antico Mais cinese mostra una infiorescenza femminile terminale e scoperta. Nei miei reperti c'è sempre una tendenza delle ultime due foglie, o soltanto dell'ultima, ad inguainare l'infiorescenza; ma quando poi essa cresce e matura, fuoriesce almeno in parte. E fin qui non avrei obiezioni alla figura cinese. Il male è che su di essa si possono calcolare circa 30 chicchi: troppi per consentire uno stretto collegamento con i miei casi.

Ovviamente, le mie piante, da sole, non potrebbero fare seme. Esse portano – in genere sopra la 8ª foglia – da 8 a 18 fiori femminili, che io dissi *fertili*, nel senso potenziale di essere *suscettibili di fecondazione*: potenzialità attuabile solo col sussidio esterno di buon polline, che – raccolto dalle campagne vicine – io soffiavo più volte al giorno, in gialle nubecole, sui loro stimmi. Senza dubbio tutti i fiori vennero fecondati; ma fra tutti quelli esistenti sulla spiga terminale insorge, dopo ciò, un *conflitto di precedenza*, ed un fiore vittorioso prevale, attraendo verso di sé lo scarso flusso alimentare: gli altri fiori si atrofizzano.

In genere ciascuna pianta produce una sola piccola cariosside; eccezionalmente ne tira avanti due di pari grossezza. Mai ne ottenni più di due, nelle prove del 1959.

In merito al conseguimento della denutrizione, molte sono le vie teoriche concepibili, ma quella più a portata di mano consiste nel limitare l'assunzione degli elementi minerali costituenti le ceneri: limitazione di tutti o di uno, in astratto, fa quasi lo stesso, in forza della *legge del minimo*, la quale – in carenza degli elementi delle ceneri – limita inesorabilmente anche la

(1) Prove del genere, imperfettamente riuscite, io avevo iniziato molti anni addietro. Non credo di averne pubblicato i risultati; ma ne riferì sufficientemente MARCELLO in un suo lavoro sulle anomalie del Mais [« N. Giorn. Bot. It. », XXXVII, p. 382 (1930)].

nutrizione organica. La fotosintesi, in apparenza lasciata libera, deve in realtà livellarsi sulla disponibilità degli elementi minerali.

Se alla piantina in sviluppo si lasciasse solo la disponibilità della riserva della cariosside, che è ricca di materia organica ma estremamente povera di ceneri, la pianta non giungerebbe neppure a fioritura. Occorre senza dubbio un minimo di apporto dall'esterno. Le colture acquose, per molte ragioni, non mi appaiono convenienti e preferisco le colture su substrati granulari o polverulenti. La maggior parte dei miei esemplari di Mais immergevano le loro radici in 25–50 cc. di carbone vegetale triturato. Nella dottrina e nella pratica si insinua tardi l'idea di un antagonismo, di una *lotta* fra il terreno (o in genere il substrato) e le radici: quello tendente a trattenere avvinti a sé certi materiali, queste intese a strappargli eli. Nel caso del carbone, se esso venisse bruciato, lascerebbe delle ceneri, contenenti appunto gli elementi di cui la piantina ha bisogno, e che andrebbero a formare le sue proprie ceneri. Il carbone e le radici che lo compenetravano erano contenuti in piccoli recipienti di plastica del commercio; si annaffiavano con acqua distillata, ma distillata una volta sola in apparecchio di rame stagnato e non ulteriormente purificata; né veniva preso riparo contro l'imponderabile apporto del pulviscolo atmosferico.

La fig. 1, circa 1/3 del vero, dà idea dello sviluppo medio delle piante così trattate. Anche tenendo conto dei due ultimi fattori indicati, occorre concludere che la radice si appropria parte dei componenti minerali racchiusi nel carbone. A seconda del volume del carbone concesso, la statura delle piante varia tra i 10 e i 25 cm.

Per piante i cui semi fossero poverissimi di riserva, per esempio *Nicotiana*, viene subito avvertita la carenza di un elemento che nella economia della nutrizione ha un posto particolare: *l'azoto*. Limitatamente al Tabacco, io vengo in soccorso della piantina allevata in carbone, somministrandole *nicotina*, in quel caso graditissima ed efficacissima promotrice di sviluppo.

Risolvendo caso per caso problemi di alimentazione, ho allevato piantine di Mais, del tutto simili a quelle del carbone, sopra substrati meno prevedibili: *polvere di zolfo*, *cinàbro*, *limatura di piombo*, ecc. Ciò non sarebbe tollerato da *Cucurbita*, e men che meno da *Cannabis*: ho trovato mirabile l'adattabilità del Mais, e la capacità delle sue radici di compenetrare, in rete fittissima, i substrati ostili.

Vorrei dare una idea dello stato di fame delle piante allevate su carbone, registrando qualche cifra relativa ad una di esse. Peraltro io non potevo disturbare la pianta prima che essa maturasse la sua cariosside; e quando ciò avvenne, tutte le foglie erano già morte e secche; l'asse del germoglio, parzialmente vivo, si avviava a secchezza; ancora fresca la radice. Il peso della parte aerea, nello stato descritto, e fatta eccezione della cariosside, era gr 1,116. La radice gr 0,863. La pianta è nata da una cariosside di Mais giallo (fig. 8) del peso di 265 mgr. La nuova cariosside, maturata dopo poco più di un centinaio di giorni dalla semina, pesava, al momento della raccolta 26 mgr, e poi, perdendo acqua nei successivi giorni, si ridusse a 24 mgr.

Cioè *la cariosside prodotta è la undicesima parte della cariosside che era stata seminata.* Credo di aver raggiunto l'estremo limite inferiore compatibile con la germinabilità di una cariosside di Mais, ridotta ormai, anche nell'aspetto, simile ad un grosso chicco di Frumento (fig. 9).

Il peso totale della pianta, cariosside compresa, al momento della maturazione, e riferentesi perciò ad un corpo già quasi secco, è gr 2,005.

Peso secco della radice (a 110°) mgr 239. Ceneri mgr 27 = 11,3 % del peso secco.

Peso secco della parte aerea, cariosside esclusa, mgr 694. Ceneri mgr 60 = 8,65 % del peso secco.

Sulla cariosside, conservata per la germinazione, non si poterono fare determinazioni, ma una idea approssimata può aversene dalle determinazioni fatte sulle cariossidi di semina: acqua 7 %, sostanza secca 93 %, ceneri solamente il 2,2 % del peso secco [2]. Stando a questi dati, le ceneri della cariosside raccolta potranno essere mgr 0,53. Così in totale la pianta non raggiunge gli 88 mgr di ceneri. La cariosside da cui nacque ne poteva contenere 6 mgr: gli altri 82 devono essere stati assorbiti dalle radici.

Altre determinazioni feci su foglie fresche delle piante depauperate, al momento della loro antesi. Lembo e guaina insieme: acqua 78,5 %; sostanza secca 21,5 %; ceneri il 10,9 % della sostanza secca = 2,34 % del peso verde.

I soli lembi: acqua 76 %; sostanza secca 24 %; ceneri circa il 12 % della sostanza secca = 2,88 % del peso verde.

Ho raccolto abbastanza cariossidi per allevare una seconda generazione. La unisessualità, la modificata architettura della pianta, non hanno assolutamente nulla che fare con le mutazioni, come non vi avevano nulla che fare – neppur da lontano – i traumatismi di Blaringhem. Ma si può credere che la *sofferenza organica* – denominatore comune della denutrizione sperimentale, degli attacchi parassitarî, dei traumi – senza modificare in nulla il patrimonio genetico, possa conseguire la induzione di effetti trasmissibili per via fisiologica durante il periodo, non breve, in cui l'embrione resta alle dipendenze della pianta madre; possa insomma conseguire qualcuna di quelle che Hämmerling chiamava *Dauermodifikationen.*

(2) Al calor rosso la materia delle cariossidi tende a raggrumarsi in una massa nera, d'aspetto antracitico, a scheggie lucenti, che a temperatura più alta brucia con difficoltà, lasciando un residuo stabile molto esiguo.

Fig. 1 - Pianta depauperata, su carbone, con infiorescenza ♀ terminale ($\frac{1}{3}$ del vero). Figg. 2-4 - Esemplari, allevati rispettivamente su carbone, segatura di legno, zolfo, e privati delle foglie per mostrare la infiorescenza terminale, munita degli stili. Fig. 5 - Infiorescenza terminale di esemplare allevato su cinàbro. Fig. 6 - La tipica coppia di spighette, una peduncolata ed una sessile (gr. nat.). Fig. 7 - Una delle cariossidi prodotte dalle piante depauperate (gr. nat.). Fig. 8 - Una delle cariossidi seminate; e, alla fig. 9, la cariosside prodotta dalla pianta che ne provenne (gr. nat.). Fig. 10 - La spighetta peduncolata (× 6 circa). Fig. 11 - La spighetta fertile, poco dopo la fecondazione: si vede l'apice dell'ovario, sporgente dall'involglio protettivo (× 5 circa). Fig. 12 - La coppia di spighette al momento dell'antesi; quella fertile è sormontata dallo stilo, che si restringe nel punto dell'inserzione (× 3 circa).

Biologia. — *Le modalità di connessione nervosa nelle colture di cellule disgregate in mezzo liquido* (Gallus *e* Coturnix) [(*)]. Nota [(**)] del Corrisp. ALBERTO STEFANELLI.

In mie precedenti comunicazioni, in collaborazione con la dott.ssa Zacchei [(1)], ho illustrato come le fibre nervose che vengono prodotte da riaggregati ottenuti dopo disgregazione di midollo spinale embrionale (3–5 giorni di incubazione) di pollo o di quaglia, mediante blanda tripsinizzazione (3 su 10.000) e agitazione meccanica, si colleghino con altri aggregati o cellule libere. Nelle miscele fatte di elementi nervosi ed elementi cardiaci abbiamo osservato la unione delle fibre nervose con elementi muscolari.

Le immagini illustrate dimostrano con estrema chiarezza come le fibre non abbiano decorsi a caso ma raggiungano queste cellule con un percorso rettilineo; in molti casi l'andamento curvo delle fibre ha fatto supporre la presenza di un fattore di guida delle fibre.

La peculiare modalità di allestimento delle colture dove le cellule o gli aggregati sospesi in mezzo liquido vengono a depositarsi direttamente sul vetrino portaoggetti ci ha fatto escludere, in queste condizioni, ogni possibilità di orientamento substrutturale quale quello proposto dal Weiss [(2)] per spiegare le connessioni tra espianti affrontati e coltivati su plasma secondo la tecnica classica. Nelle nostre condizioni di coltura non si creano raggrinzimenti, tensioni o orientamenti del supporto, ne si creano, se le colture sono opportunamente diluite, aloni di essudato che, ricomprendo il vetro su cui le cellule si sono posate, potrebbero assumere un orientamento substrutturale. A questo essudato, o *ground mat*, il Weiss ha attribuito grande importanza nell'accrescimento delle fibre nervose.

Scartata pertanto questa azione di tigmotropismo (o più semplicemente meccanica) del supporto, era da pensare a fattori di tropismo più o meno complessi.

Lo studio di queste colture con la cinematografia a tempo ha invece messo in luce un processo molto diverso, basato su una emissione a caso

(*) Lavoro eseguito nell'Istitnto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» di Roma, con un contributo del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) A. STEFANELLI e A. ZACCHEI, *Sull'orientamento delle fibre nervose in coltura* in vitro *di cellule nervose spinali disgregate di embrione di pollo*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XXVI, pp. 448–450 (1959); A. STEFANELLI e A. ZACCHEI, *Orientamento delle fibre nervose di cellule spinali isolate in coltura e rapporti neuro-muscolari* (*in* Gallus *e* Coturnix), «Rend. Acc. Lincei», vol. XXVI, pp. 753–756 (1959).

(2) P. WEISS, *Experiments on cell and axon orientation* in vitro: *the role of colloidal exudate in tissue organization*, «J. Exper. Zool.», *100*, p. 353; P. WEISS, articolo in: *Chemistry and Physiology of Growth*. Princeton Univ. Press, p. 135 (1949).

delle fibre, sulla retrattilità di fibre emesse in un primo tempo e sulla persistenza di quelle che, per caso, vengano a contatto con altre cellule.

Come ho già avuto modo in altra Nota di illustrare (3) a proposito di neuroni retinici isolati con la stessa tecnica in mezzo liquido, la emissione dei prolungamenti nervosi non è irreversibile ma le fibre che non vengono a contatto con altri elementi possono essere retratte in breve tempo. Tale fenomeno è ben manifesto nelle colture giovani, nelle prime 24 ore. Ciò è dovuto alla mancanza di adesività delle fibre con il supporto di vetro che solo debolmente si può manifestare al loro apice ameboide. Questo fenomeno non avviene se sul vetro è stata stesa una pellicola di plasma poiché in questo caso la fibra aderisce al supporto lungo tutta la sua lunghezza.

La retrazione delle fibre che non vengono a contatto con altre cellule è il fattore fondamentale che porta, col passare del tempo, alla formazione di connessioni solo tra le cellule o i centri di aggregazione, dando luogo a delle immagini che a prima vista fanno pensare a connessioni determinate da fattori orientanti. Infatti, se seguiamo con fotogrammi a tempo lo svolgersi dei fenomeni, si può constatare che dai vari aggregati vengono emesse fibre, successivamente, nelle direzioni più diverse. I prolungamenti presentano all'apice delle caratteristiche espansioni a zampetta con digitazioni e veli dotati di movimento ameboide, quali quelli descritti da Levi e Godina. Sovente si ha una divisione dicotomica della fibra in due rami, divergenti con angolo di circa 120°. Se le fibre non incontrano casualmente altre cellule, vengono in un tempo più o meno breve ritirate; se incontrano un altro aggregato o altre cellule, anche isolate, si uniscono a questi elementi in modo permanente e divengono fibre pilota di altre che finiscono per far ingrossare la connessione per fascicolazione. Poiché col tempo rallenta la emissione di nuove fibre e quelle che non si collegano vengono ritirate si ottiene alla fine un quadro che mostra collegamenti nervosi quasi esclusivamente tra i vari centri. La fig. 1 mostra la modalità di allestimento di questo tipo di colture e la fig. 2 rappresenta schematicamente il fenomeno che porta, mediante un meccanismo di accrescimento secondo direttrici a caso, alla realizzazione di connessioni orientate. La tavola mostra quattro immagini, in tempi successivi (non dello stesso campo microscopico), in cui si vede la realizzazione di queste connessioni.

È da notare che con l'invecchiamento della coltura si attuano altri fenomeni, che rendono il quadro sempre più complesso, quali la minore attività di retrazione delle fibre emesse, in parte dovuto al fatto che viene prodotto un essudato che viene a rivestire il vetro facendo aderire le fibre, e la moltiplicazione di elementi gliari e di fibroblasti. È solo, nelle prime 24 ore che i fenomeni appaiono in tutta la loro evidente chiarezza.

Nelle preparazioni allestite mescolando le cellule disgregate spinali con elementi cardiaci abbiamo notato come le fibre nervose che raggiungono

(3) A. STEFANELLI e A. ZACCHEI, *Comportamento delle cellule di abbozzo oculare di pollo dissociate con tripsina* in vitro, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXV, pp. 617–621.

le fibre muscolari vengono a formare delle espansioni caratteristiche nella zona di contatto. Tali espansioni non si notano nei contatti con altre cellule. È da notare che in questi primi esperimenti sono state mescolate cellule muscolari cardiache per poter osservare se la contrattilità rappresentasse o no un fattore di attrazione delle fibre. Le espansioni terminali non possono essere certo interpretate come piastre motrici, ma è interessante il fatto che le fibre spinali formino delle espansioni, pur primordiali, anche in rapporto con una muscolatura non scheletrica.

Ho potuto inoltre constatare che la condizione di contrazione autonoma alle volte raggiunta dalle fibre cardiache in coltura *non* rappresenta un richiamo per le fibre nervose in accrescimento.

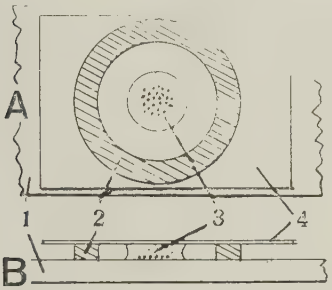


Fig. 1. – Schema della camera di coltura in mezzo liquido:

1) vetrino portaoggetti; 2) anelletto metallico di 3/10 di mm di spessore; 3) goccia di liquido di coltura con in sospensione gli aggregati che si depositano sul vetrino portaoggetti; 4) coprioggetti.

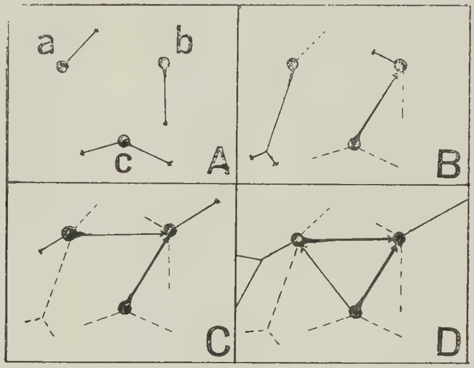


Fig. 2. – Quattro schemi successivi, a distanza di tempo di circa 4 ore, mostranti la modalità di emissione, retrazione (a tratteggio) e collegamento tra tre aggregati.

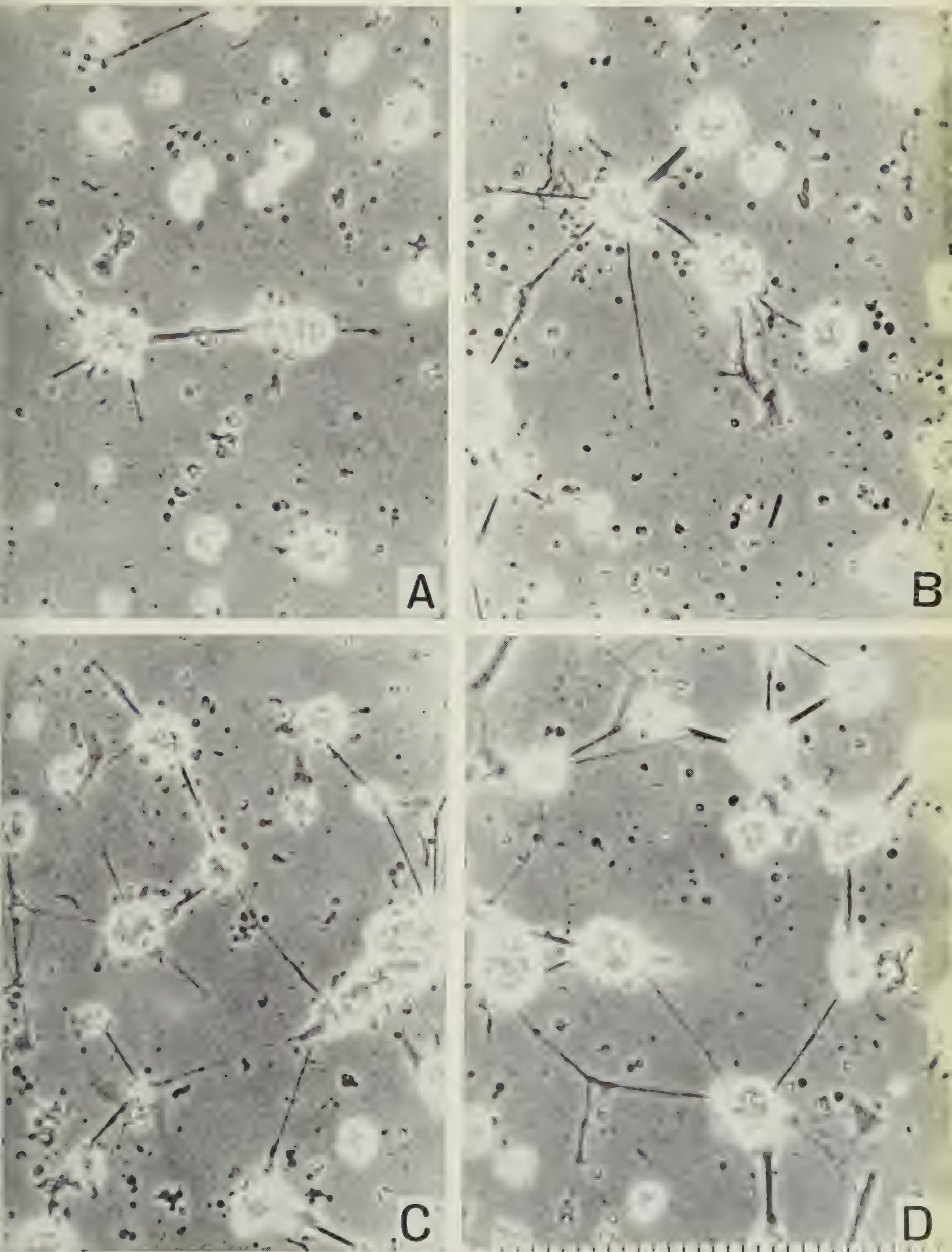
Queste osservazioni mi hanno pertanto permesso di chiarire il vero meccanismo con cui le fibre nervose filate da cellule di midollo spinale embrionale si connettono con altri elementi quando siano coltivate in mezzo liquido, sedimentate su lastra di vetro, così da eliminare i fattori meccanici di un substrato solido a struttura orientata. È un meccanismo che ricorda molto quello « dei saggi e degli errori », qui basato sulla retrazione delle fibre emesse in direzione « sbagliata » e la persistenza di quelle che, *casualmente*, raggiungono l'obbiettivo. Questo processo è pertanto possibile per la esistenza di due importanti fenomeni: 1° la *retrattilità* di fibre nervose che non trovano un supporto; 2° la *adesività* della estremità ameboide delle fibre con le pareti di altre cellule. Questa adesività non risulta, almeno da queste prime ricerche, specifica.

In conclusione, ponendo le cellule nervose in particolare condizione, quale è quella di coltura dissociata in mezzo liquido e su supporto di vetro, l'orientamento delle fibre nervose rientra nello schema esposto da Holtfreter [4] nei suoi numerosi lavori dal '43 al 52 del *moto a caso* e della *adesi-*

(4) J. HOLTFRETER, *Observations on the migration, aggregation and phagocitosys of embryonic cells*, « J. Morph. », *80*, p. 25 (1947). (In questo lavoro vi è la letteratura precedente).

vità per spiegare i movimenti morfogenetici degli embrioni di Anfibi. In quel caso è la *adesività selettiva* che permette la organizzazione. Nelle mie condizioni sperimentali le connessioni che si vengono a determinare tra i « centri » non sono imputabili al « *two centers effect* » di Weiss basato sullo stiramento del subtrato tra due centri. Pertanto le mie immagini di connessione tra centri non hanno lo stesso significato, né di quelle di Weiss [2] ottenute su plasma, né di quelle della Cavanaugh [5] che sono il risultato di una colliquazione del supporto di plasma, così che solo le fibre colleganti i vari centri sono rimaste come briglie tese tra questi. La rettilinearità delle fibre nei miei preparati non è dovuta a fatti di trazione, ma è un intrinseco modo di accrescersi delle fibre in mezzo liquido quando vengano a mancare dei supporti guida; ciò è evidente esaminando le fibre che hanno la estremità libera, non collegata con altri elementi, come è ben visibile nelle fotografie della tavola, fatte *in vivo* in contrasto di fase.

(5) M. W. CAVANAUGH, *Neural development from trypsin dissociated cells of differentiated spinal cord of chick embryo*, « Exper. Cell Res. », 9, pp. 42–48 (1955).



ro condizioni successive di connessione nervosa tra aggregati, su vetro in mezzo liquido (supernatante di plasma fugato + liquido di Tyrode), fotografate in contrasto di fase. Le quattro figure non rappresentano lo stesso campo microscopico; si riferiscono a colture dopo 3, 7, 11, 15 ore rispettivamente.

l'aspetto rettilineo delle fibre emesse, anche se ad estremità libera (caratteristica per la espansione a zampetta), e le fascicolazioni in alcuni colle gamenti della figura D. Notare che la direzione delle fibre ad estremità libera non è sempre diretta verso altri aggregati.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati.* Nota I di GAETANO FICHERA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In alcune applicazioni si presenta il seguente problema: nel piano della variabile complessa z è dato un campo limitato e connesso A avente per frontiera $n+1$ curve chiuse di Jordan a due a due disgiunte; è assegnata la successione di punti $\{z_k\}$ del piano tutti esterni ad A. Determinare le condizioni necessarie e sufficienti alle quali deve soddisfare detta successione perché, data comunque una funzione $f(z)$ olomorfa in A e continua nell'involucro $\bar{A}$ di A [1], per ogni $\varepsilon > 0$ esistano m_ε costanti complesse $a_1^{(\varepsilon)}, a_2^{(\varepsilon)}, \cdots, a_{m_\varepsilon}^{(\varepsilon)}$ tali che:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} a_k^{(\varepsilon)} (z - z_k)^{-1} \right| < \varepsilon$$

qualunque sia z in $\bar{A}$.

Nella Nota II – avente lo stesso titolo della presente – tale problema verrà risoluto supponendo che le curve di Jordan chiuse che costituiscono la frontiera di A siano dotate di curvatura continua.

A quanto mi consta, la possibilità di approssimare funzioni olomorfe con funzioni razionali è stata considerata solo nell'ipotesi che l'insieme dei punti prefissati, dove le funzioni razionali approssimanti possono avere le loro singolarità, abbia distanza positiva da $\bar{A}$ [2].

Il risultato che verrà ottenuto nella Nota II si fonda su alcune generalizzazioni della teoria del potenziale logaritmico di linea – alle quali è dedicata la presente Nota I – e sulla conseguente estensione al campo A di un noto teorema di F. ed M. Riesz [3] relativo ad un campo circolare. Tale estensione, che ritengo di per sé non priva di interesse, fornisce anche nel caso del cerchio un ulteriore completamento del risultato di F. ed M. Riesz, dato che viene precisato anche da un punto di vista « funzionale » il modo in cui la funzione olomorfa che interviene nel teorema stesso assume i suoi valori al contorno.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) Per *involucro* di A (secondo altri *chiusura* o *aderenza*) intendiamo l'insieme dei punti del piano che hanno distanza nulla da A.

(2) Cfr. J. L. WALSH, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. XX (1935); S. N. MERGELYAN, *Uniform approximation to functions of a complex variable*, « Amer. Math. Soc. translations », n. 101 (1952).

(3) Cfr. F. und M. RIESZ, *Ueber Randwerte einer analytischen Funktion.* Quatrième Congrès des Math. Scandinaves, 1916.

1. – Punti di Lebesgue per una misura.

Si consideri il semi-anello $\{I\}$ degli intervalli superiormente aperti contenuti nell'intervallo $0 \leq s < L$, $L > 0$. Denoti $\alpha(I)$ una misura complessa definita su $\{I\}$ (funzione numerabilmente additiva a variazione limitata). Sia I_s l'intervallo $0 \leq \sigma < s$ e sia: $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(I_s)$; si ha $\tilde{\alpha}(s_2) - \tilde{\alpha}(s_1) = \alpha(I)$ $[I \equiv (s_1, s_2)]$. Sia $v_\alpha(I)$ la variazione totale di $\alpha(I)$ e $\sigma(I)$ la misura di Lebesgue di I ($\alpha(I) = s_2 - s_1$). Se con $\varphi(s)$ si indica la derivata di $\alpha(I)$ rispetto a $\sigma(I)$, allora $|\varphi(s)|$ è l'analoga derivata per $v_\alpha(I)$.

I. *Sia c un'arbitraria costante complessa. Esiste un insieme* N *in* $(0, L)$ *avente misura di Lebesgue nulla tale che:*

$$\lim_{I \to s} \frac{v_{\alpha - c\sigma}(I)}{\sigma(I)} = |\varphi(s) - c|$$

per ogni s non appartenente ad N. *L'insieme* N *può essere scelto indipendente da c.*

Sia r un numero razionale complesso ed N_r un insieme di misura di Lebesgue nulla tale che $D_\sigma v_{\alpha - r\sigma} = \varphi(s) - r$ per $s \notin N_r$ [4]. Sia $N = \cup N_r$ ed $s_0 \notin N$.

Per (ogni $I \in s_0$ e per) $|c - r| < \varepsilon$, si ha:

$$(\sigma(I))^{-1} |v_{\alpha - c\sigma}(I) - v_{\alpha - r\sigma}(I)| =$$

$$= (\sigma(I))^{-1} \left| \int_I |\varphi(s) - c|\, ds - \int_I |\varphi(s) - r|\, ds \right| \leq (\sigma(I))^{-1} \int_I |c - r|\, ds < \varepsilon .$$

Sia δ_ε tale che per

$$\sigma(I) < \delta_\varepsilon \quad , \quad \left| (\sigma(I))^{-1} v_{\alpha - c\sigma}(I) - |\varphi(s_0) - r| \right| < 2\varepsilon .$$

Si ottiene:

$$\left| (\sigma(I))^{-1} v_{\alpha - c\sigma}(I) - |\varphi(s_0) - c| \right| < \left| (\sigma(I))^{-1} v_{\alpha - c\sigma}(I) - |\varphi(s_0) - r + (r - c)| \right| \leq$$
$$\leq \left| (\sigma(I))^{-1} v_{\alpha - c\sigma}(I) - |\varphi(s_0) - r| \right| + |r - c| < 3\varepsilon .$$

I punti di $(0, L) - N$ saranno chiamati i *punti di Lebesgue per* α [5].

2. – Un criterio di sommabilità.

In questo e nei due successivi paragrafi Σ indica una curva di Jordan chiusa e dotata di tangente variabile con continuità uniformemente hölderiana di esponente q.

(4) D_σ indica la derivata rispetto a σ.

(5) Nel caso particolare in cui α sia assolutamente continua cfr. L. Tonelli, *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna 1928, p. 174.

Sia $K(z, \zeta)$ una funzione complessa definita su $\Sigma \times \Sigma$ continua per $z \neq \zeta$ e tale che $K(z, \zeta) = O(|z-\zeta|^{-k})$ $(0 \leq k < 1)$. Sia α una misura definita sugli archi I di Σ.

II. *Se z è un punto di Lebesgue per α, allora $K(z, \zeta)$ è una funzione di ζ α–sommabile su Σ.*

Basta solo dimostrare che per orgni arco esterno a z,

$$\int_{I} |\zeta - z|^{-k} dv_\alpha(\zeta) < C,$$

ove C è una costante indipendente da I. Si prenda l'origine degli archi in z. Si deve dimostrare che

$$\int_a^b |s|^{-k} dv_\alpha < C$$

per ogni (a, b) di $(-L/2, L/2)$ non contenente l'origine. Si ha:

$$\int_a^b |s|^{-k} dv_\alpha = [\breve{v}_\alpha(s)|s|^{-k}]_a^b - \int_a^b \breve{v}_\alpha(s)\frac{d}{ds}(|s|^{-k})\, ds.$$

Siccome

$$\lim_{s \to 0} |s|^{-1} |\breve{v}_\alpha(s)| = |\varphi(0)|,$$

si ha

$$|\breve{v}_\alpha(s)| \leq p|s| \qquad (p > 0).$$

Da $|(|s|^{-k})'| \leq k|s|^{-k-1}$ segue che:

$$\int_a^b |s|^{-k} dv_\alpha \leq p(|b|^{1-k} + |a|^{1-k}) + kp\int_{-L/2}^{L/2} |s|^{-k} ds \leq C.$$

3. – TEORIA PUNTUALE DEL POTENZIALE LOGARITMICO.

Si indichi con n_z^+ la normale interna a Σ in z e con n_z^- la normale esterna; $\partial/\partial n_z$ indichi la derivazione lungo la normale in z rivolta verso l'interno.

III. *Sia α una misura su Σ, $\varphi(z)$ la sua derivata (rispetto a σ). Sia λ_{z_0} un asse che incontra Σ in z_0 e non tangente a Σ e si assuma su λ_{z_0} come positivo il verso rivolto all'interno.*

Se z_0 è un punto di Lebesgue per α, sussistono le seguenti relazioni di limite:

$$\lim_{z \to z_0 \left(\text{su } \lambda_{z_0}^+\right)} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z-\zeta|\, d\alpha_\zeta = -\pi\varphi(z_0) + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_0-\zeta|\, d\alpha_\zeta \tag{3.1}$$

$$\lim_{z \to z_0 \left(\text{su } \lambda_{z_0}^-\right)} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z-\zeta|\, d\alpha_\zeta = \pi\varphi(z_0) + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_0-\zeta|\, d\alpha_\zeta. \tag{3.2}$$

Queste relazioni di limite sono uniformi rispetto a λ_{z_0} se λ_{z_0} descrive un angolo i cui lati non sono tangenti a Σ.

Si osservi in primo luogo che gli integrali al primo membro delle (3.1) e (3.2) sono integrali di funzioni α–sommabili, come segue dalla ben nota disuguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| = O(|z - \zeta|^{q-1}) \qquad (q > 0)\ ^{(6)}$$

e dal lemma II.

Si assuma z_0 come origine, come asse ξ la tangente positiva a Σ e come asse η la normale interna. Sia Σ_0 un arco di Σ passante per z_0, di equazione $\eta = \eta(\xi)$, $-h \leq \xi \leq h$. Si consideri dapprima il caso particolare $\alpha \equiv \sigma$. Poniamo $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Si ha:

$$(3.3) \qquad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = \int_{\Sigma_0} \frac{(\xi - x)\dfrac{d\xi}{dn} + (\eta - y)\dfrac{d\eta}{dn}}{(\xi - x)^2} ds_\zeta =$$

$$= \int_{-h}^{h} \left[\frac{-(\xi - x)\eta'(\xi) + (\eta(\xi) - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} + \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} \right] d\xi - \int_{-h}^{h} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi .$$

Siano λ_1 e λ_2 i coseni direttori di λ_{z_0} relativi all'asse ξ ed all'asse η, rispettivamente. Poniamo $x = t\lambda_1$, $y = t\lambda_2$; si ha:

$$(\xi - x)^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \lambda_2^2 (\xi^2 + t^2).$$

Si assuma Σ_0 (cioè h) abbastanza piccolo in modo tale che $M = \max |\eta'(\xi)| < \lambda_0$, ove λ_0 è un fissato numero positivo non maggiore di $|\lambda_2|$. Si ha allora per $\zeta \in \Sigma_0$,

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \geq \frac{1}{2} \lambda_2^2 (\xi^2 + t^2) - 2|t||\lambda_2||\eta| \geq \frac{1}{2} \lambda_2^2 (\xi^2 + t^2) - |\lambda_2| M (\xi^2 + t^2) =$$

$$= \frac{1}{2} |\lambda_2| (|\lambda_2| - M)(\xi^2 + t^2) = p(\xi^2 + t^2), \qquad (p > 0).$$

Mediante un calcolo elementare si ottiene:

$$\lim_{t \to 0^\pm} \int_{-h}^{h} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \pm \pi .$$

Poiché per $\zeta \in \Sigma_0$ si ha:

$$\frac{-(\xi - x)\eta'(\xi) + (\eta(\xi) - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} + \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1-h}}\right),$$

dalla (3.3) segue la (3.1) (oppure la (3.2)) nel caso particolare $\alpha \equiv \sigma$.

(6) Cfr. G. FICHERA, *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, « Rendiconti di Matem. e delle sue applicazioni », Roma 1958, p. 91.

Per il caso generale si supponga Σ_0 tale che:

$$(3.4) \qquad v_{\alpha-\varphi(z_0)\sigma}(\Sigma)_0 < \frac{3}{4}(\text{lunghezza } \Sigma_0) = \frac{3}{4}\int_{-h}^{h}\sqrt{1+\eta'^2}\,d\xi < \varepsilon h$$

ove ε è un numero positivo fissato arbitrariamente. Si ha:

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,d(\alpha_\zeta-\varphi(z_0)\sigma_\zeta) = \int_{\Sigma_0} O(|\xi|^{q-1})\,d(\alpha_\zeta-\varphi(z_0)\sigma_\zeta) -$$

$$-\int_{\Sigma_0}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d(\alpha_\zeta-\varphi(z_0)\sigma_\zeta).$$

D'altra parte:

$$\left|\int_{\Sigma_0}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d(\alpha_\zeta-\varphi(z_0)\sigma_\zeta)\right| \leq \int_{-h}^{h}\frac{|y|}{(x-\xi)^2+y^2}\,dv_{\alpha-\varphi(z_0)\sigma} \leq$$

$$\leq \frac{2}{|\lambda_\eta|}\int_{-h}^{h}\frac{|t|}{\xi^2+t^2}\,dv_{\alpha-\varphi(z_0)\sigma} = \frac{2}{|\lambda_\eta|}\left[\tilde{v}_{\alpha-\varphi(z_0)\sigma}\frac{|t|}{\xi^2+t^2}\right]_{-h}^{h} +$$

$$+\frac{2}{|\lambda_\eta|}\int_{-h}^{h}\tilde{v}_{\alpha-\varphi(z_0)\sigma}\frac{2\xi|t|}{(\xi^2+t^2)^2}\,d\xi \leq \frac{4\varepsilon}{|\lambda_2|}+\frac{4\varepsilon}{|\lambda_2|}\int_{-h}^{h}\frac{|t|}{\xi^2+t^2}\,d\xi \leq \frac{2\varepsilon(2+2\pi)}{|\lambda_2|}.$$

Da ciò si ottiene facilmente la dimostrazione del teorema.

Si deve osservare che se α è assolutamente continua e la sua derivata è continua, la (3.4) può esser soddisfatta uniformemente rispetto a z_0. Allora le (3.1) e (3.2) sono uniformi rispetto a z_0, purché i coseni direttori di λ_{z_0} siano funzioni continue di z_0.

IV. *Abbiano α, φ, Σ, z_0, λ_{z_0} il medesimo significato che nel teorema precedente. Siano z e z' due punti su λ_{z_0} simmetrici rispetto a z_0. Sussiste la relazione di limite:*

$$(3.5) \qquad \lim_{z,z'\to z_0}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\log\frac{|z-\zeta|}{|z'-\zeta|}\,d\alpha_\zeta = 0\,.$$

Questa relazione di limite è uniforme rispetto a λ_{z_0} se si assume per λ_{z_0} la medesima ipotesi ammessa nel teorema precedente.

La relazione (3.5) è del tutto banale nel caso $\alpha \equiv \sigma$, in quanto:

$$\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\log\frac{|z-\zeta|}{|z'-\zeta|}\,d\sigma_\zeta = 0\,.$$

Ciò permette di sostituire α con $\alpha-\varphi(z_0)\sigma$. Sia Σ_0 il medesimo arco considerato nella dimostrazione del teorema precedente. Per $\zeta\in\Sigma_0$ e ponendo $z=t(\lambda_1+i\lambda_2)$, $z'=-t(\lambda_1+i\lambda_2)$, con un calcolo elementare si ha:

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\log\left|\frac{z-\zeta}{z'-\zeta}\right| = O\left(\frac{|t|}{\xi^2+t^2}\right).$$

Questa valutazione non dipende da λ_{z_0} se λ_{z_0} varia in un angolo i cui lati non sono tangenti a Σ. Il medesimo ragionamento della dimostrazione precedente fa conseguire la tesi.

4. – Teoria integrale del potenziale logaritmico.

V. *Abbiano* α *e* Σ *il significato già loro attribuito. Sia* $p(z)$ *una funzione complessa continua nel piano. Sia* $\vec{\lambda}(z)$ *un vettore unitario definito su* Σ, *continuo con la sua derivata prima (rispetto all'arco* s*) in ogni punto di* Σ; $\vec{\lambda}(z)$ *si suppone diretto verso l'interno del campo limitato da* Σ *e perciò mai tangente a* Σ. *Indichiamo con* Σ_ϱ $(\Sigma_{-\varrho})$ *la curva di equazione* $z_\varrho = z + \rho\vec{\lambda}(z)$ $(z_{-\varrho} = z - \rho\vec{\lambda}(z))$ $(z \in \Sigma\,,\ 0 < \rho \leq \rho_0\,,\ \rho_0$ *sufficientemente piccolo). Sussistono le relazioni di limite:*

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_\varrho-\zeta|\,d\alpha_\zeta = \tag{4.1}$$

$$= -\pi\int_{\Sigma} p(z)\,d\alpha_z + \int_{\Sigma} p(z)\,ds_z\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,d\alpha_\zeta,$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho})\,ds_{z_{-\varrho}}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_{-\varrho}-\zeta|\,d\alpha_\zeta = \tag{4.2}$$

$$= \pi\int_{\Sigma} p(z)\,d\alpha_z + \int_{\Sigma} p(z)\,ds_z\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,d\alpha_\zeta.$$

Dimostriamo la (4.1); con lo stesso ragionamento si può provare la (4.2). Si ha:

$$\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\,ds_{z_\varrho}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_\varrho-\zeta|\,d\alpha_\zeta = \int_{\Sigma} d\alpha_\zeta\int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\log|z_\varrho-\zeta|\,ds_{z_\varrho} =$$

$$= \int_{\Sigma} d\alpha_\zeta\left\{\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta_{-\varrho}|\,ds_z -\right.$$

$$\left.-\left[\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta_{-\varrho}|\,ds_z - \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|\zeta-z_\varrho|\,ds_{z_\varrho}\right]\right\}.$$

Riesce:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta_{-\varrho}|\,ds_z = -\pi p(\zeta) + \int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,ds_z$$

uniformemente rispetto a ζ [7]. Basta solo provare che:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Sigma} d\alpha_\zeta\left[\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta_{-\varrho}|\,ds_z - \int_{\Sigma_\varrho} p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|\zeta-z_\varrho|\,ds_{z_\varrho}\right] = 0.$$

(7) Cfr. loc. cit. (6), p. 14, (11) e p. 17, osservazione alla fine del teorema VIII.

Si ha:

$$\int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta_{-\varrho}| \, ds_z - \int_{\Sigma} p(z + \rho\lambda(z)) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta - z_\varrho| \, ds_z =$$

$$= \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{|z - \zeta_{-\varrho}|}{|\zeta - z_\varrho|} \, ds_z + \int_{\Sigma} \left(p(z) - p(z_\varrho) \left| \frac{dz_\varrho}{ds_z} \right| \right) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta - z_\varrho| \, ds_z .$$

Indichiamo con $\alpha(\zeta)$ e $\beta(\zeta)$ i coseni direttori del vettore unitario $\vec{\nu}(\zeta)$ concorde alla normale interna a Σ. Si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{|z - \zeta_{-\varrho}|}{|\zeta - z_\varrho|} = \frac{(\xi - x)\alpha(\zeta) + (\eta - y)\beta(\zeta)}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2} - \frac{(\xi - x)\alpha(\zeta) + (\eta - y)\beta(\zeta)}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(z)|^2} -$$

$$- \rho \frac{\left(\vec{\lambda}(\zeta) \cdot \vec{\nu}(\zeta)\right) |z - \zeta + \rho\lambda(z)|^2 - \left(\vec{\lambda}(z) \cdot \vec{\nu}(\zeta)\right) |z - \zeta + \rho\lambda(\zeta)|^2}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2 |z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(z)|^2} .$$

Riesce [8]:

$$\begin{aligned} |z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2 &\geq H(|z - \zeta|^2 + \rho^2) \\ |z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(z)|^2 &\geq H(|z - \zeta|^2 + \rho^2) \end{aligned} \qquad H > 0.$$

D'altra parte:

$$\frac{\left(\vec{\lambda}(\zeta) \cdot \vec{\nu}(\zeta)\right) |z - \zeta + \rho\lambda(z)|^2 - \left(\vec{\lambda}(z) \cdot \vec{\nu}(\zeta)\right) |z - \zeta + \rho\lambda(\zeta)|^2}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2 |z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(z)|^2} =$$

$$= \frac{(|z - \zeta|^2 + \rho^2) \left[\left(\vec{\lambda}(\zeta) - \vec{\lambda}(z)\right) \cdot \vec{\nu}(\zeta) \right]}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2 |z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(z)|^2} +$$

$$+ 2\rho \frac{\left[\overrightarrow{(z - \zeta)} \cdot \vec{\lambda}(z)\right] \vec{\lambda}(\zeta) \cdot \nu(\zeta) \cdot \left[\overrightarrow{(z - \zeta)} \cdot \vec{\lambda}(\zeta)\right] \vec{\lambda}(z) \cdot \vec{\nu}(\zeta)}{|z - \zeta + \rho\vec{\lambda}(\zeta)|^2 |z - \zeta + \rho\lambda(z)|^2} = O(\rho^{-1}) .$$

Si ottiene così:

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \left| \frac{z - \zeta_\varrho}{\zeta - z_\varrho} \right| = O(|z - \zeta|^{q-1}) .$$

Ciò permette di affermare che

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \left| \frac{z - \zeta_{-\varrho}}{\zeta - z_\varrho} \right| ds_z = 0$$

uniformemente rispetto a ζ.

D'altra parte si ha:

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta - z_\varrho| = O\left(\frac{\rho}{|z - \zeta|^2 + \rho^2} \right) + O\left(\frac{1}{|z - \zeta|^{1-q}} \right) .$$

(8) Cfr. loc. cit. (6), p. 15, (12).

In tal modo si ottiene, uniformemente rispetto a ζ:

$$\int_{\Sigma} \left(p(z) - p(z_\varrho) \left| \frac{dz_\varrho}{ds_z} \right| \right) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log | \zeta - z_\varrho | \, ds_z =$$

$$= O\left(\max_{z \in \Sigma} \left| p(z) - p(z_\varrho) \left| \frac{dz_\varrho}{ds_z} \right| \right| \int_0^L \frac{\rho}{s^2 + \rho^2} \, ds \right) + o(1).$$

Il teorema rimane così provato.

VI. *Abbia* Σ *curvatura continua. Si assuma* $\vec{\lambda}(z) \equiv \vec{\nu}(z)$. *Sia* $p(z)$ *una funzione continua nel piano, verificante la seguente condizione:*

$$(4.3) \qquad p(z_\varrho) \left| \frac{dz}{ds_z} + \rho \frac{d\vec{\lambda}(z)}{ds_z} \right| = p(z_{-\varrho}) \left| \frac{dz}{ds_z} - \rho \frac{d\vec{\lambda}(z)}{ds_z} \right| \qquad 0 \leq \rho \leq \rho_0 .$$

Sussiste la seguente relazione di limite:

$$(4.4) \qquad \lim_{\rho \to 0} \left\{ \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \, ds_{z_\varrho} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | \, d\alpha \, - \right.$$

$$\left. - \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \, ds_{z_{-\varrho}} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_{-\varrho} - \zeta | \, d\alpha_\zeta \right\} = 0.$$

Si ha:

$$(4.5) \quad \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \, ds_{z_\varrho} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | \, d\alpha_\zeta - \int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \, ds_{z_{-\varrho}} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_{-\varrho} - \zeta | \, d\alpha_\zeta =$$

$$= \int_{\Sigma} d\alpha_\zeta \int_{\Sigma} \tilde{p}(z, \rho) \left[\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | - \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_{-\varrho} - \zeta | \right] ds_z =$$

$$= - \int_{\Sigma} d\alpha_\zeta \int_{\Sigma} \tilde{p}(z, \rho) \frac{(\overrightarrow{\zeta - z}) \cdot \left[4 \rho \vec{\nu}(z) \cdot (\overrightarrow{z - \zeta}) \right] - \rho \vec{\nu}(z) \left[(z - \zeta)^2 + \rho^2 \right]}{| z_\varrho - \zeta |^2 \, | z_{-\varrho} - \zeta |^2} \cdot \vec{\tau}(\zeta) \, ds_z$$

dove $\vec{\tau}(\zeta)$ è il vettore unitario concorde alla tangente positiva a Σ e

$$\tilde{p}(z, \rho) = p(z_\varrho) \left| \frac{dz_\varrho}{ds_z} \right| = p(z_{-\varrho}) \frac{| dz_{-\varrho}}{ds_z} .$$

Segue allora che:

$$(4.6) \qquad \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | - \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_{-\varrho} - \zeta | = O\left(\frac{\rho}{| z - \zeta |^2 + \rho^2} \right).$$

D'altra parte, se poniamo:

$$\frac{\partial}{\partial s_z} \{ \log | z_\varrho - \zeta | \} = \frac{1}{| z_\varrho - \zeta |^2} \left\{ (\overrightarrow{z - \zeta}) \cdot \vec{\tau}(z) + \rho \frac{\partial}{\partial s_z} \left(\vec{\nu}(z) \cdot (\overrightarrow{z - \zeta}) \right) \right\},$$

si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | = \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | + \frac{\partial}{\partial s_z} \{ \log | z_\varrho - \zeta | \} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log | z_\varrho - \zeta | + \frac{\partial}{\partial s_z} \log | z_\varrho - \zeta | + \rho \frac{d}{ds_z} \left\{ \left[\vec{\nu}(z) \cdot (\overrightarrow{z - \zeta}) \right] | z_\varrho - \zeta |^{-2} \right\}.$$

Perciò

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_\varrho - \zeta| = O(1)\text{ (9)}.$$

Analogamente si ha:

$$\frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z_{-\varrho} - \zeta| = O(1).$$

Di conseguenza:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log \frac{|z_\varrho - \zeta|}{|z_{-\varrho} - \zeta|} ds_z = 0$$

uniformemente rispetto a ζ. Questo ci permette di sostituire $\tilde{p}(z, \rho)$ con $\tilde{p}(z, \rho) - p(\zeta)$ nella (4.5). Poiché $\tilde{p}(z, \rho) - p(\zeta) = o(1) + (p(z) - p(\zeta))$, servendoci della (4.6) e del ragionamento fatto nella dimostrazione dei teoremi precedenti, la relazione (4.4) rimane acquisita.

Si deve osservare che se $p(z)$ è una arbitraria funzione continua in $A \cup \Sigma$ (A è l'insieme aperto e limitato la cui completa frontiera è Σ) allora $p(z)$ può venir prolungata con continuità fuori di $A \cup \Sigma$ in modo tale che la (4.3) sia soddisfatta. Lo stesso si può dire se $p(z)$ è una qualunque funzione continua in $B \cup \Sigma$ (B è il complementare di $A \cup \Sigma$), riguardo la prolungabilità di $p(z)$ in A in modo che valga la (4.3).

I risultati ottenuti in questa Nota I, relativi alla teoria del potenziale logaritmico di linea, riguardano i potenziali di doppio strato, normale e tangenziale. Risultati analoghi possono stabilirsi, usando i medesimi procedimenti, per le derivate normali e tangenziali del potenziale logaritmico di semplice strato. Ci evitiamo di enunciare esplicitamente questi risultati perché essi non occorrono per i fini ai quali è dedicata la successiva Nota II.

Teoremi relativi alla teoria del potenziale logaritmico di linea dovuti ad una distribuzione di masse non assolutamente continua, sono stati ottenuti da un diverso punto di vista da G. C. Evans (10). I risultati di tipo « integrale » ottenuti da questo Autore non appaiono, però, utilizzabili per i nostri scopi.

(9) Cfr. loc. cit. (6), p. 105 (32).

(10) Cfr. G. C. EVANS, *Fundamental points of potential theory*, « The Rice Institute pamphlet », vol. VIII, ottobre 1920, n. 4. Cfr. anche G. C. EVANS–E. R. C. MILES, *Potentials of general masses in single and double layers*, « Journ. of Math. », vol. 53 (1931).

Geometria. — *Intorno ad una trasformazione delle equazioni paraboliche.* Nota di MARIA TERESA CALAPSO, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

1. In una precedente Nota lincea [1], alla quale rimandiamo per le notazioni, abbiamo stabilito (in uno spazio affine ad n dimensioni) una trasformazione delle famiglie asintotiche (trasformazione C), che consiste nel passaggio da una siffatta famiglia $v =$ cost. di una superficie $x = x(u, v)$, per la quale vale un'equazione del tipo

$$x_{uu} = a x_u + b x_v, \qquad (\text{con } b \neq 0), \tag{1}$$

alla più generale famiglia asintotica *coniugata* alla congruenza parabolica

$$\hat{x} = x + t x_u \tag{2}$$

formata dalle tangenti alle linee della data famiglia.

La nuova famiglia asintotica, allora, è la $v =$ cost., tracciata sulla superficie

$$\hat{x} = x - \frac{\theta}{\theta_u} x_u, \qquad (\text{con } \theta_u \neq 0), \tag{3}$$

in cui θ è una qualunque soluzione della stessa equazione (1), e cioè si ha:

$$\theta_{uv} = a\,\theta_u + b\,\theta_v. \tag{4}$$

Dalle stesse (3), poi, si deduce per derivazione:

$$\begin{cases} \hat{x}_u = \dfrac{b\theta}{\theta_u^2}(\theta_v x_u - \theta_u x_v) \\ \hat{x}_v = x_v - \left(\dfrac{\theta}{\theta_u}\right)_v - \dfrac{\theta}{\theta_u} x_{uv}. \end{cases} \tag{5}$$

2. Qui vogliamo approfondire lo studio della suddetta trasformazione, per mettere in rilievo alcuni fatti geometrici che ci sembrano non privi di interesse.

Precisamente, diciamo rappresentazione sferica della congruenza (2), o della famiglia asintotica (1), l'insieme delle rette che si ottengono conducendo per l'origine (o per un qualunque punto fisso dello spazio) le parallele alle rette della congruenza. Pertanto, questa rappresentazione sferica è descritta dalla retta che congiunge l'origine col punto

$$X = x_u \tag{6}$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) M. T. CALAPSO, *Sulle congruenze paraboliche*, « Rendicondi dell'Accademia dei Lincei », giugno 1959, p. 757.

e sussiste, di conseguenza, l'equazione parabolica:

$$X_{uu} = \left(a + \frac{b_u}{b}\right) X_u + b\, X_v + \left(a_u - a \frac{b_u}{b}\right) X. \tag{7}$$

Ne segue che ad ogni soluzione σ dell'equazione (1), corrisponde, mediante la normalizzazione

$$Y = \frac{X}{\sigma_u}, \tag{8}$$

una superficie, descritta dal punto Y, sulla quale le linee $v = \text{cost.}$ costituiscono una famiglia asintotica, che si dirà famiglia asintotica della rappresentazione sferica.

Ciò posto, si ha il teorema:

Ogni famiglia asintotica coniugata ad una congruenza parabolica è sempre parallela ad una famiglia asintotica della rappresentazione sferica.

Infatti, considerata la famiglia asintotica $v = \text{cost.}$, tracciata sulla superficie (3) e coniugata alla congruenza parabolica (2), si osservi che, essendo θ soluzione della (1), sarà θ_u soluzione della (7), cui soddisfa anche il punto x_u. Allora, il punto $\hat{x}'$, dato dalla normalizzazione:

$$\hat{x}' = \frac{x_u}{\theta_u}, \tag{9}$$

descrive una famiglia asintotica, $v = \text{cost.}$, della rappresentazione sferica della congruenza parabolica in discorso, e la relativa equazione parabolica (cui soddisfano le funzioni $\hat{x}'$) è:

$$\hat{x}'_{uu} = \left(-a + \frac{b_u}{b} - 2\, b \frac{\theta_v}{\theta_u}\right) \hat{x}'_u + b \hat{x}'_v. \tag{10}$$

Intanto, derivando le (9) e tenendo conto delle (5), si deducono le equazioni

$$\begin{cases} \hat{x}'_u = -\dfrac{1}{\theta} \hat{x}_u \\ \hat{x}'_v = -\dfrac{\theta_u}{b\,\theta^2} \hat{x}_u - \dfrac{1}{\theta} \hat{x}_v, \end{cases} \tag{11}$$

e queste dimostrano il teorema.

Ciò posto, eliminando dalle equazioni ora trovate le funzioni $\hat{x}'$, si ottiene l'equazione parabolica

$$\hat{x}_{uu} = \left(-a + \frac{b_u}{b} - 2\, b \frac{\theta_v}{\theta_u} + 2 \frac{\theta_u}{\theta}\right) \hat{x}_u + b \hat{x}_v; \tag{12}$$

e questa è la trasformata C *dell'equazione* (1), mediante la sua soluzione θ (2). Il legame fra gli integrali della (1) e quelli della sua trasformata (12) è dato dalla (3).

La retta g, che congiunge i punti corrispondenti x e $\hat{x}$, di cui al sistema (11), descrive una congruenza parabolica coniugata ad entrambe le famiglie

(2) Cfr. il n. 7 della Nota citata in (1).

asintotiche $v = \text{cost.}$, tracciate sulle superficie descritte dai suddetti punti, e l'unico fuoco su g, che indichiamo con z, ha le coordinate (sempre restando sottintesi gli indici da 1 ad n) (3):

$$z = \frac{\hat{x} + \theta\,\hat{x}'}{1 + \theta}. \tag{13}$$

Da qui risulta:

$$z = \frac{x}{1 + \theta}, \qquad \text{donde} \qquad z_u = \frac{\theta_u}{1 + \theta}(\hat{x}' - \hat{x}) \tag{14}$$

e quindi il punto z (unico fuoco su g) appartiene alla retta che congiunge l'origine col punto x. Di più la (13) esprime che θ, salvo il segno, è uguale al rapporto semplice che il fuoco su g forma con i punti $\hat{x}$ e $\hat{x}'$. Abbiamo così trovato un significato geometrico della funzione θ, la quale, presa a piacere fra le soluzioni della (1), viene a generare, come si è visto, una configurazione notevole di quattro famiglie asintotiche e due congruenze paraboliche.

Infine osserviamo che la forma dell'equazione (12), come quella della (7) e della (10), dimostra l'invarianza di b (a meno di cambiamenti di parametri), già da noi segnalata (4).

(3) Vedasi il n. 6 della Nota lincea di B. SEGRE, *Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti*, « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XXV, fasc. 6, p. 381 e sgg. (1958). Da questa Nota derivano le nostre ricerche sull'argomento.
Cfr. il n. 4 della Nota citata in (1).

(4) Vedasi il n. 7 della Nota citata in (1).

Meccanica. — *Sulla stabilità in regime visco-elastico a comportamento lineare.* Nota I di JOSÉ NÉSTOR DISTÉFANO, presentata (*) dal Socio G. COLONNETTI.

Nello studio della trave visco-elastica caricata di punta ed inizialmente incurvata, si presenta come fondamentale il conoscere le deformazioni ad ogni istante e determinare le condizioni sotto le quali queste deformazioni si stabilizzano nel tempo.

Nella presente ricerca noi considereremo il caso molto generale del solido visco-elastico in cui la deformazione di un elemento soggetto ad una tensione $\sigma(t)$ variabile con il tempo t si può esprimere con

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) \cdot f(t, \tau)\, d\tau, \tag{1}$$

dove τ_1 è l'istante d'applicazione della tensione. La funzione $f(t, \tau)$ è stata chiamata da Volterra [1] coefficiente di fluage, e la sua dipendenza dal tempo corrente t e dagli istanti successivi di applicazione di nuovi carichi τ, serve a segnare che il fluage del materiale può variare con la «età» del materiale. Il valore E che fluage nella (1) è una costante che rappresenta il modulo di elasticità iniziale. Il valore $\sigma(t)/E$ è la deformazione elastica, mentre il termine

$$\bar{\varepsilon} = \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) \cdot f(t, \tau)\, d\tau \tag{2}$$

è la deformazione viscosa che si produce all'istante t. Il coefficiente di fluage $f(t, \tau)$ sarà un dato del problema, e lo calcoleremo a partire dalle curve di fluage ottenute a tensioni costanti di 1 kg cm — 2, applicate in diversi istanti τ_i. Se chiamiamo con $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau_i)$ queste curve, in virtù della (2) avremo:

$$\bar{\varepsilon}_0(t, \tau_i) = \int_{\tau_i}^{t} f(t, \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Derivando la precedente rispetto all'estremo inferiore si ottiene:

$$f(t, \tau_i) = -\frac{\partial}{\partial \tau_i} \bar{\varepsilon}_0(t, \tau_i). \tag{4}$$

Perciò, per definire in maniera completa le deformazioni viscose, bisogna conoscere la famiglia di curve $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$ che si ottiene misurando il fluage

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

corrispondente a 1 kg cm^{-2}, in diverse età τ del materiale. Più avanti si vedrà come in una certa classe di materiali si può definire $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$ mediante una sola curva di fluage. Noi considereremo, d'accordo con l'esperienza, le seguenti proprietà della funzione $\bar{\varepsilon}_0$

$$(a)\quad \bar{\varepsilon}_0(t, \tau) = 0 \text{ se } t \leq \tau; \qquad (b)\quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_0}{\partial t} \geq 0; \qquad (c)\quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_0}{\partial \tau} \leq 0 \quad 0 \leq t, \tau \leq \infty:$$

d'accordo con (c), risulterà che $f(t, \tau)$ sarà sempre positiva.

Quando si tratta della flessione, essendo le deformazioni viscose proporzionali alle tensioni applicate, la distribuzione di tensioni non varierà [2], e perciò la curvatura della trave sarà sempre proporzionale al momento applicato, e si potrà esprimere con una formula simile alla (1), dove $\sigma(t)$ sarà sostituita con un valore proporzionale al momento M che agisce nella sezione. Tuttavia, per scrivere la curvatura senza definire altre costanti, conviene calcolarla a partire dalla (1), come segue. D'accordo con la teoria generale della flessione in regime elasto-plastico di Colonnetti [3], la curvatura di una trave si può esprimere con:

$$\mu = \frac{M + E \int_A \varepsilon \cdot z \cdot dA}{EI} \tag{5}$$

dove M , I , z sono il momento flettente, il momento d'inerzia, e la distanza di una fibra dal baricentro della sezione della trave. Eliminando $\bar{\varepsilon}$ tra la (2) e la (5), e sostituendo la curvatura μ con il suo valore approssimato $-\partial^2 y/\partial x^2$ dove y è l'ordinata d'inflessione della trave, si ottiene:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \frac{M(t)}{EI} + \frac{1}{I}\int_{\tau_1}^{t} M(\tau) \cdot f(t, \tau)\, d\tau = 0 . \tag{6}$$

D'ora in avanti, supporremo che le estremità della trave siano articolate. L'asse della trave potrà avere una piccola eccentricità iniziale $y_0(x)$ e le forze che potranno agire saranno: un carico di punta P, e le forze laterali (carichi o momenti applicati). Queste ultime forze potranno anche essere variabili con il tempo [1], ma supporremo che il loro valore sia limitato. Introdurremo queste forze, considerando il momento $\mathfrak{M}(x, t)$ che producono sulla sbarra. Stante la limitazione delle forze laterali nel tempo, ci sarà sempre un valore costante $0 \leq \mathfrak{M}_0 < \infty$ che verificherà la proprietà:

$$|\mathfrak{M}(x, t)| \leq \mathfrak{M}_0 . \tag{7}$$

In questa maniera, il momento M che agirà sulla trave, sarà

$$M = \mathfrak{M}(x, t) + P[y(x, t) + y_0(x)] . \tag{8}$$

(1) In questa teoria non si tiene conto delle forze d'inerzia. Quindi se le forze laterali variano con il tempo, l'accelerazione dovrà essere assai piccola.

Sostituendo M nella (6), si ottiene la seguente equazione integro-differenziale

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \frac{P}{EI} y(x,t) + \frac{P}{I}\int_{\tau_1}^{t} y(x,\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau = \tag{9}$$

$$-\frac{\mathcal{H}(x,t)}{EI} - \frac{1}{I}\int_{\tau_1}^{t} \mathcal{H}(x,\tau) f(t,\tau)\,d\tau$$

dove $\mathcal{H}(x,t) = \mathfrak{M}(x,t) + Py_0(x)$.

Per risolvere la precedente, supporremo che le funzioni $y(x,t)$ e $\mathcal{H}(x,t)$ siano sviluppabili in serie di funzioni $\varphi_i(x)$

$$\mathcal{H}(x,t) = \sum_1^\infty a_i(t)\cdot\varphi_i(x) \tag{10}$$

$$y(x,t) = \sum_1^\infty b_i(t)\cdot\varphi_i(x) \tag{11}$$

dove $\varphi_i(x)$ sono le funzioni caratteristiche corrispondenti ai valori caratteristici k_i che soddisfano le condizioni al contorno del problema, della equazione differenziale

$$\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + k_i\varphi_i = 0\,. \tag{12}$$

Come è noto, le funzioni caratteristiche $\varphi_i(x)$ sono ortogonali e perciò i coefficienti $a_i(t)$ della (10) si calcolano immediatamente con:

$$a_i(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{H}(x,t)\cdot\varphi_i(x)\,dx \tag{13}$$

dove l è la lunghezza della trave.

Sostituendo la (10) e la (11) nella (9) e tenendo conto della (12), si ottiene la seguente equazione di condizione per i coefficienti $b_i(t)$

$$b_i(t) - \lambda\int_{\tau_1}^{t} b_i(\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{k_i EI - P}\left[a_i(t) + E\int_{\tau_1}^{t} a_i(\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{14}$$

dove

$$\lambda = \frac{P\cdot E}{EI\,k_i - P}\,.$$

La precedente è una equazione integrale del tipo di Volterra che permette di calcolare i coefficienti $b_i(t)$ della (11), risolvendo così il problema. Prima di passare allo studio di queste equazioni nei casi particolari, conviene fare una osservazione sopra i valori caratteristici k_i. Infatti, è noto [4] che

il valore caratteristico P/EI della equazione omogenea della flessione sotto carico di punta in regime elastico

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

è il carico critico di Eulero. Perciò chiamando con P_k questo carico critico, il minore valore caratteristico k_m della (12) si potrà scrivere:

$$k_m = \frac{P_k}{EI} . \tag{15}$$

Per studiare le soluzioni della (14), converrà prima restringere un po' la generalità della funzione $f(t, \tau)$, che, come ormai è noto, definisce il comportamento viscoso del materiale. A tale scopo, distingueremo tra tutti i materiali che hanno fluage lineare, due classi diverse. Nella prima classe, considereremo quei materiali le cui proprietà di fluage hanno stabilità nel tempo. Quindi, le curve di fluage $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau_1)$ e $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau_2)$ misurate in due età diverse τ_1 e τ_2, sono eguali, se come origine dei tempi si prende τ_1 in un caso, e τ_2 nell'altro. Questo vuol dire che la funzione di fluage $\bar{\varepsilon}_0$ non dipende che dalla differenza $t - \tau$ e perciò il coefficiente di fluage $f(t, \tau)$ si potrà anche esprimere come una funzione del tipo

$$f(t - \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\varepsilon}_0 (t - \tau) . \tag{16}$$

Noi diremo che questi materiali non hanno invecchiamento. A questa importante classe appartengono una grande varietà di materiali plastici del tipo metacrilico, fenolformaldeidico, ecc.

Nella seconda classe considereremo invece i materiali in cui il loro processo di indurimento prosegue ancora dopo che si è caricata la struttura. In questo caso, l'intensità del fluage diminuisce con l'età del materiale fino ad un certo limite, in cui materiale si avvicina a uno della prima classe. Questo processo è asintotico, e noi diremo che il materiale invecchia. Il materiale più rapprentattivo di questa classe è il calcestruzzo, ma anche il legno, la ceramica, ecc., hanno proprietà simili. Una lunga serie di lavori sperimentali da 30 anni a questa parte, dimostrano che il calcestruzzo ha fluage lineare per carichi non superiori a un terzo del carico di rottura. Tra i più recenti meritano di essere citati quello di Ross [5] e quello di Freudenthal e Roll [6].

Nella presente ricerca, noi ci limiteremo a studiare le proprietà delle funzioni $b_i(t)$ per i materiali della prima classe, cioè per quelli che non hanno invecchiamento. In questi tipi di materiali, essendo il coefficiente di fluage della forma $f(t - \tau)$, l'equazione integrale (14) prenderà la forma

$$b_i(t) - \lambda \int_0^t b_i(\tau) \cdot f(t - \tau) \, d\tau = g_i(t) \tag{17}$$

dove

$$g_i(t) = \frac{1}{\mathrm{EI}\,k_i - \mathrm{P}} \left[a_i(t) + \mathrm{E} \int_0^t a_i(\tau) \cdot f(t-\tau)\, d\tau \right].$$

Per semplicità, questa formula è stata scritta considerando $\tau_i = 0$. Questa equazione appartiene al tipo di Volterra, delle cosidette del ciclo chiuso, e la sua risoluzione non presenta difficoltà per mezzo della trasformazione di Laplace. Infatti, gli integrali della (17) sono per definizione la Faltung delle funzioni sotto il segno integrale. Tenendo conto della proprietà che gode la trasformazione di Laplace applicata alla Faltung, applicando la trasformazione alla (17) e risolvendo rispetto a $b_i(t)$, si ha:

$$b_i(t) = \frac{1}{\mathrm{EI}\,k_i - \mathrm{P}}\, \mathfrak{L}^{-1}\, \frac{1 + \mathrm{E}\,\mathfrak{L}_s f(t)}{1 - \lambda\, \mathfrak{L}_s f(t)}\, \mathfrak{L}_s\, a_i(t) \tag{18}$$

dove con $\mathfrak{L}_s$ indichiamo la trasformazione di Laplace definita da

$$\mathfrak{L}_s f(t) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

e con $\mathfrak{L}^{-1}$ la trasformazione inversa.

Le funzioni $b_i(t)$ così ottenute, sostituite nella (11), permettono di calcolare la deformazione in ogni istante t, nelle applicazioni. Ma, per la natura stessa del problema, più importante ancora del calcolo effettivo delle deformazioni, è studiare il suo comportamento asintotico. Questo comportamento dipende, naturalmente, dal comportamento asintotico delle funzioni $b_i(t)$. Quando il fluage del materiale cresce in maniera continua e illimitata nel tempo, anche le deformazioni cresceranno illimitatamente. In questo caso, il criterio di stabilità da applicare, sarà calcolare un tempo massimo t_{M} (durata massima della struttura) sotto il quale le deformazioni avranno valori inferiori a uno preventivamente fissato in relazione agli sforzi massimi sviluppati e all'utilità della struttura. Ma in molti materiali, il fluage tende asintoticamente verso un limite $\bar{\varepsilon}_0(\infty)$. In questo caso, bisognerà sapere se per tutti i carichi dell'intervallo $0 \leq \mathrm{P} < \mathrm{P}_k$ le deformazioni tenderanno anche ad un limite finito, e in caso contrario stabilire l'intervallo in cui questo si verifica, e i valori limiti delle deformazioni. Impostato così il problema analizzeremo l'equazione (17).

Le funzioni $g_i(t)$ che figurano nel secondo membro tenderanno ad un limite finito con $t \to \infty$, se si tiene conto che le funzioni $a_i(t)$ il cui valore è espresso dalla (13), sono funzioni limitate superiormente perché lo sono per definizione le funzioni $\mathfrak{M}(x, t)$ (condizione (7)), e che l'integrale

$$\int_0^\infty f(t)\, dt$$

non rappresenta altro che il valore finale del fluage $\bar{\varepsilon}_0(\infty)$, che abbiamo supposto finito. Allora è possibile applicare un teorema di Paley e Wiener sull'equazione di Volterra [7], che afferma che le funzioni $b_i(t)$ della (17) tenderanno al limite finito

$$b_i(t) \rightarrow \frac{g_{0i}}{1 - \lambda \int_0^\infty f(t)\, dt} \quad ; \quad g_{0i} = \lim_{t \to \infty} g_i(t) \tag{19}$$

se si verifica che

$$\lambda \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \neq 1 \qquad s \geq 0 . \tag{20}$$

Ma dato che $f(t)$ è una funzione positiva, per verificare la (20) occorre e basta che

$$\lambda \int_0^\infty f(t)\, dt < 1 . \tag{21}$$

Chiamando con γ il valore del fluage $\bar{\varepsilon}_0(\infty)$ e ricordando che

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \bar{\varepsilon}_0(\infty) = \gamma$$

e che

$$\lambda = \frac{P \cdot E}{EI\, k_i - P} ,$$

la (21) si verificherà in quanto si verifica che

$$P < \frac{EI\, k_i}{1 + E\gamma} .$$

Siccome dalla (15) il minor valore di k_i è il carico critico P_k diviso EI, il carico P dovrà ancora verificare

$$P < \frac{P_k}{1 + E\gamma} . \tag{22}$$

Questa è finalmente la condizione che si deve verificare perché le funzioni $b_i(t)$, e quindi le deformazioni, abbiamo un limite finito con $t \rightarrow \infty$.

Quando il carico appartiene all'intervallo

$$\frac{P_k}{1 + E\gamma} \leq P < P_k \tag{23}$$

le deformazioni cresceranno illimitatamente nel tempo. Naturalmente, quando $P \geq P_k$, la trave subisce istantaneamente grandi deformazioni. La disuguaglianza (22) esprime da sola un criterio di stabilità per la trave visco–elastica lineare arbitrariamente incastrata nelle sue estremità, soggetta ad un

carico di punta, e a forze laterali generiche, che possono variare in maniera limitata nel tempo. Questo criterio, ammette un enunciato molto semplice, introducendo il seguente concetto: chiameremo « modulo di elasticità finale di un solido visco–elastico lineare », la relazione tra la tensione costante σ_0 e la deformazione finale $\varepsilon(\infty)$. Con la formula 1) e tenendo conto che per i materiali della prima classe il coefficiente di fluage è della forma $f(t-\tau)$, questa relazione si calcola immediatamente e vale

$$E' = \frac{E}{1 + E\gamma} \cdot \tag{24}$$

Siccome il carico critico P_k è direttamente proporzionale al modulo di elasticità, il valore $P_k/1 + E\gamma$, che si può anche scrivere $P_k/E \cdot E/1 + E\gamma$, si può interpretare come il carico critico calcolato con il modulo E′ dato dalla (24), invece che con il modulo iniziale E. Queste considerazioni permettono di esprimere la disuguaglianza (22) sotto la forma del seguente:

Criterio di stabilità: *I carichi che permettono una stabilità nel tempo delle deformazioni di una trave caricata di punta, devono essere minori del carico critico di Eulero corrispondente ad una trave simile, ma fatta di un materiale che come modulo di elasticità abbia il modulo di elasticità finale del materiale.*

Bisogna aggiungere, che questo criterio di stabilità deve sempre essere accompagnato dallo studio delle deformazioni massime, perché può darsi che queste non siano ammissibili. Queste deformazioni limiti si calcolano con la (19) tenendo conto che i valori $b_i(\infty)$ sono dati dalla (19), e valgono

$$y(x, \infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{0i}}{1 - \dfrac{E\gamma P}{EI\,k_i - P}}\, \varphi_i(x) : \tag{25}$$

e nel caso particolare che le forze laterali non dipendano dal tempo si avrà

$$y(x, \infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\dfrac{EI\,k_i}{1 + E\gamma} - P}\, a_i\, \varphi_i(x) . \tag{26}$$

Bibliografia.

[1] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions des lignes* (1913).

[2] G. Colonnetti, *Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose*, « Rend. Accad. dei Lincei », serie VIII, vol. IV.

[3] G. Colonnetti, *Scienza delle costruzioni*. Einaudi, 1948.

[4] Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*. McGraw–Hill, New York 1936.

[5] A. D. Ross, *Creep of Concrete under variable Stress*, « Journal of the American Concrete Institute », march 1958, n. 9, vol. 29.

[6] A. M. Freudenthal and F. Roll, *Creep and Creep Recovery of Concrete Under High Compressive Stress*, « Journal of the American Concrete Institute », june 1958, n. 12, vol. 29.

[7] Paley and Wiener, « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 35.

Geofisica. — *Contributo allo studio della marea gravitazionale terrestre.* Nota di ARMANDO NORINELLI (*), presentata (**) dal Socio P. DORE.

Fra le ricerche programmate e svolte durante l'ANNO GEOFISICO INTERNAZIONALE va annoverata l'osservazione sistematica della variazione diurna della componente verticale della marea terrestre, la quale, assieme ai dati relativi alle altre due componenti, costituisce elemento indispensabile per indagare sul fenomeno di marea nella sua interezza.

L'Istituto di Geodesia e Geofisica dell'Università di Padova, in collaborazione con quello di Topografia e Geodesia della Facoltà di Ingegneria, ha preso parte attiva al predetto programma (e vi prende parte tuttora nell'ambito della COOPERAZIONE GEOFISICA INTERNAZIONALE) con un gravimetro Askania registratore della marea gravimetrica, espressamente ottenuto per questo tipo di ricerca.

È conveniente richiamare i principi di funzionamento di tutto il complesso registratore. All'estremo destro della fig. 1 si riconosce la parte superiore del gravimetro Askania, che proviene dal noto schema del Graf. A sinistra della figura sta l'apparato registratore che consta i due parti: il galvanometro a specchio (addossato alla parete) e il registratore propriamente detto.

Se supponiamo, per semplicità, che nel gravimetro il braccio della massa sia nella posizione orizzontale, tale per cui le due fotocellule, che fanno parte del sistema di misura, siano egualmente illuminate, essendo esse poste fianco a fianco e connesse differenzialmente, nel circuito fotoelettrico di misura non passerà corrente.

Ma se la gravità varia, il braccio subirà un piccolo spostamento dalla posizione orizzontale *proporzionale alla variazione di gravità* e le due fotocellule, illuminate allora in maniera diversa, daranno origine, nel circuito di misura, ad una corrente.

A questo circuito è collegato il galvanometro dell'apparato registratore, il cui specchio devierà perciò dalla posizione precedente. La luce riflessa dallo specchio cade su una fotoresistenza (al solfuro di cadmio) solidale con un carrello che porta il cilindretto metallico visibile in figura, ad un estremo del quale è fissata una punta di zaffiro.

La fotoresistenza comanda uno speciale motore ad alta sensibilità in un circuito a ponte; il complesso funziona in modo da assicurare il continuo servaggio del carrello (quindi della punta di zaffiro) al raggio luminoso riflesso dallo specchio del galvanometro, nel senso che ad ogni deviazione del galvanometro corrisponde uno spostamento *orizzontale* della punta di zaffiro. La

(*) Istituto di Topografia e Geodesia della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

punta *incide su carta cerata*, avvolta su rullo (ad asse parallelo alla direzione dei predetti spostamenti della punta) rotante con velocità uniforme, per cui detta punta subirà uno spostamento *orizzontale*, comandato dal galvanometro, *proporzionale alla variazione di gravità* (1), ed uno ad esso *perpendicolare*, causato dalla rotazione del rullo, *proporzionale al tempo*.

Dal registrogramma si deducono quindi le variazioni della gravità in funzione del tempo.

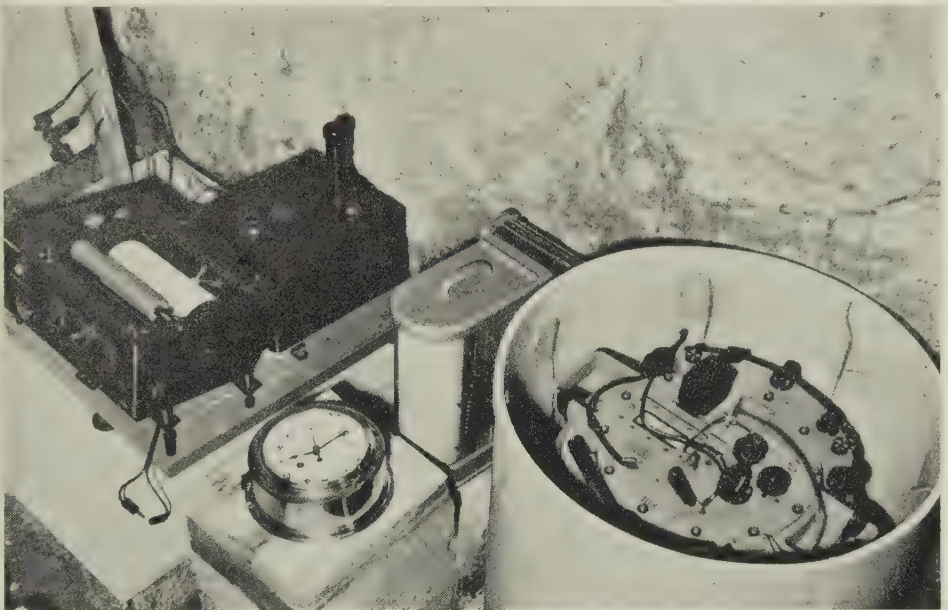


Fig. 1. – Stazione registratrice della marea gravimetrica a Grotta Gigante (Trieste).

Il gravimetro Askania Gs 11/R, N. 108, dopo un periodo di studio nella « *Stanza di gravità* » dell'Istituto di Geodesia e Geofisica, adattata espressamente per queste ricerche, è stato messo in condizione di funzionare regolarmente per la durata di un mese (2).

Assicurati dell'ottimo comportamento dello strumento, nel maggio del 1959 il complesso registratore venne trasportato nella Grotta Gigante (Trieste) ($\varphi = 45°42'30''$ N ; $\lambda = 13°45'47''$ E), istituendo così in Italia una stazione completa per lo studio delle tre componenti della marea terrestre.

(1) La variaziane di gravità di 0,01 mgal produsse uno spostamento della punta di zaffiro di mm 3,5 nella stazione di Padova e di mm 2,3 in quella di Grotta Gigante. La diminuzione di sensibilità del registratore in quest'ultima stazione, realizzata con una resistenza in serie di 1,5 KΩ ed una in parallelo di 10 KΩ, consentì di ridurre la frequenza dei controlli, dato che la stazione non è agevolmente raggiungibile. Attualmente, però, in considerazione del fatto che la deriva è quasi nulla, sono state tolte entrambe le resistenze.

(2) Vedere: *Liste des Stations de Marées Terrestres: Stations gravimétriques*. Centre International des Marées Terrestres, Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles, juillet 1959.

Nella predetta Grotta funzionano infatti già da tempo i « pendoli Marussi » (3-4): la stazione risulta perciò COMPLETA (gravimetro più due pendoli orizzontali) ed è attualmente unica in Italia ed una delle tre (TRIESTE, BERCHTESGADEN, BOROWIEC) funzionanti in Europa (compresa l'orientale). È opportuno precisare che ci si riferisce a stazioni con gravimetro e pendoli nello stesso vano o al più a qualche centinaio di metri il primo dai secondi.

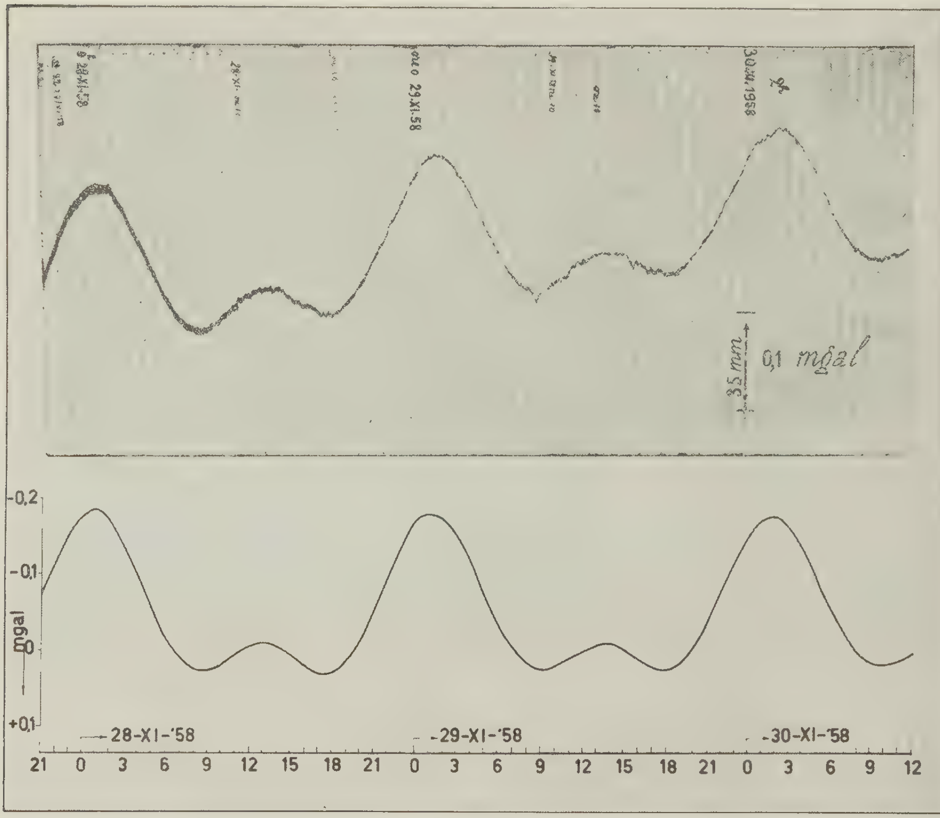


Fig. 2. – Mareogramma nella stazione di Padova e curva teorica.

Nelle figg. 2 e 3 appaiono esempi di registrogrammi ottenuti nelle stazioni rispettivamente di Padova e di Trieste. Le linee parallele al lato più stretto ed equidistanziate (mm 6,5) si riproducono ad ogni ora; il cronometro, che si vede in fig. 1, regolato sul T.M.E.C., ne assicura la registrazione automatica all'ora esatta. Le altre linee che vi figurano sono prevalentemente di controllo.

(3) A. MARUSSI, *Les grands pendules horizontaux de la station de Trieste* (*Grotta Gigante*). Deuxième colloque international de la Commission du C.S.A.G.I. pour l'étude des marées terrestres (Munich, juillet 1958).

(4) A. MARUSSI, *Les pendules horizontaux de la Grotta Gigante*, Troisième Symposium International sur les Marées Terrestres. (Trieste, juillet 1959).

Le predette figure riportano per un confronto le curve « teoriche » di marea; le ordinate sono state ricavate dai dati raccolti nel *supplemento N. 1* del mese di dicembre di « Geophysical Prospecting » (The Hague).

Si nota nella registrazione effettuata a Padova (fig. 2) una discreta deriva, ridotta quasi a zero nella Stazione di Trieste (fig. 3). In questa sta-

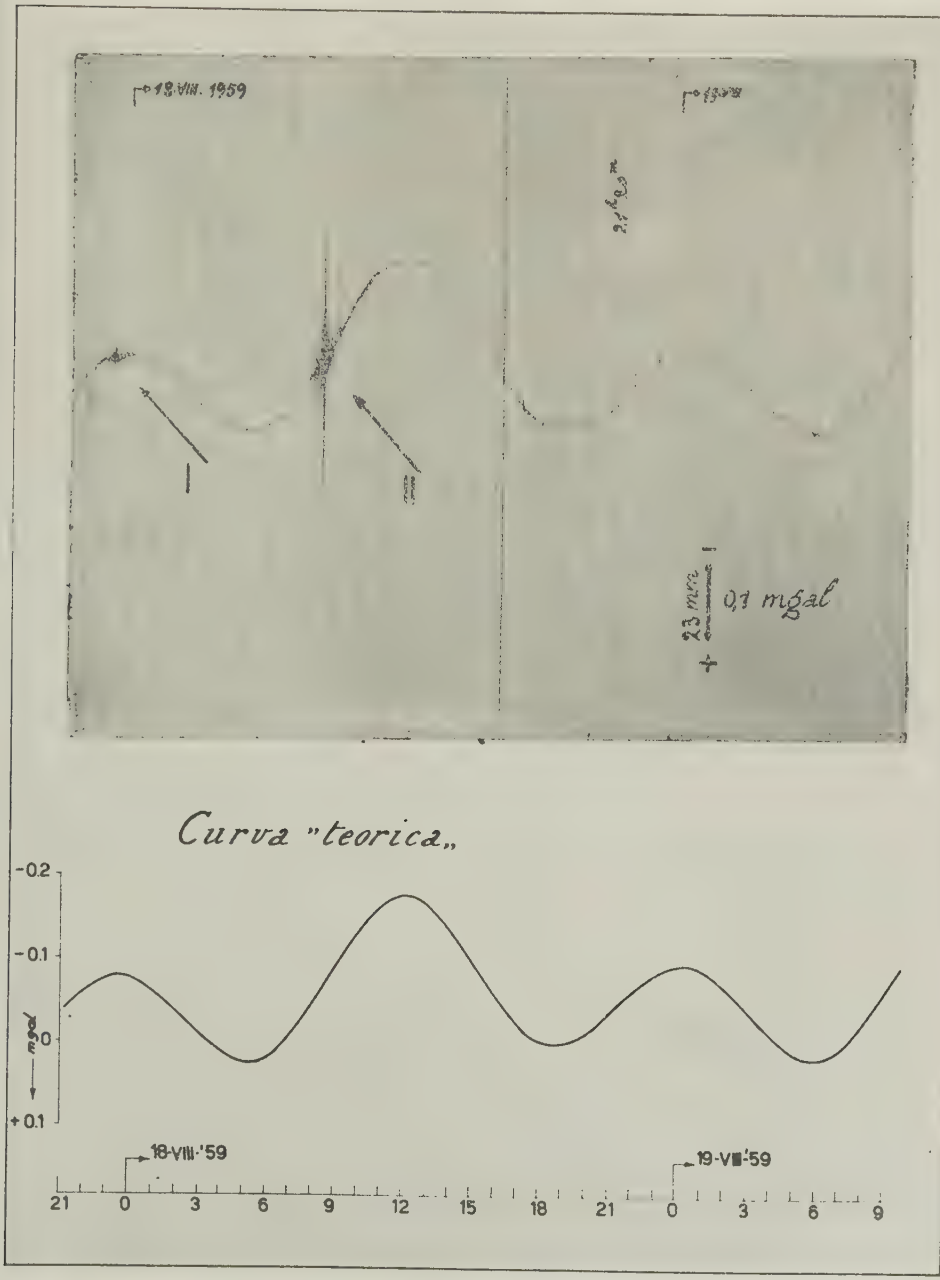


Fig. 3. – Mareogramma nella stazione di Grotta Gigante (Trieste). I disturbi indicati dalle frecce sono dovuti a scosse telluriche.

zione a causa della notevole umidità, fu necessario proteggere tutto il complesso con involucri in modo da creare attorno agli strumenti un ristretto ambiente facile ad essicare; tali involucri sono stati sagomati e fissati in modo da consentire, senza essere rimossi, le manovre al registratore e al gravimetro. Nella fig. 1, che riporta la sistemazione della stazione di Grotta Gigante, sono state tolte le protezioni per esigenze fotografiche. Soltanto il gravimetro appare parzialmente protetto. Si vede ancora al centro della figura, addossato alla parete, un barotermoigrografo di controllo.

Nella curva «sperimentale» sono evidenti i rumori di fondo dovuti alle fluttuazioni degli elettroni nelle due fotocellule del sistema di misura.

Le scosse telluriche sono avvertite in maniera caratteristica dal complesso registratore. La fig. 3 riporta appunto una registrazione disturbata da terremoti (frecce I e II) e si può considerare un bel esempio di comportamento «sismometrico» di un gravimetro.

La curva sperimentale infatti in corrispondenza agli intervalli con momento centrale a $23^h\,20^m$ e $8^h\,20^m$ circa, rispettivamente del 17 e 18 agosto, presenta una registrazione tormentata, maggiormente nel secondo dei due intervalli di tempo.

Secondo informazioni gentilmente fornitemi dal direttore dell'Osservatorio Geofisico Sperimentale di Trieste, nei due predetti periodi la Stazione Sismica di quell'Osservatorio registrò un terremoto (epicentro nelle Isole Salomone), il cui momento di massima intensità si ebbe alle $23^h\,24^m,5$ del 17 agosto; così come appare dalla registrazione effettuata col gravimetro (freccia I).

Pure il giorno 18 ebbe origine a Yellowstone un altro terremoto, ricordato anche dai quotidiani a motivo delle tragiche conseguenze: la predetta stazione sismica registrò il massimo d'intensità alle $8^h\,25^m,3$ (freccia II della fig. 3). Mentre il primo provocò un'ampiezza massima del moto del suolo a Trieste di 48,4 μ (comp. Z: 28 μ), il secondo causò un'ampiezza massima di 342 μ (comp. Z: 201 μ). Anche nella registrazione di fig. 3 è rispettato abbastanza lo stesso rapporto.

I dati di osservazione della stazione di Padova e del mese di giugno della stazione di Grotta Gigante sono già stati sottoposti ad analisi armonica, utilizzando la calcolatrice elettronica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna.

I risultati, raccolti nella Tabella I, sono stati presentati al «Terzo Simposio Internazionale sulle Maree Terrestri», svoltosi a Trieste nel luglio scorso (5).

(5) A. NORINELLI–F. TESI, *Résultats des enregistrements de la marée gravitationnelle terrestre aux stations de Padoue et de Trieste* (*Grotta Gigante*). Troisième Symposium International sur les Marées Terrestres. Trieste, juillet 1959.

TABELLA I.

Risultati dell'analisi armonica.

Onde	Padova (12 dicembre 1958) (*)		Trieste (13 giugno 1959) (*)	
	H/H_1	$\Phi - \Phi_1$	H/H_1	$\Phi - \Phi_1$
K_1	1,148	+ 0°,35	1,064	— 2°,06
O_1	1,285	— 2 ,85	1,011	— 3 ,67
Q_1	1,719	— 0 ,21	1,406	— 5 ,63
M_2	1,176	— 2 ,50	1,116	— 3 ,02
N_2	1,378	— 10 ,61	1,213	— 18 ,80
S_2	1,213	— 1 ,14	1,066	+ 0 ,83

(*) Giorno centrale.

Il programma futuro contempla la registrazione continua della marea gravimetrica nella Stazione di Grotta Gigante (Trieste) sino al prossimo luglio, per la durata complessiva di un anno, in modo da consentire, a motivo della vicinanza del mare, anche lo studio dell'effetto *indiretto* della marea di questo.

La sistemazione del gravimetro avrà poi carattere permanente in altra località.

Desidero chiudere la Nota con un vivo grazie per il loro aiuto ai professori Paolo Dore e Angelo Bianchi.

Chimica fisica. — *Composti molecolari: effetto della clorosostituzione sulla costante di associazione dei complessi tra s–trinitrobenzolo e ammine aromatiche* [(*)]. Nota di Giorgio Favini e Ignazio Renato Bellobono, presentata [(**)] dal Socio L. Cambi.

Recentemente nel nostro Istituto [(1)] da misure cinetiche sulla reazione di benzoilazione di alcune cloronaftilammine e dalla determinazione diretta delle costanti di dissociazioni basica delle ammine stesse per via spettroscopica, è stato ricavato un ordine di basicità dei derivati clorurati nei confronti delle naftilammine non sostituite.

Nel presente lavoro sono stati studiati con il metodo spettroscopico i complessi molecolari con *s*–trinitrobenzolo delle cloroaniline e di alcune cloronaftilammine per confrontare l'ordine ottenuto per le costanti di associazione molecolari con quelle delle costanti di dissociazione basica delle ammine relative.

L'interazione fra nitrocomposti aromatici e ammine aromatiche è stata oggetto di misurazioni quantitative mediante metodi spettrofotometrici da parte di numerosi Autori [(2)], sciogliendo separatamente i due componenti in solventi inerti, mescolandone le soluzioni e misurandone l'assorbimento in un determinato campo di lunghezze d'onda.

Dei due metodi d'indagine normalmente impiegati per lo studio spettrofotometrico dei complessi molecolari;

a) valutazione indipendenti della costante di associazione e del coefficiente di estinzione del complesso;

b) determinazione delle costanti di associazione con la valutazione contemporanea del coefficiente di estinzione.

In questo caso specifico è stato seguito il secondo, in quanto il primo può venire applicato solo quando una notevole frazione di uno dei due componenti è presente in soluzione sotto forma di complesso.

Così R. Foster e collaboratori [(3)] hanno ricavato ed applicato una semplice relazione tra densità ottica e costante di associazione del complesso di reazione in soluzione tra nitrocomposti e basi aromatiche; detta relazione è applicabile solo quando la densità ottica della soluzione contenente il com-

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Fisica dell'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) M. Simonetta e S. Carrà, questi « Rend. », VIII, *22*, 176 (1957); S. Carrà e M. Simonetta, questi « Rend. », VIII, *24*, 713 (1958).

(2) « Chem. Rev. », *54*, 724–729 (1954).

(3) R. Foster, D. L. Hammick e A. A. Wardley, « J. Chem. Soc. », 3817 (1953); R. Foster, D. L. Hammick, « J. Chem. Soc. », 2685 (1954); B. Dale, R. Foster, D. L. Hammick, « J. Chem. Soc. », 3987 (1954).

plesso è misurata a lunghezza d'onda alle quali i coefficienti di estinzione del donatore e dell'accettore sono trascurabili e quando uno dei due reagenti è in forte eccesso rispetto all'altro.

Landauer e Mc Connell [4] e successivamente Ross e collaboratori [5] impiegano una relazione che tiene anche conto dell'ecentuale assorbimento dei due reagenti contemporaneamente a quello del complesso. Ammettendo che la densità ottica della soluzione sia calcolabile additivamente dai coefficienti di estinzione di tutte le specie presenti moltiplicati per le rispettive concentrazioni si ha:

$$d_{[\mathrm{AD}]} = [\mathrm{AD}]\, \varepsilon_{\mathrm{AD}}\, l = d - [\mathrm{A}]\, \varepsilon_{\mathrm{A}}\, l - [\mathrm{D}]\, \varepsilon_{\mathrm{D}}\, l$$

dove d è la densità ottica della soluzione, $d_{[\mathrm{AD}]}$ quella del complesso molecolare, l lo spessore in cm della cella e ε_{A}, ε_{D}, $\varepsilon_{\mathrm{AD}}$, i coefficienti di estinzione dell'accettare A, del donatore D e del complesso AD rispettivamente.

Nel caso di complessi 1 : 1 si ha per la costante di associazione:

$$\mathrm{K} = \frac{[\mathrm{AD}]}{[\mathrm{A}]\,[\mathrm{D}]}$$

e combinando le due equazioni si ottiene la relazione seguente:

$$\frac{\mathrm{R}}{d_{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{\mathrm{K}\varepsilon_{\mathrm{AD}}}\, \mathrm{S} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{AD}}} \tag{1}$$

dove

$$\mathrm{R} = \frac{[\mathrm{A}]\,[\mathrm{D}]}{[\mathrm{A}] + [\mathrm{D}] - [\mathrm{AD}]} \quad \text{e} \quad \mathrm{S} = \frac{1}{[\mathrm{A}] + [\mathrm{D}] - [\mathrm{AD}]}$$

essendo [A] e [D] le concentrazioni molari dell'accettore e del donatore.

Ricavati prima ε_{A} e ε_{D} indipendentemente da misure spettrofotometriche sui componenti puri, si determina in seguito d nel campo di lunghezze d'onda desiderato con diversi rapporti di concentrazioni iniziali $[\mathrm{A}_\circ]$ e $[\mathrm{D}_\circ]$ facendo tutte le misure nello stesso solvente a temperatura controllata e costante. Riportando graficamente $\mathrm{R}/d_{\mathrm{AD}}$ in funzione di S per le diverse lunghezze d'onda e i diversi rapporti di concentrazione (ammettendo che $[\mathrm{A}] \cong [\mathrm{A}_\circ]$, $[\mathrm{D}] \cong [\mathrm{D}_\circ]$ e $[\mathrm{A}_\circ] + [\mathrm{D}_\circ] \gg [\mathrm{AD}]$), si ottiene un fascio di rette convergenti in un punto situato sul semiasse negativo delle ascisse.

L'intercetta su tale asse dà la costante di associazione K, mentre quella sull'asse delle ordinate il valore dell'inverso del coefficiente d'estinzione del complesso $1/\varepsilon_{\mathrm{AD}}$ per ogni lunghezza d'onda. A causa dei piccoli valori di tali intercette il metodo dei minimi quadrati può essere più vantaggiosamente impiegato per definire la migliore retta passante per i punti sperimentali e per calcolare il valore di K.

(4) J. Landauer e H. Mc Connel, « J. An. Chem. Soc. », *74*, 1221 (1952).

(5) S. D. Ross, N. Bassin, M. Finkelstein, W. A. Leach, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 69 (1954); S. D. Ross, I. Kuntz, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 74 (1954)

In accordo con la teoria di Mulliken [6], la formazione di composti molecolari di questo tipo risulterebbe da una interazione donatore – accettore con conseguente formazione di un legame intermolecolare a trasferimento di carica che può essere così rappresentato

$$A + D \rightleftarrows AD \longleftrightarrow A \quad + D^{+}.$$

Il legame intermolecolare nel complesso è dovuto alla risonanza sopra indicata sebbene il contributo della struttura ionica sia indubbiamente limitato. Sulla base di questa teoria la formazione del complesso dovrebbe essere favorita dai sostituenti che cedono elettroni nella molecola del donatore e dai sostituenti che attraggono elettroni nella molecola dell'accettare.

Poiché anche la costante di dissociazione delle aniline monosostituite risentirà della natura del sostituente, nel senso che i sostituenti che cedono elettroni aumentano la basicità dell'ammina, mentre quelli che li attirano ne aumentano l'acidità, per le diverse aniline e naftilammine esaminate, a parità di agente accettore, si dovrebbe avere uno stesso ordine di successione nei pK_A delle ammine e nelle costanti di formazione del complesso K. Nel caso delle cloronaftilammine in confronto rispettivamente all'α–naftilammina ed alla β–naftilammina, si verifica regolarmente una diminuzione della costante di associazione così come nei lavori precedenti [1] si era verificata una diminuzione della basicità dell'ammina e della velocità di reazione di benzoilazione, qualunque fosse la posizione del cloro nell'anello naftalenico; tra le diverse cloronaftilammine non si ha invece la stessa successione. Bisogna però tenere presente che, mentre le misure di velocità di reazione erano state eseguite in benzolo e le misure di costante di dissociazione in metanolo acquoso al 50 °/₀, le costanti di formazione del complesso sono state invece determinate in soluzione alcoolica, e che la natura del solvente ha influenza su ciascuna delle tre determinazioni sperimentali effettuate.

Nel caso delle cloroaniline, per il derivato orto e per il derivato meta sono state invece ritrovate delle costanti di associazione inaspettatamente superiori a quelle dell'anilina; però già in letteratura [7] si era notato che aggruppamenti come il *m*–COOH, il *p*–COOH ed il *p*–$COCH_3$ nella molecola del donatore favorivano la formazione del complesso pur essendo sostituenti che attraggono elettroni.

In realtà l'influsso sulla costante di associazione dovuta ad un particolare sostituente deriva da tutta una serie di effetti tra i quali si possono ricordare l'effetto induttivo, l'effetto di risonanza, l'effetto di impedimento sterico, l'effetto di polarizzabilità e l'effetto del solvente, per cui è poco probabile ottenere risultati confrontabili con l'esperienza, qualora si considerino qualitativamente solo alcuni di questi effetti.

(6) R. S. MULLIKEN, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 811 (1952).
(7) S. D. ROSS, M. BASSIN, I. KUNTZ, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 4176 (1954).

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione e purificazione dei composti.

s–trinitrobenzolo: il prodotto commerciale è stato purificato per ripetute cristallizzazioni da acido acetico glaciale P. f. 121° C.

o–cloroanilina e *m*–cloroanilina: i prodotti puri per analisi sono stati ridistillati due volte, ottenendo liquidi perfettamente incolori.

p–cloroanilina: è stata purificata per doppia cristallizzazione da alcool metilico P. f. 71–72° C.

α–naftilammina: il prodotto commerciale è stato purificato per ripetute cristallizzazione da etere di petrolio P. f. 49,5° C.

β–naftilammina: è stata purificata per ripetute cristallizzazioni da alcool metilico P. f. 110° C.

Cloronaftilammine: per la loro preparazione e le loro caratteristiche si rimanda al lavoro di Simonetta e Carrà [1].

Misure spettrofotometriche.

Sono state effettuate con uno spettrofotometro a quarzo Beckman modello DU, impiegando una lampada a tungsteno ed esplorando le lunghezze d'onda comprese tra 4000 e 5000 Å. Le vaschette usate dello spessore di 1 cm erano di Corex ed il solvente impiegato alcool assoluto puro per analisi.

Venivano preparate due soluzioni rispettivamente di *s*–trinitrobenzolo e di ammina; si prelevano, mescolandoli, alcuni cubici delle due soluzioni a seconda dei rapporti desiderati e si portava a volume con solvente puro.

Per ogni sostanza indagata sono state eseguite misure spettrofotometriche su almeno sei diversi rapporti di concentrazione di reattivi; poiché la costante di associazione del complesso dipende dalla temperatura, per ogni gruppo di misure è stata indicata la temperatura delle soluzioni, controllando che tra l'inizio delle letture e la fine ci fosse una variazione inferiore al grado. I coefficienti di estinzione del donatore e dell'accettore sono stati determinati alle diverse lunghezze d'onda dalla misura della densità ottica delle soluzioni di partenza, applicando la solita relazione $\varepsilon = D/cl$.

A titolo di esempio nella Tabella I vengono riportate le misure effettuate nel caso del complesso trinitrobenzolo *m*–cloroanilina, su sei diverse coppie di concentrazione dei reagenti.

Dai dati riportati in Tabella I e da quelli analoghi ottenuti con le altre ammine, applicando il metodo descritto nella parte generale, si ottengono alle diverse lunghezze d'onda per le costanti di associazione i valori riportati nelle Tabelle II e III espressi in litri/mole. Per l'anilina e la *p*–cloroanilina nelle stesse condizioni sperimentali Ross [7] ha ottenuto rispettivamente 0,397 e 0,350 litri/mole a 25° C.

TABELLA I.

($t = 21\,°C$)

$\lambda\,(m\mu)$	Densità ottica					
	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*e*)	(*f*)
480	0,155	0,133	0,177	0,308	0,460	0,536
470	0,195	0,165	0,220	0,381	0,577	0,665
460	0,237	0,201	0,267	0,462	0,697	0,805
450	0,282	0,238	0,319	0,550	0,820	0,950
440	0,319	0,269	0,360	0,625	0,940	1,093
420	0,400	0,347	0,456	0,780	1,178	1,350
A_o moli/*l*	0,00764	0,01203	0,01146	0,01283	0,02246	0,01925
D_o moli/*l*	0,08962	0,04705	0,06721	0,11292	0,09410	0,13174

A_o = concentrazione iniziale *s*–trinitrobenzolo.
D_o = concentrazione iniziale *m*–cloroanilina.

TABELLA II.

$\lambda\,(m\mu)$	*o*–cloroanilina	*m*–cloroanilina	*p*–cloroanilina
480	—	1,454	—
470	0,7599	1,390	0,1470
460	0,5106	1,540	0,2180
450	0,6721	1,531	0,3143
440	0,5858	1,261	0,3777
420	0,7265	1,260	0,5605
400	0,4664	—	0,4929
media	0,621	1,406	0,352
temper. in °C	19,5	21	21,5

TABELLA III.

λ ($m\mu$)	α–naftilammina	β–naftilammina	1 Cl–2 naftilammina	2 Cl–1 naftilammina	3 Cl–1 naftilammina	4 Cl–1 naftilammina
510	—	—	—	—	—	2,779
500	33,733	4,758	3,478	14,573	1,186	2,450
490	29,535	—	—	—	1,206	0,892
480	33,066	6,246	4,089	12,431	1,424	2,880
470	30,008	—	—	—	0,788	1,786
460	29,429	5,185	3,707	11,415	—	1,963
450	32,781	4,626	4,157	9,998	0,745	—
440	30,587	4,384	4,792	10,659	0,931	—
430	—	4,915	—	—	1,048	—
420	—	4,928	5,480	10,503	0,790	—
media	31,305	5,006	4,284	11,596	1,015	2,129
temper. in °C	19,5	21	23,5	23,5	17	19

La validità del metodo che, come detto nella parte generale, presuppone che $[A] \cong [A_o]$, $[D] \cong [D_o]$ e $[A_o + D_o] \gg [AD]$ è stata verificata per alcuni casi, valutando dai valori delle costanti di associazione delle Tabelle II e III le effettive concentrazioni all'equilibrio e ripetendo l'intero procedimento di calcolo. Si sono avuti al massimo scarti dello 0,7–0,8 % nei valori di R/d_{AD} ed S; un procedimento iterativo non è perciò giustificabile, in quanto porterebbe a delle correzioni di gran lunga inferiori alla precisione delle misure sperimentali ed all'incertezza del calcolo delle costanti di associazione.

Chimica. — *Influenza della temperatura e del tempo di riscaldamento sulle proprietà selettive del fosfato di zirconio impiegato quale scambiatore* (*). Nota di GIULIO ALBERTI e ARMINIO CONTE, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

In una precedente Nota [1] avevamo riferito su alcune esperienze preliminari riguardanti l'effetto del riscaldamento, a varie temperature, sul potere selettivo del fosfato di zirconio impiegato quale scambiatore.

In queste esperienze si fissavano dapprima, a temperatura ambiente, alcuni cationi su fosfato di zirconio, e successivamente si riscaldava a temperatura crescente tale scambiatore con gli ioni fissati. Si era notato che tale trattamento termico aumentava selettivamente la resistenza all'eluizione di alcuni cationi precedentemente fissati.

Abbiamo proseguito tali ricerche, ampliandó il campo delle temperature e del tempo di riscaldamento già studiato ed abbiamo osservato l'effetto di tali parametri sul potere selettivo del fosfato di zirconio. Tale potere selettivo, studiato particolarmente per il cesio, è stato determinato riscaldando dapprima il fosfato di zirconio e poi fissando ed eluendo i cationi a temperatura ambiente.

Nella presente nota si comunicano i risultati di queste ulteriori ricerche.

PARTE SPERIMENTALE.

Il fosfato di zirconio è stato preparato secondo il metodo indicato da I. e O. Gal [2].

Varie frazioni di tale scambiatore sono state trattate per tempi variabili a diverse temperature (110°–180°–200°–260°–300° C).

Dopo il trattamento termico, quantità di 0,5 g di ciascuna frazione sono state poste in colonnine di vetro (ø 0,6 cm). Su ogni colonnina sono stati fissati 0,025 meq di cesio marcato. Il cesio veniva poi eluito con HCl 2 N.

Abbiamo così ottenuto una serie di curve di eluizione per ciascuna temperatura, di cui, come esempio, riportiamo quelle a 200° e 260° C (fig. 1) e 300° C (fig. 2 A).

Dalle curve ottenute è risultato che, coll'aumentare della temperatura di essiccamento del fosfato di zirconio, aumenta la resistenza del cesio alla eluizione. Inoltre da tali curve si vede che, coll'aumentare del tempo di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale ed Inorganica – Laboratorio Chimico della Divisione Geomineraria del C.N.R.N. – Roma.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

riscaldamento, per una certa temperatura, si ha dapprima un'aumento e poi una diminuizione della resistenza del cesio all'eluizione con acido cloridrico.

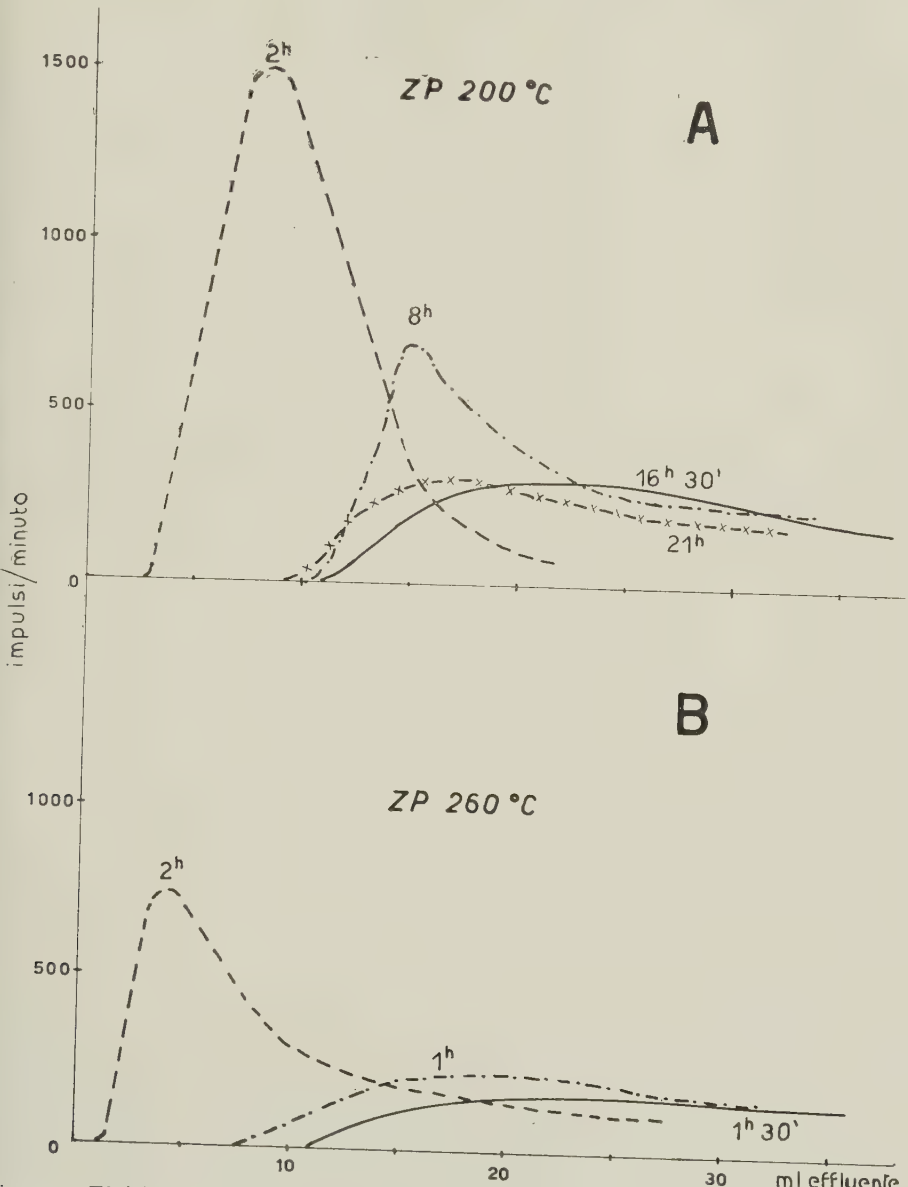


Fig. 1. – Eluizione con HCl 2 N di 0,025 meq. di Cs^+ fissato su 0,5 g di ZP riscaldato a 200° C (A) ed a 260° C (B) per tempi variabili.

Velocità di flusso: 0,8 cm/min.

La diminuita resistenza del cesio all'eluizione è da porsi in relazione alla minore capacità di scambio del fosfato di zirconio trattato termicamente.

Infatti è stata controllata la variazione del peso e della capacità di scambio al variare della temperatura e del tempo di riscaldamento.

È stato notato che la capacità di scambio diminuisce oltre che con la temperatura [3], [4], anche al crescere del tempo di riscaldamento.

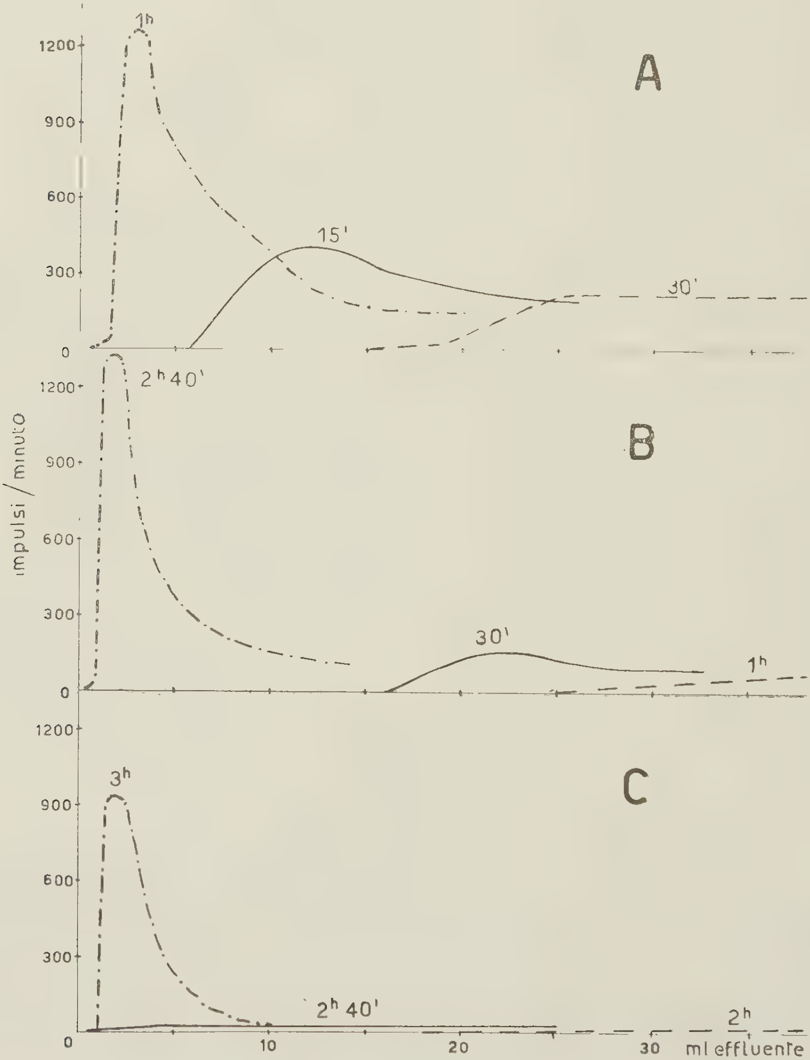


Fig. 2. – Eluizione con HCl 2 N di quantità variabili di Cs^+ fissato su 0,5 g di ZP riscaldato per diversi tempi a 300° C.

A) 0,025 meq. B) 0,0125 meq. C) 0,0062 meq.

Velocità di flusso: 0,8 cm/min.

Per basse temperature o per brevi tempi di riscaldamento, la diminuizione in peso può compensare la diminuita capacità totale di scambio, in modo che la capacità specifica risulti la stessa o addirittura aumentata rispetto a quella iniziale. Per lunghi riscaldamenti ad alta temperatura si ha invece una progressiva diminuizione della capacità specifica di scambio.

Era quindi da aspettarsi che, allorquando la quantità di cesio fissata fosse dello stesso ordine di grandezza della capacità di scambio, diminuisse la resistenza del cesio all'eluizione.

In fig. 2 vengono riportate le curve di eluizione per quantità decrescenti di cesio, fissate su fosfato di zirconio. Da tali curve si può vedere che la diminuizione della resistenza del cesio all'eluizione inizia a temperature tanto più alte e a tempi di riscaldamento tanto più lunghi, quanto minore è la quantità di cesio fissata su fosfato di zirconio. Ciò dimostra che, per le temperature ed i tempi di riscaldamento studiati, si ha un progressivo aumento nella selettività del fosfato di zirconio per il cesio, al crescere di tali parametri.

SEPARAZIONE CESIO-STRONZIO.

Le curve di eluizione dello stronzio, fissato su campioni di fosfato di zirconio, trattato a diverse temperature ed a vari tempi di riscaldamento, in modo analogo a quello già descritto per l'eluizione del cesio, hanno

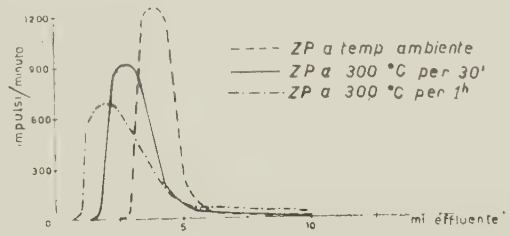


Fig. 3. – Eluizione con HCl 0,5 N di 0,025 meq. di Sr^{++} fissato su 0,5 g di ZP.
Velocità di flusso: 0,8 cm/min.

mostrato che il fosfato di zirconio, trattato termicamente, modifica poco la sua selettività verso tale elemento. Come esempio si riportano le curve di eluizione dello stronzio fissato su fosfato di zirconio trattato per tempi diversi a 300° C (fig. 3).

L'eluizione iniziale dello ione Sr^{++} è addirittura favorita dalla diminuita capacità di scambio del fosfato di zirconio.

Il trattamento termico del fosfato di zirconio doveva perciò favorire la separazione Cs^{+}—Sr^{++}. Le prove sperimentali effettuate hanno confermato tali previsioni.

In fig. 4 A si riporta la separazione di 0,025 meq di Sr^{++} da 0,025 meq di Cs^{+} su 0,5 g di fosfato di zirconio non trattato termicamente.

Dato l'elevato carico di ioni fissati la separazione non è possibile. La fig. 4 B mostra invece la stessa separazione su fosfato di zirconio trattato a 260° C per $1^h\,15'$.

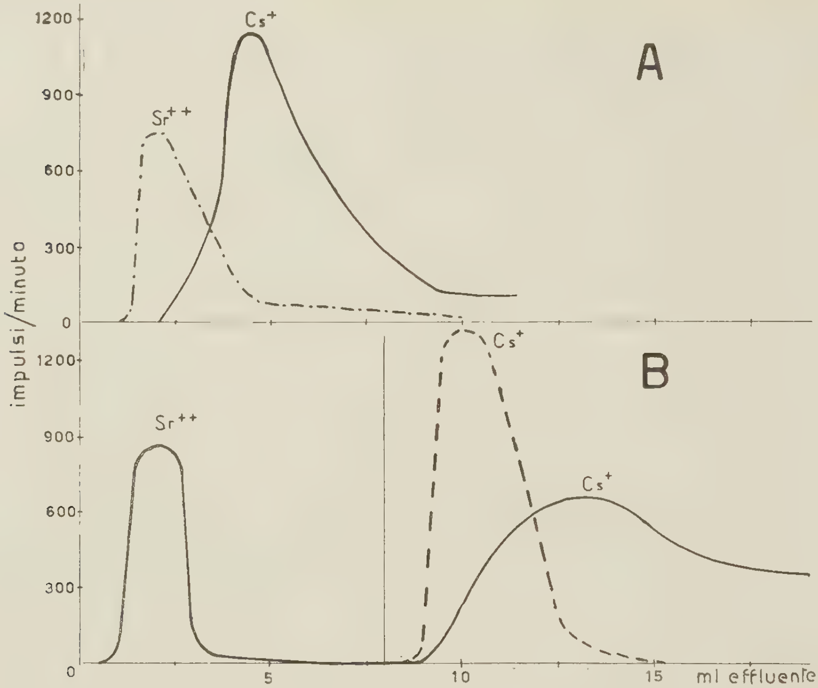


Fig. 4. – Separazione di 0,025 meq. di Sr^{++} da 0,025 meq. di Cs^{+}.

A) Su 0,5 g di ZP non trattato termicamente
B) Su 0,5 g di ZP trattato a 260°C per 1h 15′
——— Eluizione con HCl 2 N
– – – Eluizione con NH_4Cl 5 N – HCl 1 N
Velocità di flusso: 0,8 cm/min.

Si vede che, con fosfato di zirconio trattato termicamente, tale separazione viene enormemente facilitata. Si è avuta cioè la possibilità di separare quantità relativamente grandi dei due elementi su un campione di fosfato di zirconio avente addirittura una capacità di scambio più bassa.

Conclusioni.

Il riscaldamento del fosfato di zirconio modifica le proprietà selettive di tale scambiatore; tale modificazione permane anche dopo successive rigenerazioni dello scambiatore stesso.

Mediante riscaldamento a moderate temperature è possibile ottenere campioni di fosfato di zirconio coi quali si possono effettuare migliori separazioni, anche per soluzioni concentrate, di quelle possibili su fosfato di zirconio non trattato termicamente.

Per trattamenti ad alta temperatura, diminuisce fortemente la capacità di scambio; rimane sempre la possibilità di applicazioni nella separazione di miscele ad elevate diluizioni.

Ringraziamo il prof. V. Caglioti per averci seguito e consigliato durante lo svolgimento del presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. ALBERTI, A. CONTE, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. XXVI, fasc. 6 – giugno 1959.

[2] IVAN J. GAL e OLGA S. GAL, Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, A/Conf. 15/P/468 (1958).

[3] K. A. KRAUSS, H. O. PHILLIPS, T. A. CARLSON e J. S. JOHNSON, Ibid., A/Conf. 15/P/1832 (1958).

[4] C. B. AMPHLETT, L. A. MC DONALD and M. J. REDMAN, « J. Inorg. Nucl. Chem. », *6*, 220 (1958).

Chimica inorganica. — *Reazioni degli alogenuri di palladio(II) con i derivati acetilenici* (*). Nota preliminare di Lamberto Malatesta, Giuseppina Santarella, Lidia Vallarino, Franco Zingales, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

L'esistenza di composti di coordinazione stabili del ciclobutadiene con alcuni metalli, prevista in base a considerazioni teoriche da Longuet Higgins e Orgel [1], fu confermata recentemente da Criegee e Schröder [2] che prepararono il dicloro(tetrametilciclobutadiene)nichel. Poiché i sunnominati Autori avevano fatto l'ipotesi che la formazione di aldeide butirrica, che ha luogo quando l'acetilene reagisce con una soluzione di cloruro palladoso, avvenisse attraverso un composto intermedio di coordinazione del palladio con il ciclobutadiene, considerammo interessante lo studio della reazione tra il cloruro palladoso e gli acetileni, allo scopo precipuo di isolare ed identificare i prodotti primari di reazione.

Per ora abbiamo studiato la reazione del cloruro di palladio(II) con alcuni derivati mono– e bisostituiti dell'acetilene, cioè con il fenil–, il difenil–, il metilfenil– e l'etilfenilacetilene. I risultati ottenuti variano in dipendenza del tipo di derivato acetilenico usato e sono altresì influenzati dalle condizioni di reazione, cioè la concentrazione, il rapporto tra i reagenti e l'acidità del mezzo.

Il difenilacetilene, $C_{14}H_{10}$, in soluzione etilalcoolica neutra o debolmente acida, dà una miscela costituita da una sostanza organica identificata come esafenilbenzolo $(C_{14}H_{10})_3$ e da un derivato del palladio contenente due gruppi $C_{14}H_{10}$, un gruppo etossilico ed un atomo di cloro: $Pd(C_{14}H_{19})_2(OC_2H_5)Cl$ (I). Per azione degli acidi alogenidrici I viene trasformato in:

$$Pd(C_{14}H_{10})_2X_2 \quad (II)$$

dove X può essere cloro, bromo, iodio. D'altra parte questa reazione può essere invertita e l'etossicomposto riottenuto, per trattamento di II con alcali in soluzione etilalcoolica:

$$Pd(C_{14}H_{10})_2X_2 + C_2H_5OH + OH^- \rightleftarrows Pd(C_{14}H_{10})_2(OC_2H_5)X + X^- + H_2O.$$

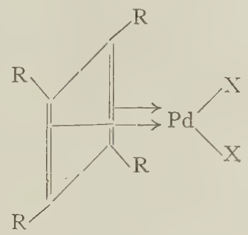
In questi composti I e II, il difenilacetilene non è più presente come tale. Ciò è provato dallo spettro I.R. e dal fatto che esso non può essere riottenuto in alcun modo.

Benché la scarsa solubilità dei composti I e II ne abbia impedito la determinazione del peso molecolare, tenendo conto che la sostanza organica

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Milano, con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

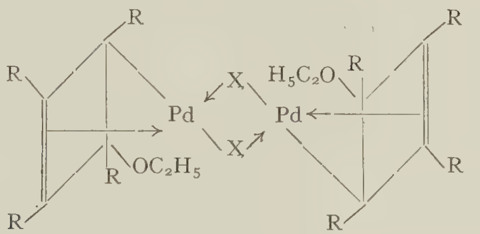
che si può ottenere per scissione da I e da II è un dimero del difenilacetilene, crediamo di poter proporre per il composto II la seguente formula contenente un anello ciclobutadienico:



R = fenil

II

Al composto I, in analogia ai derivati degli alogenuri di platino(II) e di palladio(II) con le diolefine chelanti, descritte da Hofmann e von Narbutt [3] ed interpretati da Chatt e collaboratori [4], attribuiamo la seguente formula:



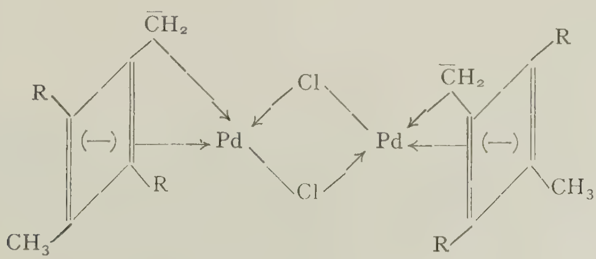
R = fenil

I

Il metil- e l'etilfenilacetilene reagiscono con il cloruro di palladio in soluzione metilica formando almeno tre composti diversi contenenti palladio, di cui sinora abbiamo isolato due composti puri, di formula bruta $(PdL_2Cl)_2$ (III) e PdL_4Cl (IV) in cui L rappresenta una molecola dell'acetilene bisostituito.

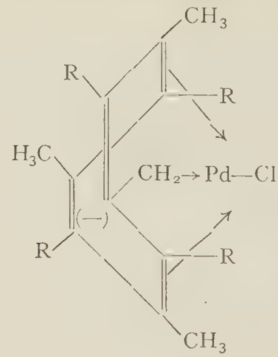
I composti del tipo III sono dimeri in soluzione, quelli del tipo IV monomeri, ambedue sono diamagnetici. In ambedue i composti l'acetilene è presente in forma polimerizzata, come dimostra lo spettro I.R. e il fatto che il prodotto organico che si ottiene da III è un dimero di L e il composto che si ottiene da IV è un tetramero.

Per i composti III e IV proponiamo le seguenti formule:



R = fenil

III

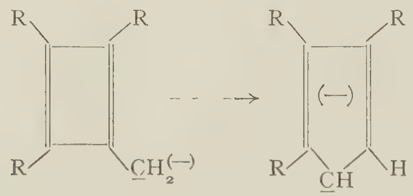


IV

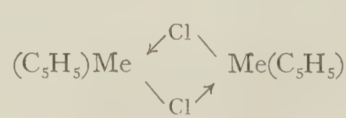
R = fenil

Queste formule sono molto simili a quelle proposte recentemente da Hüttel e Kratzer [5] per il composto di formula $Pd(C_3H_5)Cl$ ottenuto da $PdCl_2$ ed isopropilene.

Se queste formule potranno essere confermate, apparirà che la stabilità degli anioni degli idrocarburi insaturi nei composti coordinativi, per mezzo di legami π, è un fenomeno molto più comune di quanto non lo si sia sinora pensato. La differenza essenziale tra le strutture tipo ciclopentadienilico sinora note e quella qui proposta, sta nel fatto che l'atomo di carbonio che è deprotonato appartiene alla catena laterale e non fa parte del sistema anellare a doppi legami coniugati. D'altra parte non può essere escluso che questi composti siano dei veri ciclopentadienili, se un anello pentaatomico si è formato durante la polimerizzazione o per allargamento dell'anello del ciclobutadiene



Questa alternativa deve essere considerata perché sono noti composti pentadienilici del tipo [6]:

$(C_5H_5)Me^{II}Cl$ o 

ma ci sembra meno probabile perché non vale per i composti di tipo IV.

Benché la struttura di questi derivati organici del palladio sia tuttora ipotetica, è certo che il cloruro di palladio è un catalizzatore per la dimerizzazione e la polimerizzazione degli acetileni, capace altresì di dare composti di coordinazione stabili con i prodotti della polimerizzazione.

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. C. LONGUET HIGGINS and L. E. ORGEL, « J.C.S. », 1969 (1956).
[2] R. CRIEGEE and G. SCHRÖDER, « Ang. Chem. », *71*, 70 (1959); « Lieb. Ann. », *623*, 1 (1959).
[3] HOFMANN and VON NARBUTT, « Ber. », *41*, 1625 (1908).
[4] J. CHATT, L. M. VALLARINO and L. VENANZI, « J. C. S. », 2496 (1957); idem, 3493 (1957).
[5] R. HÜTTEL and J. KRATZER, « Ang. Chem. », *71*, 456 (1959).
[6] J. SMIDT and R. JIRA, « Ang. Chem. », *71*, 651 (1959).

Enzimologia. — *Sulla struttura di un nuovo co-enzima trans-idrossilasico isolato da residui cellulari di* Acetobacter aceti [(*)]. Nota di Claudio Antoniani e Gian Antonio Lanzani, presentata [(**)] dal Socio F. Giordani.

In *Acetobacter aceti* abbiamo studiato un co-enzima ossidativo direttamente collegato ad azione anti-tumorale sulle cellule di Ehrlich [1], [2], [3]. Siamo attualmente pervenuti alla cristallizzazione del co-enzima stesso, in stato di purezza.

Parte Sperimentale.

Purificazione.

La soluzione acquosa contenente il co-enzima, ottenuta secondo metodo già descritto [2], venne cromatografata su colonna di allumina acida attivata Merck. Eluente: acetone-cloroformio-HCl conc. (75 : 25 : 1 in vol.).

L'eluzione portò alle seguenti frazioni:

a) Frazione rossa. Presenza di un pigmento e di una serie di aminoacidi.
b) Frazione incolora. Verde fluorescente alla luce ultravioletta.
c) Frazione incolora. Azzurra alla luce ultravioletta.
d) Frazione rossa. Insensibile all'ultravioletto.

Dalle frazioni *b*) e *c*), per concentrazione sotto vuoto, venne cristallizzato il co-enzima in stato di purezza.

Determinazione del COOH.

5 mg di sostanza trattati con $SOCl_2$ goccia a goccia. Successiva evaporazione a secco. Addizione di due gocce di soluzione satura alcolica di NH_2OH; successiva addizione di NaOH alcolica sino ad alcalinità incipiente. Leggero riscaldamento per formazione di acido idrossamico. Successiva lieve acidificazione con HCl 0,5 *n*. Aggiunta di $FeCl_3$ 1 °/₀. Comparsa color violetto.

Determinazione del gruppo enolico. (*Saggio di Mayer*).

Trattamento di mg 20 di sostanza con acqua di bromo in eccesso, eliminazione dell'eccesso di Br_2 mediante aggiunta di acido solfosalicilico sino a decolorazione. Successiva titolazione jodometrica del gruppo enolico.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Chimica e Microbiologia delle Fermentazioni del C.N.R., Sez. Chimica, Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

Ossidazione con $KMnO_4$.

150 mg di sostanza vengono sciolti in 20 ml di H_2O. Aggiustamento di pH = 8,0. Lenta, graduale aggiunta di 0,600 mg di $KMmO_4$ + 20 ml di H_2O, accompagnata da raffreddamento esterno con ghiaccio. Successivo riscaldamento a 50° C della miscela reagente sotto agitazione per 15′. Raffreddamento e separazione di MnO_2 per filtrazione.

La soluzione limpida viene addizionata di 5 ml di acido acetico glaciale, di 10 ml di $BaCl_2$ 5 °/₀, di volume uguale di alcol etilico: formazione di precipitato bianco, di cui si dosa il contenuto in bario.

Ottenimento del metilderivato.

200 mg di sostanza vengono sospesi in etere; ad essi viene cautamente aggiunta una soluzione eterea di diazometano, sino a decolorazione della soluzione gialla del diazometano stesso (per eccesso di diazometano si ha demolizione del metilderivato).

Formazione di fiocchi bianchi. Centrifugazione e ripetuti lavaggi con etere. Essiccamento finale *sotto vuoto d'azoto.*

Spettri I. R.

Ottenuti dalla sostanza ricristallizzata 3 volte e liofilizzata in soluzione di KBr.

Elettroforesi.

Su strisce di carta Whatman n. 1. · 160 Volta per 6 ore · 10 mg di sostanza sciolti in 0,05 ml di H_2O distillata.

Soluzione elettroforetica 1): acido acetico 0,05 *n*; acetato sodico 0,01 *n*; NaCl 0,01 M; pH 3,7.

Soluzione elettroforetica 2): tetraborato sodico 0,01 *n*.

Formazione di un complesso con Fe^{+++}.

0,5 ml di soluzione contenente 1 μ mole di sostanza più 3 ml di tampone acetato 0,1 M (pH 4,5)+0,15 ml di soluzione contenente 1 μ mole di $FeCl_3$.

La soluzione si colora in rosso con un massimo a 470 mμ.

RISULTATI.

Il co-enzima, allo stato di purezza, presenta un punto di fusione di 184° C.

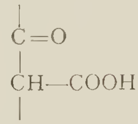
Analisi elementare: C 40,2; H 5,2.

Peso molecolare: alla canfora ∼180.

Calcolabile, dai dati di cui sopra, una formula $C_6H_{10}O_6$ (C 40,4; H 5,6; P.M. 178). Trattasi di una sostanza acida (pK 4,2). Sono richiesti per la neu-

tralizzazione 1,5 eq. di NaOH/mole. Contiene —COOH. È presente un gruppo enolico. Misurabile con saggio di Mayer una enolizzazione pari al 18 °/₀.

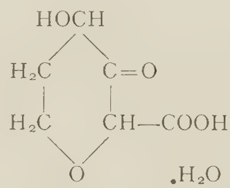
I dati di titolazione con NaOH sono in accordo con la presenza nella molecola di un —COOH (1 eq.) e di un =COH (1/2 eq. per enolizzazione incompleta). Lo spettro IR conferma la presenza di un C=O carbossilico e di C=O chetonico. Non si ha formazione di fenilidrazone; il C=O chetonico può quindi esser ritenuto in β al —COOH. Questo fatto è confermato dalla presenza del gruppo enolico dovuta all'enolizzarsi del C=O β–carbossilico. È pertanto postulabile nella molecola un frammento



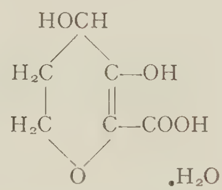
Per ossidazione con $KMnO_4$ a pH 8, si ha formazione di un acido bicarbossilico (sale di Ba insolubile in soluzione idroalcolica). Dal dosaggio del contenuto in Ba si calcola per questo acido un peso molecolare di 150.

Poiché oltre al doppio legame enolico gli IR non denunciano altro doppio legame, è presumibile, per azione del $KMnO_4$ la rottura del doppio legame enolico con l'ossidazione del CH_2OH finale. Ci troveremmo cioè di fronte a una formazione di acido malico; confermata, quest'ultima, dalla reazione colorimetrica (rosso rubino) riscontrata sul sale di bario.

Data la probabilità di esistenza di un anello piranico, la formola più conforme ai dati di cui sopra è la seguente



in equilibrio con la forma enolica:



Anche i dati elettroforetici confermano l'esistenza di questo equilibrio. Infatti la sostanza cristallizzata dà luogo:

nella soluzione elettroforetica 1) a due zone, l'una fluorescente in verde, l'altra in azzurro; e ciò in corrispondenza dei due composti in equilibrio;

nella soluzione elettroforetica 2) – con tetraborato sodico spostante completamente l'equilibrio verso la struttura enolica dato il pH basico che lo caratterizza e la formazione del complesso coi due ossidrili vicinali – ad una zona sola fluorescente in azzurro.

*
* *

Per il nuovo co-enzima da noi isolato dai residui cellulari di *Acetobacter aceti* abbiamo proposto [4] il nome di *Acetobacterossidasi antitumorprotidosintesi*.

Le nostre ricerche sul co-enzima stesso proseguono.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. ANTONIANI, E. CERNUSCHI, G. A. LANZANI, A. PECILE, « La Clinica Ostetrica e Ginecologica », *60*, 225 (1958).
[2] T. YAMAMOTO, G. A. LANZANI, E. CERNUSCHI, « La Clinica Ostetrica e Ginecologica », *61*, 35 (1959).
[3] G. A. LANZANI, A. PECILE, « Nature », in corso di pubblicazione.
[4] C. ANTONIANI, « Vitalstoffe », *15*, 109 (1959).

Fisiologia. — *Inibizione cerebellare delle risposte di unità deitersiane a stimolazioni labirintiche* (*). Nota di OTTAVIO POMPEIANO e EDELWEISS COTTI, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Da esperimenti di ablazione risulta che il cervelletto esercita un'azione inibitrice sui riflessi tonici labirintici [letteratura in Batini, Moruzzi e Pompeiano [1]]. Ricerche recenti hanno dimostrato che l'attività spontanea di singole unità del nucleo di Deiters può essere inibita dalla polarizzazione anodica della corteccia cerebellare vermiana del *lobus anterior* [De Vito, Brusa e Arduini [2], Pompeiano e Cotti [3]].

Poiché la scarica di singole unità del nucleo di Deiters può essere conseguenza della polarizzazione catodica del labirinto ipsilaterale, ovvero della stimolazione del labirinto contralaterale, ci siamo chiesti se anche le scariche deitersiane prodotte da stimolazioni afferenti di origine labirintica siano inibite dal cervelletto. Precedenti osservazioni di Baumgarten e Mollica [4] avevano dato evidenza al fatto che la polarizzazione della corteccia cerebellare del *lobus anterior* poteva bloccare la scarica riflessa di singole unità bulbo–reticolari evocata da stimolazioni periferiche.

Le ricerche sono state eseguite in animali decerebrati, seguendo la tecnica descritta da Moruzzi e Pompeiano [5]. I potenziali cellulari del nucleo di Deiters venivano derivati con microelettrodi monopolari rigidi, del diametro di 10–20 μ, guidati da un micromanipolatore montato sull'apparecchio stereotassico di Horsley–Clarke e venivano registrati con un preamplificatore Grass P4 e un oscillografo catodico Du Mont 322 A. La stimolazione della corteccia cerebellare veniva eseguita mediante un eccitatore bipolare concentrico, isolato dovunque fuorché in punta e guidato mediante l'apparecchio stereotassico. Le lamelle corticali del *lobulus centralis* e del *culmen* venivano selettivamente stimolate con un breve treno di impulsi rettangolari di alta frequenza (300/sec, 1 msec), forniti da uno stimolatore elettronico Grass mod. S4B. La posizione dell'elettrodo stimolante è indicata nella fig. 1. La stimolazione labirintica veniva eseguita con corrente galvanica a lento incremento, secondo la tecnica descritta da De Vito, Brusa e Arduini [2]; venivano effettuate esclusivamente stimolazioni catodiche monopolari dei due labirinti. Le ricerche sono state limitate a quelle unità del nucleo di Deiters la cui scarica spontanea era inibita dal cervelletto.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) C. BATINI, G. MORUZZI a. O. POMPEIANO, « Arch. ital. Biol. », XCV, 71 (1957).

(2) R. V. DE VITO, A. BRUSA a. A. ARDUINI, « J. Neurophysiol. », XIX, 241 (1956).

(3) O. POMPEIANO e E. COTTI, « Arch. Sci. biol. », XLIII, 57 (1959).

(4) R. V. BAUMGARTEN u. A. MOLLICA, « Pflügers Arch. », CCLIX, 79 (1954).

(5) G. MORUZZI a. O. POMPEIANO, « Arch. ital. Biol. », XCV, 31 (1957).

1) La polarizzazione catodica del labirinto ipsilaterale o contralaterale, ovvero di entrambi i labirinti, produce in alcuni casi un aumento della frequenza di scarica di singole unità deitersiane [cfr. De Vito, Brusa e Arduini [2], Pompeiano e Cotti [3]]. Questa risposta è caratterizzata da una bassa soglia (0,05–0,7 mA), si manifesta subito all'inizio della stimolazione e persiste per tutta la durata di essa. Alla fine della polarizzazione si osserva una graduale diminuzione della frequenza di scarica, che ritorna così ai valori di riposo; talora un breve silenzio elettrico fa seguito alla caduta

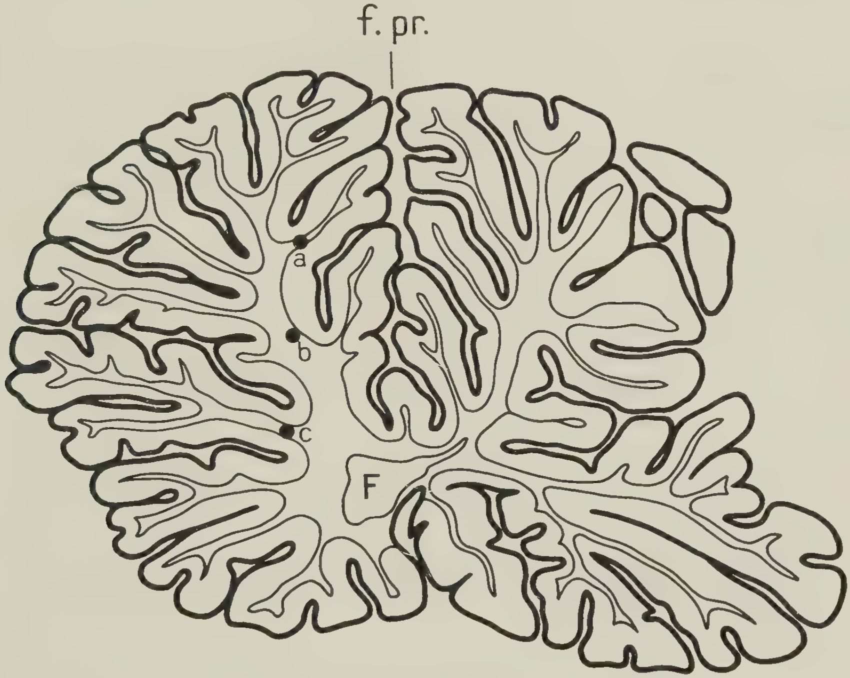


Fig. 1. – Sezione paravermiana sagittale dell'emiverme cerebellare di sinistra indicante i punti stimolati nell'esperimento di cui alla fig. 2 (stesso Gatto).

I punti stimolati sono indicati con le lettere *a*, *b* e *c* e interessano lamelle della corteccia vermiana del *lobus anterior*. F: *nucleus fastigii*; f. pr.: *fissura prima*.

di corrente. Solo per stimolazioni labirintiche di lunga durata l'aumento della frequenza di scarica dell'unità deitersiana diminuisce gradualmente nel corso della stimolazione, probabilmente a causa dell'adattamento dei recettori labirintici alla corrente polarizzante.

2) La stimolazione (0,5–2 V) stereotassica della corteccia vermiana del *lobus anterior*, ipsilateralmente al lato della registrazione, è in grado di bloccare le risposte deitersiane alla polarizzazione del labirinto ipsilaterale (fig. 2). Per gli stessi voltaggi di stimolazione, il blocco cerebellare si esercita anche su quelle unità la cui scarica veniva evocata o intensificata dalla stimolazione del labirinto contralaterale: quest'azione di blocco persiste per tutta la durata della stimolazione cerebellare. Per stimolazioni cerebellari

con impulsi del voltaggio sopra indicato vengono completamente bloccate le scariche evocate, per via riflessa, da polarizzazioni labirintiche di intensità variabile fino a 0,5–1,3 mA. Per stimoli labirintici di intensità superiore, la stimolazione del cervelletto (sempre con 0,5–2 V) produce una diminuzione di frequenza della scarica evocata, ma non un blocco completo, che si può ottenere soltanto aumentando leggermente il voltaggio della corrente applicata al cervelletto.

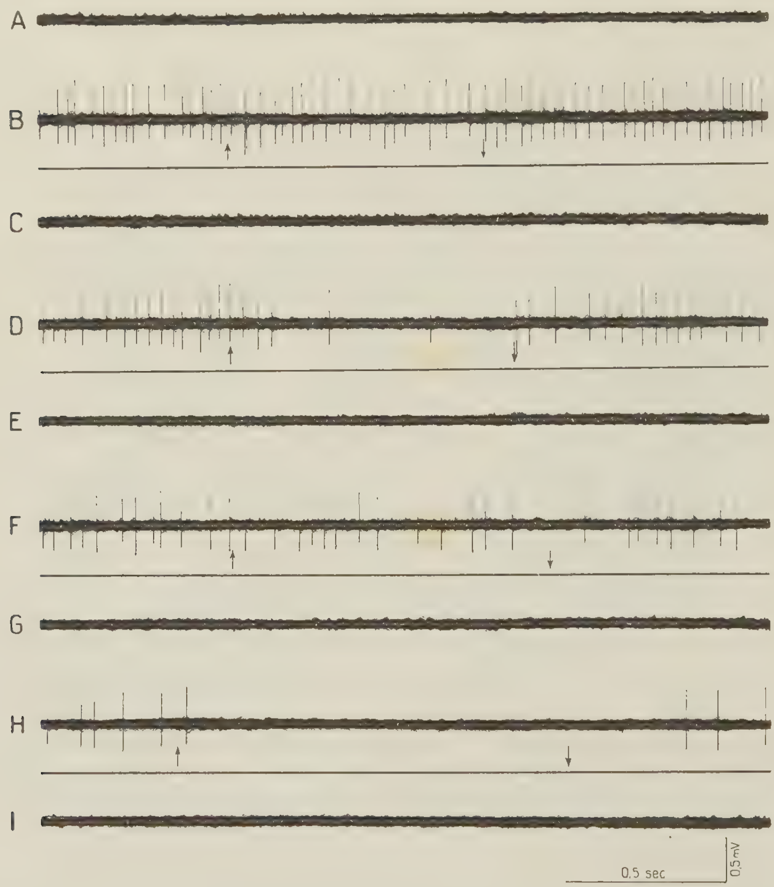


Fig. 2. – Effetti della stimolazione stereotassica, ripetitiva, del cervelletto, sull'attività deitersiana evocata dalla polarizzazione del labirinto ipsilaterale.

Animale decerebrato e curarizzato. Registrazioni dal nucleo di Deiters di sinistra. A: assenza dell'attività spontanea di unità deitersiane; B: la stimolazione stereotassica cerebellare (300/sec; 1 msec; 0,8 V), in corrispondenza del punto *a* (fig. 1), non produce alcun effetto sull'attività deitersiana, evocata dalla polarizzazione catodica del labirinto ipsilaterale (0,3 mA); in questo tracciato, come pure nei tracciati che seguono, la linea in basso indica la durata della stimolazione labirintica, le frecce indicano l'inizio (↑) e la fine (↓) della stimolazione cerebellare; C: controllo dopo la stimolazione labirintica; D: la stimolazione cerebellare in corrispondenza del punto *b* (fig. 1), con gli stessi parametri (0,8 V), blocca l'attività deitersiana, evocata dalla polarizzazione del labirinto ipsilaterale (0,3 mA); E: controllo dopo la stimolazione labirintica; F: la stimolazione cerebellare in corrispondenza del punto *c* (fig. 1), con gli stessi parametri (0,8 V), non produce alcun effetto sull'attività deitersiana, evocata dalla polarizzazione del labirinto ipsilaterale (0,3 mA); G: controllo dopo la stimolazione labirintica; H: la stimolazione cerebellare in corrispondenza del punto *b* (fig. 1), con gli stessi parametri (0,8 V), riproduce di nuovo il blocco dell'attività deitersiana, evocata dalla polarizzazione del labirinto ipsilaterale (0,3 mA); I: controllo dopo la stimolazione.

3) Nei casi in cui la soglia di stimolazione cerebellare è alquanto bassa, il blocco delle risposte deitersiane a stimoli labirintici si può ottenere stimolando elettivamente alcune lamelle soltanto dell'emiverme ipsilaterale del *lobus anterior*, mentre le rimanenti risultano inefficaci (fig. 2). Questi dati sono una conferma dell'esistenza di rapporti localizzati cerebello-deitersiani [Pompeiano e Cotti [3]]. Solo usando stimoli di più elevato voltaggio, si osservano risposte alla stimolazione di tutte le lamelle vermiane del *lobus anterior*, probabilmente per diffusione fisica di corrente. I risultati ottenuti sono stati confermati anche dopo curarizzazione, prodotta mediante cloridrato di tubocurarina nella dose di 0,5 mg/kg per via intravenosa, essendo l'animale soccorso con la respirazione artificiale.

Si conclude che il cervelletto può esercitare la propria influenza inibitrice non soltanto sull'attività spontanea di singole unità deitersiane, ma anche su quella evocata per via riflessa da stimoli labirintici.

Fisiologia. — *Modificazioni della responsività del sistema piramidale prodotte da uno stimolo acustico* [*]. Nota di PIER LUIGI PARMEGGIANI e FRANCO PERISSINOTTO, presentata [**] dal Socio G. C. PUPILLI.

In esperimenti sul Gatto cloralosato Wall, Rémond e Dobson [1] hanno osservato che uno stimolo luminoso o la stimolazione elettrica del corpo genicolato laterale determina un aumento di responsività dell'area motrice, a cui si può dare evidenza stimolando elettricamente l'area stessa a pause crescenti dallo stimolo *test* (*flash* di 2 msec di durata). Il potenziamento della risposta piramidale compare per stimolazioni elettriche dell'area motrice effettuate da 25 a 90 msec dopo il *flash*: in un numero variabile di casi segue una fase di depressione, la cui durata complessiva è di 35 msec. Tali effetti sono indipendenti dalla integrità dell'area striata e delle aree visive di associazione, come anche del *colliculus anterior*, mentre sono aboliti da una lesione prodotta nella regione pretettale.

La luce non è il solo stimolo che può provocare una simile modificazione della responsività della corteccia motrice, che pertanto si può ottenere anche mediante la stimolazione del nervo femoro–cutaneo [Wall *et alii* [1]]; e d'altra parte Adrian e Moruzzi [2] hanno osservato, nel Gatto narcotizzato con Dial o Evipan o cloralosio, un aumento dell'attività unitaria piramidale per stimolazioni periferiche (pizzicamento o toccamento di una zampa). Calma e Arduini [3] hanno confermato, nel Gatto non narcotizzato, le ricerche di questi ultimi Autori; per altro, impiegando stimoli acustici e visivi, hanno concluso che non è possibile stabilire quale precisa relazione intercorra tra le stimolazioni effettuate e l'attività piramidale.

Dalle ricerche più recenti di Brookhart e Zanchetti [4] risulta che nel Gatto la stimolazione ripetitiva dei nuclei di proiezione specifica del talamo provoca un aumento della responsività della corteccia motrice alla stimolazione elettrica, per una durata che va da 6 a 25 msec dopo l'ultimo stimolo applicato in sede talamica; segue a partire da 45 msec, una fase di depressione di durata variabile. La stimolazione dei nuclei talamici appartenenti al sistema cosiddetto di proiezione diffusa, secondo questi Autori, non sembra invece modificare la responsività dell'area motrice.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) P. D. WALL, A. G. RÉMOND a. R. L. DOBSON, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 385 (1953).

(2) E. D. ADRIAN a. G. MORUZZI, « J. Physiol. », XCVII, 153 (1939–40).

(3) I. CALMA a. A. ARDUINI, «J. Neurophysiol. », XVII, 321 (1954).

(4) J. M. BROOKHART a. A. ZANCHETTI, « EEG clin. Neurophysiol. », VIII, 427 (1956).

A fine di studiare nel Gatto gli effetti di un *click* sulla responsività della corteccia motrice, nelle presenti ricerche abbiamo registrato la risposta piramidale evocata da stimolazioni del giro sigmoideo che a durate crescenti seguivano un *click*.

Gli animali, 3 ore avanti l'inizio delle registrazioni, erano narcotizzati con etere e sottoposti all'intervento, mediante il quale si provvedeva a mettere allo scoperto il giro sigmoideo di entrambi i lati e le piramidi. Dissipati gli effetti del narcotico, l'animale veniva sottoposto a curarizzazione (0,3 mg/kg di *d*–tubocurarina o 5 mg/kg di Sincurarina) e soccorso con la respirazione artificiale.

I potenziali a livello di una delle piramidi erano derivati col metodo monopolare. L'elettrodo critico veniva infisso (0,2–1 mm di profondità) nella piramide ed era costituito da un filo di rame del diametro di 100 μ ricoperto di vernice isolante, salvo che per un tratto di circa 0,5 mm in prossimità della punta. Come elettrodo indifferente era utilizzato un filo di argento clorurato del diametro di 500 μ, la cui estremità libera in forma di sfera aveva il diametro di circa 1 mm: veniva posto sulla superficie cauterizzata del muscolo temporale. Gli elettrodi di derivazione erano collegati con un preamplificatore Grass P4 e quindi con un oscillografo catodico (Du Mont, mod. 322A).

Per la stimolazione del giro sigmoideo abbiamo impiegato eccitatori dipolari, costituiti da fili di argento del diametro di 70 μ, con le estremità fissate alla distanza di 2–3 mm, arrotondate alla fiamma e clorurate. Gli stimoli elettrici erano singoli impulsi rettangolari, la cui durata era costantemente di 0,1 msec e di cui veniva fatto variare il voltaggio: essi erano forniti da uno stimolatore Grass mod. S4B e giungevano al preparato attraverso un dispositivo (*stimulus isolation unit*) atto a ridurre l'artefatto.

La stimolazione acustica era effettuata mediante *clicks* prodotti dalla entrata di impulsi rettangolari, di voltaggio (8 V) e durata (0,2 msec) costanti, in un diffusore dinamico. La stimolazione era biaurale e il diffusore dinamico era posto a 1 m dal capo dell'animale; l'artefatto veniva iscritto sul tracciato mediante collegamento diretto del generatore di impulsi con l'oscillografo. Con l'uso di tale disposizione, il tempo di comparsa dell'artefatto sul tracciato non corrisponde al tempo di applicazione dello stimolo: essendo gli esperimenti eseguiti in ambiente alla temperatura media di 25° C ed avendo il suono a questa temperatura la velocità di 348,2 m/sec, l'applicazione dello stimolo avviene 2,87 msec dopo la comparsa dell'artefatto [5].

(5) Abbiamo fatto uso della formula $u_t = 332 \sqrt{1 + 0{,}004\,t}$ m/sec (dove u = velocità e t = temperatura). Per un aumento o una diminuzione di 5° C della temperatura ambiente sopra indicata l'applicazione dello stimolo acustico avviene rispettivamente 2,84 e 2,89 msec dopo la comparsa dell'artefatto; poiché l'eventuale errore per tali variazioni è quindi trascurabile, il calcolo è stato fatto per una temperatura media. Per una variazione della distanza del diffusore pari a 5 cm in meno o in più di quella sopra indicata il ritardo dell'applicazione dello stimolo acustico sulla comparsa dell'artefatto è pari rispettivamente a 2,72 e 3,01 msec.

D'altra parte la disposizione impiegata torna utile, in quanto consente di meglio distinguere nel tracciato l'artefatto dovuto all'impulso generatore del *click* da quello prodotto dallo stimolo elettrico applicato all'area motrice (6). Per quanto concerne le modificazioni prodotte da un *click* sulla responsività della corteccia motrice, i valori della pausa tra stimolo condizionante e stimolo *test* riferiti nei risultati sono stati ottenuti misurando sul tracciato la pausa tra i rispettivi artefatti e da tale valore sottraendo 3 msec.

Il controllo istologico della posizione dell'elettrodo nella piramide, veniva eseguito su sezioni seriate colorate col metodo di Weil della porzione bulbo-pontina degli encefali dei Gatti in esame.

Fig. 1. – Oscillazioni di potenziale derivate da una piramide per stimolazioni elettriche di voltaggio crescente del giro sigmoideo ipsilaterale.

Gatto curarizzato. Risposte ottenute rispettivamente con V 2,5 (A), 3,5 (B), 4,5 (C). Si osserva con l'aumentare del voltaggio un aumento dell'ampiezza e della durata della risposta piramidale. La calibrazione indicata in C vale anche per gli altri elettrogrammi. In questa e nella figura successiva, la deflessione verso l'alto indica la polarità negativa.

La stimolazione della porzione anteriore del giro sigmoideo, con stimoli di voltaggio pari a 1,5–3 V, provoca generalmente una risposta contraddistinta da una deflessione positiva di latenza non misurabile nelle condizioni dei nostri esperimenti, di scarsa ampiezza e di breve durata (0,3–0,8 msec), subito seguita da una deflessione negativa a punta e a contorno netto, della latenza di 0,3–0,8 msec, di ampiezza pari a 60–200 µV e della durata di 1–1,5 msec; a questa oscillazione negativa fa seguito una nuova deflessione positiva, che presenta caratteri analoghi all'accidente iniziale. Da ultimo un'oscillazione di potenziale negativa, con fronte ripida e fase discendente interrotta da deflessioni più o meno rilevate completa la risposta: la sua latenza è di 1,3–2,3 msec, la sua ampiezza è pari a 50–200 µV e la sua durata, per i voltaggi da noi impiegati, può variare da 5–8 a 30 msec (fig. 1). Le prime tre oscillazioni costituiscono il complesso D ovvero l'onda D di Pat-

(6) Il medesimo risultato si può ottenere aumentando la velocità di spostamento del raggio catodico sull'asse dei tempi; per altro la registrazione fotografica della risposta piramidale può in tal caso divenire incompleta, se è di lunga durata, in quanto lo schermo oscillografico diventa insufficiente a contenere tutta la risposta.

ton e Amassian [7]; le varie deflessioni che nell'insieme formano l'ultima onda, sono dagli stessi Autori chiamate onde I [8]. Quanto alla polarità della risposta piramidale, c'è da aggiungere che essa pur avendo forma e ampiezza praticamente invariate, è talora di polarità opposta (fig. 2 A); e per quanto riguarda la sua morfologia, abbiamo accertato che essa è relativamente stabile impiegando stimoli largamente sopraliminali.

Per indagare gli effetti in un *click* sulla responsività della corteccia motrice, si stimolava elettricamente (stimolo *test*) il giro sigmoideo dopo un *click* (stimolo condizionante), nel primo saggio mantenendo la pausa tra i due stimoli pari a 0,2 msec e successivamente aumentandola ogni volta di 0,2 msec fino a un massimo di 7 msec.

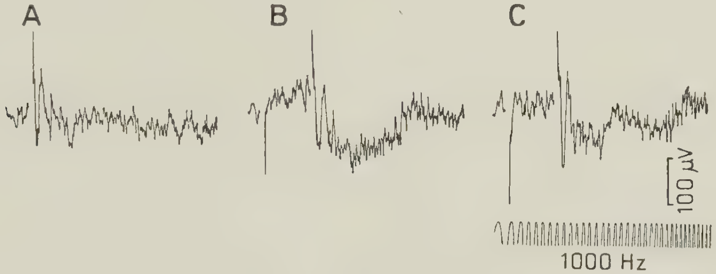


Fig. 2. – Effetto di un *click* sulle oscillazioni di potenziale derivate da una piramide per stimolazione elettrica del giro sigmoideo ipsilaterale.

Gatto curarizzato. Le risposte sono state ottenute mediante uno stimolo di 3,5 V non preceduto da un *click* in A e 4 msec dopo un *click* in B e C. Il valore della pausa tra stimolo condizionante e stimolo *test*, riportato nella leggenda di questa figura, è stato ottenuto misurando nel tracciato la pausa tra i rispettivi artefatti e da tale valore di durata sottraendo 3 msec. Si noti: in A, l'aspetto della risposta piramidale in assenza di un *click*; in B e C, il potenziamento della risposta piramidale *in toto*. La calibrazione indicata in C vale anche per A e B.

La risposta piramidale risulta immodificata rispetto a quella che si ottiene in mancanza dello stimolo acustico, quando la pausa tra i due stimoli non superi 1–2,6 msec: per pause comprese tra 1–2,6 e 3–4 msec la componente I della risposta piramidale presenta invece variazioni contraddistinte da un aumento di ampiezza e non costantemente di durata. Per pause superiori a quelle da ultimo indicate e fino a pause pari a 5–6 msec anche la componente D appare aumentata di ampiezza (fig. 2). In qualche caso la deflessione negativa di tale componente può mostrare due punte o una durata abbreviata; eccezionalmente la intera componente rimane immodificata. Il potenziamento della risposta fa difetto per pause superiori a 5–6 msec: talora la fase di potenziamento è seguita da una fase di depressione, che per altro è in generale poco evidente.

(7) H. D. PATTON a. V. E. AMASSIAN, « J. Neurophysiol. », XVII, 345 (1954).

(8) Per comodità denomineremo l'onda D e le onde I rispettivamente anche componente D e componente I della risposta piramidale.

In conformità ai dati ora esposti, si può concludere che i valori di pausa ottimali per osservare il potenziamento della risposta piramidale *in toto* sono dell'ordine di 3–4 msec, mentre quelli ottimali per osservare la scomparsa del potenziamento sono dell'ordine di 5–6 msec. In un medesimo esperimento, inoltre, sono notevolmente costanti i valori di pausa che corrispondono rispettivamente alla comparsa e alla scomparsa del potenziamento.

Una serie di esperimenti ha dimostrato che la diatermocoagulazione delle aree acustiche non ha avuto un effetto manifesto sul potenziamento che un *click* provoca nella risposta piramidale a stimolazione del giro sigmoideo

Il problema di natura odologica, circa alla via seguita dagli impulsi di origine cocleare per giungere alla corteccia motrice, non è stato ancora chiarito. Come spiegheremo nel lavoro *in extenso*, sul fondamento delle osservazioni di vari Autori [Wall, Rémond e Dobson (1), Brookhart e Zanchetti (4), Feng, Liu e Shen (9), Imbert, Roger e Buser (10)] e delle nostre sembra giustificato pensare che il potenziamento della risposta piramidale sia dovuto a impulsi trasmessi per un sistema di conduzione, il quale non raggiunge le aree acustiche primarie. Tale sistema potrebbe essere costituito da collaterali della via acustica centrale collegate con l'area motrice tramite nuclei talamici di proiezione specifica.

Degno di nota è infine il fatto che la durata del potenziamento della risposta piramidale è di poco inferiore a quella della costante di tempo del potenziale eccitatorio postsinaptico [Eccles (11)] e della costante di tempo della facilitazione temporale osservabile a livello dei motoneuroni spinali [Lloyd (12)]. Si può interpretare tale osservazione con l'ammettere che gli impulsi corticipeti di origine cocleare provochino l'insorgenza di un potenziale eccitatorio postsinaptico nelle cellule piramidali dell'area motrice.

(9) T. P. FENG, Y. M. LIU a. E. SHEN, « Proc. XX internat. physiol. Congr. », Brussels, Abstr. Comm., 997 (1956).

(10) M. IMBERT, A. ROGER et P. BUSER, « J. Physiologie », LI, 482 (1959).

(11) J. C. ECCLES, *The physiology of nerve cells*. Baltimore, Johns Hopkins Press (1957). Cfr. p. 32.

(12) D. P. C. LLOYD, « J. Neurophysiol. », IX, 421 (1946).

Patologia. — *Componenti complementari ed agglutinazione bacterica* (*). Nota di TOMMASO DE SIMONE, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

L'identità del complemento responsabile della emolisi con quello che partecipa al fenomeno della bacteriolisi è stata dimostrata soltanto nel 1943 da Dozois e coll. [1].

Era opinione generale, difatti, che esistessero nel sangue degli animali superiori complementi diversi, ciascuno dei quali intervenente in una diversa reazione immunologica, mentre oggi si accetta dalla maggioranza degli immunologi il principio di un unico complemento, costituito da quattro componenti separati, e che partecipa ai fenomeni immunitari con meccanismo diverso, talvolta con tutti, tal altra con singoli componenti.

La proprietà fondamentale del complemento è quella di fissarsi ai complessi immuni, ma questa fissazione non avviene sempre allo stesso modo: di alcune reazioni antigene-anticorpo, come ad esempio quella che da luogo all'emolisi, si conosce molto bene il meccanismo, così come la partecipazione dei singoli componenti del complemento alle diverse fasi del processo. Di altre, invece, il meccanismo è ignoto o quasi, e sappiamo solo quali sono i componenti complementari utilizzati, o meglio fissati, nel corso del fenomeno.

Per quanto riguarda la reazione emolitica è certa la partecipazione di tutti i componenti. Il C'_1 ed il C'_4 sono fissati simultaneamente e per primi, poi viene fissato il C'_2 ed infine agisce il C'_3 che provoca la lisi, ma che non sembra legarsi al complesso antigene-anticorpo (Mayer e coll. [2]).

Nell'attività di neutralizzazione virale esplicata dal siero, il complemento interviene potenziandone l'azione con la presenza del C'_2, C'_3 e C'_4 (Dozois e coll. [3]).

Il complemento ha anche azione agglutinante su cellule sensibilizzate sulle quali non ha capacità litiche. Secondo Gorrill e Hobson [4] il fattore agglutinante è il C'_4, mentre il C'_1 si oppone a questa azione.

Anche nell'attività batteriolitica del siero è stata dimostrata la partecipazione del complemento, ma solo su pochi ceppi batterici ed in presenza di anticorpi specifici. Tutti i quattro componenti partecipano a questo fenomeno immunitario, e l'inattivazione di ognuno di essi, pertanto, abolisce l'attività batteriolitica (Gorrill e Hobson [5]).

Il complemento viene anche fissato nelle reazioni di precipitazione. I vari componenti partecipano al fenomeno in misura diversa, il C'_1 per il 92 %, il C'_2 ed il C'_4 per l'88 %; il C'_3 invece non interviene affatto (Cavallo, Plescia, e Heidelberger [6]).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Napoli.
(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

Infine, per quanto riguarda l'attività opsonica del siero, pur non essendo risultata una relazione diretta tra questa attività ed il titolo del complemento dei sieri in esame, tuttavia Ecker, Pillemer e Kuehn [7] hanno dimostrato che l'inattivazione di ciascun componente riduce l'attività opsonica.

Non si conoscono invece quali siano i componenti complementari che partecipano alla agglutinazione bacterica. E ciò benché sia noto che il complemento interferisca in questa reazione immunitaria, esplicando un'azione inibente su tale fenomeno immunologico. Recenti ricerche di Cavallo [8] hanno chiarito alcuni aspetti di tale fenomeno, dimostrando che l'inibizione non interessa l'agglutinazione in se stessa, bensì solo la formazione dei macroaggregati bacterici.

Le presenti ricerche riguardano lo studio quantitativo della fissazione dei singoli componenti complementari ai complessi bacteri–anticorpi specifici, che si formano durante la agglutinazione bacterica.

Parte sperimentale.

Si è sperimentato con emulsioni bacteriche di S. typhi OH 901 in NaCl al 0,9 °/o. Gli antisieri usati sono stati ottenuti da conigli vaccinati per via endovenosa con germi formolati (12 iniezioni in quattro settimane, da ml 0,3 ciascuna; torbidità dell'emulsione = 600 unità Klett). I sieri, raccolti per salasso una settimana dopo la ultima iniezione, venivano inattivati a 56° C per 30′ e quindi conservati in congelatore a —25° C. Il complemento proveniva da un pool di sieri, ricavati da dieci cavie, ripartito in piccole provette nella quantità di ml 1,0 per provetta, e mantenuto a —25° C. Questo pool, titolato per l'attività emolitica secondo il metodo proposto da Plescia e coll. [9], conteneva 285 UC′ H_{50} per ml.

Tabella I.

Inattivazione del complemento di cavia e dei singoli componenti a mezzo di agglutinati bacterici. Prove con quantità di C′ inibenti l'agglutinazione: 14,25 UC′ H_{50}.

	Diluizione del siero agglutinante					
	1/20	1/40	1/80	1/160	1/320	1/640
°/o inattivazione C′	67	72	73	70	63	50
°/o inattivazione C_1'	85	87	85	85	56	52
°/o inattivazione C_2'	78	82	80	80	46	47
°/o inattivazione C_3'	15	16	16,5	15	5	0
°/o inattivazione C_4'	70	73	76	73	34	10

Tabella II.

Inattivazione del complemento di cavia e dei singoli componenti a mezzo di agglutinati bacterici. Prove con quantità di C′ non inibenti l'agglutinazione: 7,12 UC′ H_{50}.

	Diluizione del siero agglutinante					
	1/20	1/40	1/80	1/160	1/320	1/640
°/o inattivazione C'	84	86	85	80	60	50
°/o inattivazione C'_1	85	86,5	84	81,5	60	54
°/o inattivazione C'_2	80,5	73,5	81	83	58	50
°/o inattivazione C'_3	15,7	19	18,7	19,4	6	0
°/o inattivazione C'_4	69,4	72,7	80	77,4	43	13

L'agglutinazione veniva eseguita mettendo a contatto per ogni provetta ml. 0,5 di antisiero (diluizioni da 1/20 a 1/640), ml 0,5 di emulsione bacterica (torbidità al Klett = 400 unità), e ml 2,0 di siero di cavia diluito 1/20 con soluzione salina. In una seconda serie di prove il complemento di cavia era diluito 1/40. La prima concentrazione determina inibizione della agglutinazione, la seconda non provoca alcuna modificazione rispetto ai controlli senza complemento. Le provette sono quindi tenute per due ore in bagno maria a 37° C ed i risultati della agglutinazione sono valutati secondo lo schema proposto da Cavallo [8].

Per quanto concerne gli eritrociti di montone, la soluzione tampone, l'emolisina e la preparazione dei reagenti complementari, si rimanda a Cavallo e Cavallo [10].

Per la titolazione dei componenti si è usato il metodo proposto da Plescia e collaboratori [11], modificato da Cavallo e Cavallo [10], secondo il seguente procedimento:

per C'_1 = quantità scalari del siero in esame e del siero di controllo [1], (da ml 0,1 a ml 0,006 per la prima serie di esperienze, e da ml 0,2 a ml 0,0125 per la seconda), entrambi diluiti 1/10, si pongono in cinque provette e vi si aggiungono ml 0,1 di siero di maiale inattivato a 56° C per 30′, ml 0,1 di

(1) Per siero di controllo si intende una miscela di siero di cavia opportunamente diluito, di antisiero specifico, e con soluzione fisiologica al posto dei germi. Prove preliminari hanno dimostrato che il comportamento di questa miscela è identico a quello del complemento con germi e senza anticorpo.

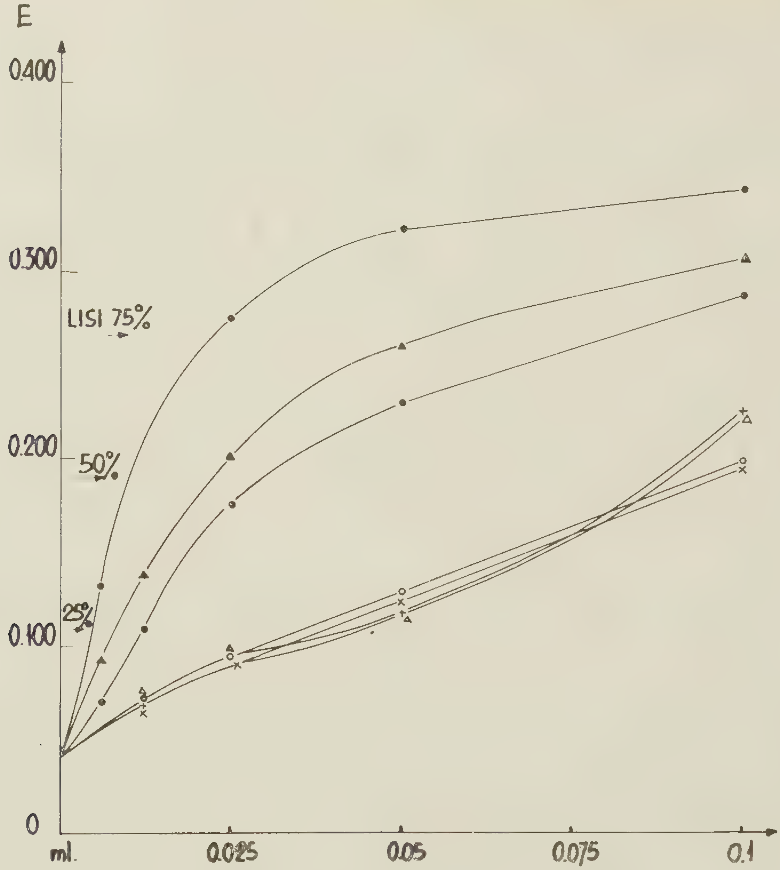


Fig. 1. – Attività di C'_1 di siero di cavia dopo incubazione con agglutinati bacterici (14,25 UC' H_{50}). Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero e sulle ordinate i valori dell'assorbimento a 5410 Å. Le percentuali di inattivazione ricavate dalla tabella sono riportate nella Tabella I.

● ——— ● senza bacteri
o ——— o con bacteri + anticorpo 1/20
× ——— × con bacteri + anticorpo 1/40
+ ——— + con bacteri + anticorpo 1/80
△ ——— △ con bacteri + anticorpo 1/160
⊕ ——— ⊕ con bacteri + anticorpo 1/320
▲ ——— ▲ con bacteri + anticorpo 1/640

R_1, 0,1 × 10^9 di eritrociti sensibilizzati, portando infine ad 1 ml con tampone di veronal. Si pone per un'ora in bagno maria a 37°C, si centrifuga e si legge allo spettrofotometro di Beckman la quantità di emoglobina liberata, che è presente nel supernatante. Per mezzo di controlli si ricava l'emoglobina liberata da tutti gli eritrociti impiegati (T) e l'emoglobina ricavata dalle stesse cellule in presenza del solo reagente (R). Riportando i dati ottenuti su coordinate cartesiane (sulle ascisse le quantità di siero usato e sulle

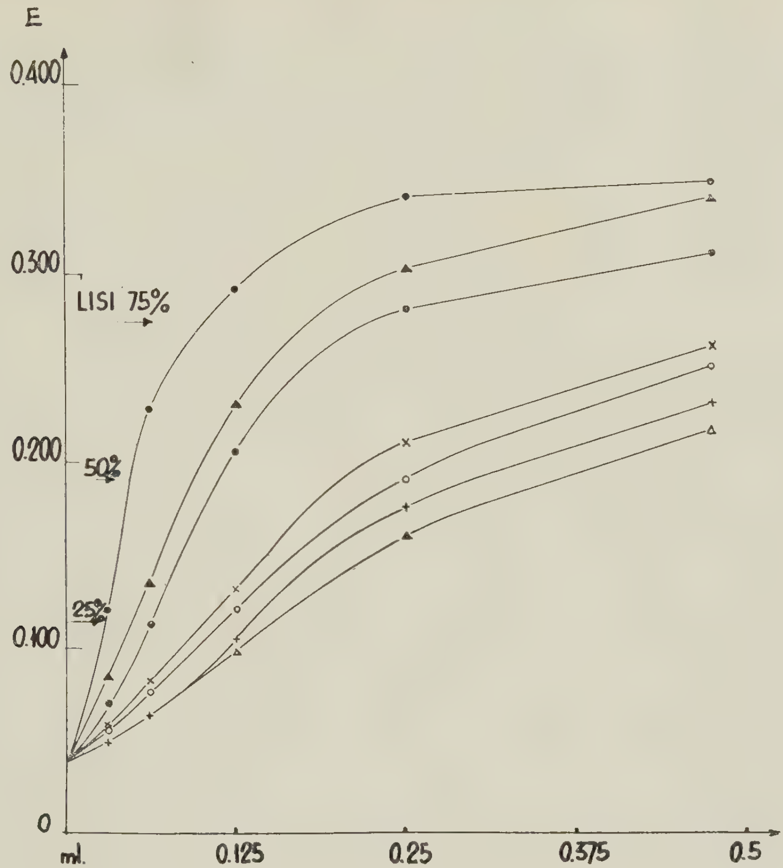


Fig. 2. – Attività di C'_2 di siero di cavia dopo incubazione con agglutinati bacterici (14,25 UC' H_{50}). Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero e sulle ordinate i valori dell'assorbimento a 5410 Å. Le percentuali di inattivazione ricavate dalla tabella sono riportate nella Tabella I.

● ——— ● senza bacteri
○ ——— ○ con bacteri + anticorpo 1/20
× ——— × con bacteri + anticorpo 1/40
+ ——— + con bacteri + anticorpo 1/80
△ ——— △ con bacteri + anticorpo 1/160
⊕ ——— ⊕ con bacteri + anticorpo 1/320
▲ ——— ▲ con bacteri + anticorpo 1/640

ordinate le densità ottiche ottenute), si può ricavare il 25 %, il 50 % ed il 75 % di lisi applicando la formula:

$$25\ \% = a \cdot 1/4 + R$$

$$50\ \% = a \cdot 1/2 + R$$

$$75\ \% = a \cdot 3/4 + R$$

dove $a = T - R$.

Paragonando i risultati ottenuti dai sieri in esame e quelli ottenuti dai sieri di controllo si ottiene l'inattivazione percentuale di C'_1.

Per gli altri tre componenti complementari il procedimento è analogo, variando soltanto la diluizione del siero in esame ed il reagente. In luogo

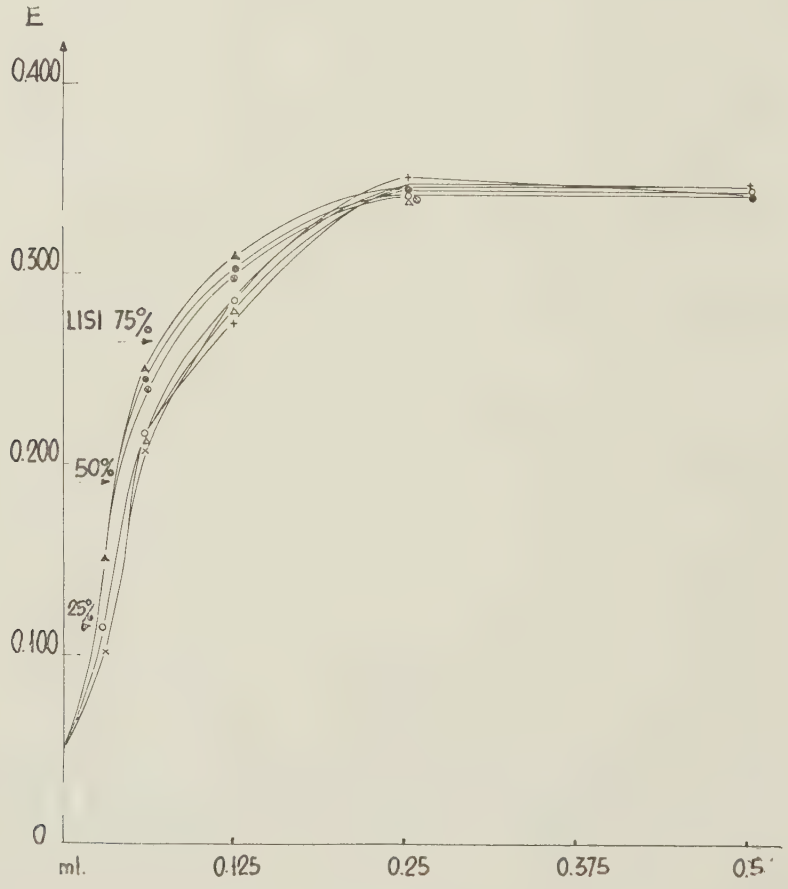


Fig. 3. – Attività di C'_3 di siero di cavia dopo incubazione con agglutinati bacterici (14, 25 UC' H_{50}). Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero e sulle ordinate i valori dell'assorbimento a 5410 Å. Le percentuali, di inattivazione ricavate dalla tabella sono riportate nella Tabella I.

● ——— ● senza bacteri
O ——— O con bacteri + anticorpo 1/20
× ——— × con bacteri + anticorpo 1/40
+ ——— + con bacteri + anticorpo 1/80
△ ——— △ con bacteri + anticorpo 1/160
⊕ ——— ⊕ con bacteri + anticorpo 1/320
▲ ——— ▲ con bacteri + anticorpo 1/640

di R_1, difatti, sono adoperati R_2, R_3 e R_4 per titolare rispettivamente C'_2, C'_3 e C'_4.

Per questi due ultimi componenti inoltre si sostituisce il ml 0,1 di siero di maiale, inattivato a mezzo del calore, con ml 0,1 di puffer veronal.

Tanto la percentuale di inattivazione dell'attività complementare totale quanto quella dei singoli componenti non varia nelle due serie di esperienze.

I componenti maggiormente fissati ai germi agglutinati sono il C_1', il C_2' ed il C_4'. Alle concentrazioni di siero corrispondenti alla zona di equivalenza,

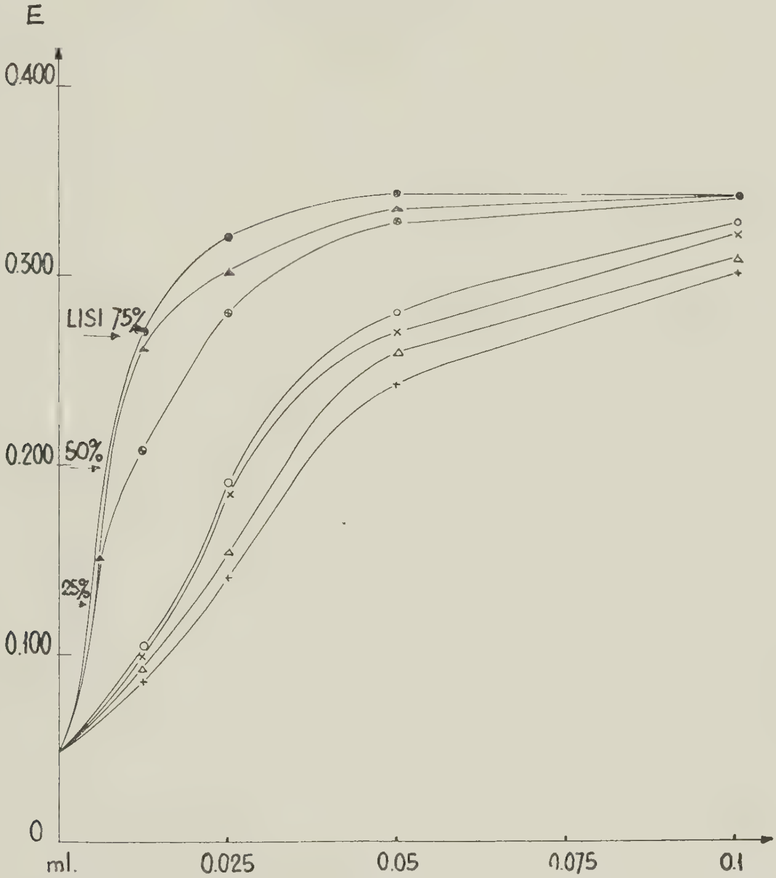


Fig. 4. – Attività di C_4' di siero di cavia dopo incubazione con agglutinati bacterici (14,25 U C' H_{50}). Sulle ascisse sono riportati i volumi del siero e sulle ordinate i valori dell'assorbimento a 5410 Å. Le percentuali di inattivazione ricavate dalla tabella sono riportate nella Tabella I.

● ——— ● senza bacteri
○ ——— ○ con bacteri + anticorpo 1/20
× ——— × con bacteri + anticorpo 1/40
+ ——— + con bacteri + anticorpo 1/80
△ ——— △ con bacteri + anticorpo 1/160
⊕ ——— ⊕ con bacteri + anticorpo 1/320
▲ ——— ▲ con bacteri + anticorpo 1/640

dove l'agglutinazione è massiva, le percentuali di inattivazione di questi componenti sono rispettivamente di circa l'85 °/o per il C_1', di circa l'80 °/o per il C_2', e di circa il 75 °/o per il C_4'. Il C_3' subisce una lieve inattivazione che si mantiene nei vari esperimenti al disotto del 20 °/o. Il comportamento iden-

tico, ottenuto sia per quantità non inibenti che per quantità inibenti l'agglutinazione macroscopica, sta ad indicare che, in ambedue i casi, il complemento entra a far parte della reazione, e che esso si fissa sempre nello stesso modo ai complessi immuni; questo dato conferma le acquisizioni precedenti, secondo le quali nel fenomeno dell'inibizione dell'agglutinazione bacterica da parte del complemento, questo non inibisce che la formazione dei grossi aggregati, mentre la formazione dei complessi bacteri–anticorpi specifici, che è alla base dell'agglutinazione stessa, si compie praticamente indisturbata, fissando una certa frazione di C′, che solo se presente in opportuna quantità rende i complessi batteri–anticorpi specifici meno atti alla precipitazione, inibendo così l'agglutinazione macroscopica.

Il complemento inoltre non sembra influire positivamente sul fenomeno immunitario in questione; esso infatti non incrementa la agglutinazione stessa né a forti né a piccole concentrazioni, come invece accade per altri fenomeni immunitari, quali la neutralizzazione virale e la precipitazione. Il comportamento del complemento, per quanto riguarda la partecipazione dei singoli componenti, si può paragonare in questo caso alle reazioni di precipitazione, nelle quali sono inattivati appunto il C'_1, il C'_2 ed il C'_4. Nel caso della precipitazione però il complemento intensifica la reazione, mentre, come si è detto, nell'agglutinazione o la inibisce o non ne modifica il normale processo.

La percentuale di inattivazione dei componenti infine sembra variare modificando il rapporto antigene–anticorpo; essa, difatti, risulta praticamente costante tanto nella zona di eccesso di antigene quanto nella zona di equivalenza, mentre in quella di eccesso di anticorpo si è notata una maggiore inattivazione relativa di C'_1 e C'_2 rispetto a C'_4.

Bibliografia.

[1] T. F. Dozois, S. Seifter and E. E. Ecker, « J. Immunol. », *47*, 215 (1943).

[2] M. M. Mayer, L. Levine, H. J. Rapp and A. A. Marucci, « J. Immunol. », *73*, 443 (1954).

[3] T. F. Dozois, J. C. Wagner, C. M. Chamerda and V. M. Andrew, « J. Immunol. », *62*, 319 (1949).

[4] R. H. Gorrill and D. Hobson, « J. Path. Bacteriol. », *64*, 257 (1952).

[5] R. H. Gorrill and D. Hobson, « Bull. Hyg. », *27*, 1 (1952).

[6] G. Cavallo, O. J. Plescia and M. Heidelberger, « J. Immunol. », *80*, 249 (1958).

[7] E. E. Ecker, L. Pillemer and A. O. Kuehn, « J. Immunol. », *43*, 245 (1942).

[8] G. Cavallo, « Giorn. Microbiol. », *5*, 1 (1958).

[9] O. J. Plescia, K. Amiraian and M. Heidelberger, « Arch. Biochem. », *63*, 346 (1956).

[10] G. Cavallo e O. Cavallo, « Giorn. Microbiol. », *5*, 13 (1958).

Patologia. — *Separazione dei derivati acetici delle iodotironine* (TA_2, TA_3 e TA_4) *mediante elettroforesi zonale ad alta differenza di potenziale* (*). Nota di FRANCESCO BRESCIANI e GAETANO SALVATORE, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

Le nuove acquisizioni sulla fisiopatologia della ghiandola tiroide inducono a credere che essa eserciti la sua azione sull'organismo non solo attraverso la secrezione dei suoi quattro ormoni ma anche attraverso alcuni prodotti del suo metabolismo. Tra questi hanno particolarmente attirato l'attenzione i derivati acetici, sia perché sono stati identificati in molti tessuti dopo somministrazione e delle corrispondenti iodotironine [1–5] e di I^{131} [6], sia perché essi sono più o meno attivi in tutti i test rivolti a svelare l'attività tiroidea [7–16]. Alcuni Autori [7–10, 12, 13] hanno anche asserito che tali derivati rappresentano la forma degli ormoni tiroidei attiva perifericamente, ma successive ricerche hanno dimostrato che tale conclusione non può essere accettata [11, 14, 17–19]. Gli acidi iodotiroacetici vanno dunque considerati solo come metaboliti fisiologici degli ormoni tiroidei, provvisti ancora di attività ormonale.

L'identificazione di essi mediante l'analisi radiocromatografica è resa però difficile dal fatto che mentre possono essere separati tra loro nei sistemi di solventi alcalini (*n*–butanolo sat. d'NH_4OH 2 N, pentanolo terz. sat. d'NH_4OH 2 N, etc.) non possono essere al tempo stesso distinti dalle iodotironine. T_3 e TA_4 ad esempio, hanno presso a poco lo stesso R*f* in quasi tutti i solventi e ciò ha certo indotto in errore numerosi ricercatori sull'importanza quantitativa della trasformazione della T_4 in T_3 nei tessuti periferici [cfr. 20]. La comune elettroforesi zonale, d'altronde, separa le iodotironine dagli acidi iodo–tiro–acetici ma non permette la separazione dei derivati di–, tri– e tetra–iodati tra loro. Tale separazione è stata ottenuta, con le presenti ricerche, mediante foresi in campo elettrico ad alta differenza di potenziale, applicando i principi di Weber [21] atti a ridurre la diffusione delle sostanze nella carta da elettroforesi.

MATERIALE E TECNICA.

La tecnica dell'elettroforesi ad alta differenza di potenziale era analoga, con lievi modifiche, a quella descritta da Werner u. Westphal [21] e Wieland u. Pfleiderer [22] (1).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) L'apparato, costruito nel nostro Istituto, consta essenzialmente di: una vasca in plastica contenente la miscela frigorifera (raffreddata dalla serpentina di un gruppo refrigeratore) e ricoperta da un piano anch'esso in plasica (perspex, spessore 2 mm) sul quale vien fatto aderire il foglio da elettroforesi; 2 vaschette laterali contenenti gli elettrodi e circa

Fig. 1.

L'acido 4(4'idrossi–fenossi) 3,5–diiodofenilacetico (diiodotiroacetico: TA_2) l'acido 4(4'idrossi–3'–iodofenossi) 3,5 diiodofenilacetico (triiodotiroacetico TA_3) e l'acido 4 (4' idrossi–3',5'diiodofenossi) 3,5 diiodofenil–acetico (tetraiodotiroacetico : TA_4), gentilmente forniti dal dr. Meltzer della Warner–Lambert Res. Inst. erano separatamente disciolti in NH_4OH conc. ($d = 0{,}88$) in concentrazione 0,02 M. 100 μl di ciascuna delle tre soluzioni ammoniacali erano riuniti immediatamente prima di ciascuna prova.

La quantità di miscela che può venire analizzata dipende evidentemente dal tipo di carta. La Whatman 3MM è sopratutto utile per elettroforesi preparativa giacché permette deporre su una larghezza di 2 mm fino a 25 μl di miscela per cm di lunghezza ($\sim$ 10 mg della miscela dei prodotti su 30 cm di lunghezza). Per scopi analitici tuttavia, dato che la reazione di Pauly con la quale venivano rivelate, a migrazione avvenuta, le macchie dei composti in esame, è sensibile a 20 μg di composto per cm^2, si deponevano all'origine in genere 4 μl di miscela per cm di lunghezza.

Successivamente veniva stabilito il contatto con le vaschette contenenti ciascuna 2 l di sol. tampone secondo la tecnica di Weber [20] (2). Si è preferito l'uso di un tampone volatile, particolarmente utile nell'elettroforesi preparativa per le successive eluzioni: si adoperava quindi tampone costituito da carbonato di ammonio (contenente 20 % di NH_3) al 5 ‰ portato a pH 10,3 mediante ammoniaca concentrata.

La differenza di potenziale applicata era pari a 95 V/cm. Dopo 40 min. la carta veniva asciugata, orizzontalmente, a + 60° C e le macchie erano rivelate mediante il reattivo di Pauly [24] e, se radioattive, mediante autoradiografia.

Risultati.

Una serie di prove in condizioni diverse hanno permesso di stabilire che è possibile ottenere separazione dei derivati di–, tri– e tetra–iodotiroacetici su carta Whatman

2 litri di soluzione tampone; un raddrizzatore–alimentatore della potenza di 3000 V e della capacità di 300 mA. Sul piano di plastica veniva ottenuta una camera umida a perfetta tenuta dell'altezza di 2 cm, mediante apposizione di un cristallo bordato di gomma.

(2) Il contatto tra il foglio di carta e le vaschette laterali contenenti il tampone è mediato attraverso un foglio di carta (dello stesso tipo di quella usata per l'elettroforesi) che da un lato è immerso nel tampone e dall'altro è ricoperto da cellophan a contatto diretto con la striscia da elettroforesi.

3 MM a pH 10,3 con una differenza di potenziale di 95 V/cm, in 40 min. (vedi fig. 1).

La separazione, impossibile a pH 8,5, migliora con l'aumentare del pH. A pH 10,3 nelle condizioni sopra descritte TA_2, TA_3 e TA_4 migrano verso l'anodo rispettivamente 12, 14 e 15 cm circa dall'origine.

Nella seguente tabella sono riportate le caratteristiche della migrazione elettroforetica di TA_2, TA_3 e TA_4.

TABELLA.

VELOCITÀ DI MIGRAZIONE DEI DERIVATI ACETICI DELLE IODOTIRONINE [(a)]

	Velocità di migrazione (mm/h) con 95 V/cm	Mob. elettrof. (u) [(b)]	Velocità di migrazione relativa [(c)]
TA_2	180	1,9	0,78
TA_3	213	2,2	0,92
TA_4	231	2,4	1,0

(a) = Puffer pH 10,3; carta Whatman 3MM;

(b) $= u = \dfrac{\text{Velocità di migrazione}}{\text{Volts/cm}}$;

(c) = posto uguale a 1,0 la velocità di TA_4.

DISCUSSIONE.

La migrazione elettroforetica di TA_2, TA_3 e TA_4 è legata evidentemente alla dissociazione dei gruppi —COOH e —OH. La differente velocità di migrazione dei tre composti è verosimilmente in relazione al fatto che la presenza di uno o due atomi di iodio in posizione orto rispetto all'ossidrile fenolico influenza il pK del gruppo ossidrilico, il grado di dissociazione del quale aumenta la presenza dell'alogeno.

Le differenze di carica delle molecole non sono però tali da permettere la separazione di TA_2, TA_3 e TA_4 con la comune elettroforesi a basso potenziale: la diffusione in tali condizioni è molto notevole sia per l'imbibizione della carta al massimo della sua capacità che per il notevole tempo necessario alla migrazione. Tali inconvenienti sono eliminati con la tecnica dell'elettroforesi ad alto potenziale, che può essere dunque il metodo di scelta per la separazione e l'analisi di tali composti; essa permette in un tempo assai breve di ottenere contemporaneamente la separazione dalle iodotironine e la distinzione dei singoli acidi iodotiroacetici.

Tale metodo è inoltre particolarmente utile per la microsintesi dei composti tri– e tetra–iodati marcati con I^{131} a partire dall'acido diiodotiroacetico,

permettendo infatti la separazione contemporanea tanto degli ioduri quanto dei prodotti secondari della reazione. La rapidità della separazione porta, inoltre, a notevole risparmio del marcatore con minor perdita della attività specifica del composto di sintesi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. ROCHE, R. MICHEL, P. JOUAN et W. WOLF, « Endocrinol. », *59*, 425 (1956).
[2] J. ROCHE, R. MICHEL, J. CLOSON et O. MICHEL, « C. R. Soc. Biol. », *150*, 2097 (1956).
[3] J. ROCHE, R. MICHEL et P. JOUAN, « C. R. Soc. Biol. », *150*, 629 (1956).
[4] E. V. FLOCK, J. L. BOLLMAN, J. H. GRINDLAY and B. F. MC KENZIE, « Endocrinol. », *61*, 461 (1957).
[5] D. H. FORD, K. R. COREY and J. GROSS, « Endocrinol. », *61*, 426 (1957).
[6] V. A. GALTON and R. PITT-RIVERS, « Biochem. J. », *72*, 319 (1959).
[7] O. THIBAULT, « C. R. Soc. Biol. », *149*, 877 (1955).
[8] O. THIBAULT et R. PITT-RIVERS. « C. R. Soc. Biol. », *149*, 880 (1955).
[9] R. PITT-RIVERS et O. THIBAULT, « C. R. Acad. Sci. », *240*, 668 (1955).
[10] K. TOMITA and H. A. LARDY, « J. Biol. Chem. », *219*, 595 (1956).
[11] F. DICKENS and D. SALMONY, « Biochem. J. », *64*, 645 (1956).
[12] O. THIBAULT, «Ciba Found. Coll. on Endocrinol.», London, *10*, 230 (1957).
[13] S. Z. DONHOFFER, I. VARNAI and E. SZIEBERT-HORVATH, « Nature », *181*, 346 (1958).
[14] J. ROCHE, G. SALVATORE et G. FALCONE, « C. R. Soc. Biol. », *153*, 248 (1959).
[15] N. R. STASILLI, R. L. KROC and R. I. MELTZER, « Endocrinol. », *64*, 62 (1959).
[16] W. L. MONEY, R. I. MELTZER, D. FELDMAN and R. W. RAWSON, « Endocrinol. », *64* 123 (1959).
[17] S. B. BARKER and W. J. LEWIS, « Proc. Soc. Exp. Biol. », *91*, 650 (1956).
[18] G. BARAC et J. CARLIER, « C. R. Soc. Biol. », *150*, 1486 (1956).
[19] J. G. WISWELL and S. P. ASPER, « Bull. John's Hopk. Hosp. », *102*, 115 (1958).
[20] J. ROCHE in discuss.: J. ROCHE, R. MICHEL, P. JOUAN, « Ciba Found. Coll. on Endocrinol. », London, *10* 168 (1957).
[21] R. WEBER, « Helv. Chem. Acta », *34*, 2031 (1951).
[22] G. WERNER und O. WESTPHAL, « Angew. Chem. », *67*, 251 (1955).
[23] Th. WIELAND und G. PFEIDERER., « Angew. Chem. », *67*, 257 (1955).
[24] R. J. BLOCK and D. BOLLING, *The aminoacid composition of Protein and foods*. C.C. Thomas, Springfield (Illinois) 1951.

Biologia. — *L'azione dei raggi X sulle larve degli Anfibi anuri. Trapianti di arti e somministrazione di tiroxina* (*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Le ricerche di cui mi occupo in questo lavoro hanno lo scopo di contribuire ad una migliore conoscenza dell'azione che i raggi X hanno sulle larve degli Anfibi anuri, e precisamente sul loro ambiente endocrino. Tale influenza è qui esaminata osservando come varia la velocità di accrescimento degli arti di larve normali se vengono trapiantati su larve roentgenirradiate, sia omoplasticamente (*Bufo vulgaris, Bufo viridis*) sia eteroplasticamente (*Bufo viridis* su *Bufo vulgaris*).

È noto che numerosi Autori nel trapianto di abbozzi tra larve di Anfibi di specie con diverso ritmo di accrescimento, o tra larve di una stessa specie ma di diversa età, osservarono una sincronizzazione nei processi della metamorfosi: ossia il trapiantato presenta un aumento o una diminuzione nella velocità di sviluppo sicché si ha una sincronizzazione nella metamorfosi. L'Uhlenhuth (1917) parlò di un fattore di sviluppo intrinseco ai tessuti trapiantati e di un fattore estrinseco prodotto dal portatore. Quest'ultimo, a cominciare dallo stesso Uhlenhuth, fu generalmente considerato di natura endocrina, in base alle ricerche del Gudernatsch sull'importanza di una alimentazione tiroidea sulla metamorfosi.

In precedenti lavori (dal 1956) [1] notai che l'arto di *Bufo viridis* trapiantato su *Bufo vulgaris* presenta, nella vita larvale, una maggiore velocità sia di differenziamento sia di accrescimento. Inoltre, ponendo larve normali di *Bufo viridis* in soluzioni a deboli concentrazioni di tiroxina si ha che i loro arti assumono una velocità di accrescimento molto simile a quella che hanno nel trapianto su *vulgaris*. Un arto di *viridis* trapiantato su *vulgaris* appare quindi sottoposto ad una più intensa attività tiroidea in confronto all'arto di *viridis* rimasto in situ. E perciò, anche per l'aumento della velocità di accrescimento, attribuii grande importanza alle condizioni endocrine e particolarmente alla funzionalità tiroidea. I trapianti da *vulgaris* su *viridis* non si prestano bene a questi studi perché vi si verificano fatti d'incompatibilità (Notarnicola e Del Rosario Del Giudice).

Tutto questo complesso di ricerche permette, confrontando la velocità di accrescimento di un arto trapiantato con quella dell'arto rimasto in situ, di studiare l'ambiente endocrino del portatore. Nel nostro caso la larva portatrice è stata trattata con forti dosi di raggi X, e perciò la velo-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(1) T. PERRI in « Riv. di Biologia », vol. 50 (1958). Rinvio a questo lavoro per altri dati bibliografici.

cità di accrescimento di un arto normale trapiantato su di essa ci svela in che misura il suo ambiente endocrino è variato (diminuito d'intensità) per effetto dell'irradiazione stessa.

Per meglio indagare l'importanza della funzionalità tiroidea, che appare la più interessata, ho esaminato in che misura la somministrazione di tiroxina [2] fa variare la velocità di accrescimento di un arto normale trapiantato [3] su una larva roentgenirradiata [4]. Delle altre ghiandole, particolarmente dell'ipofisi, mi occuperò in seguito.

Anzitutto ho voluto controllare la metamorfosi delle larve roentgenirradiate e trattate con la tiroxina. Ho perciò irradiato larve giovanissime di *Bufo vulgaris* con dosi di 2.000 o di 3.000 o di 6.000 *r* e poi le ho tenute in soluzione di tiroxina alla concentrazione di 1 : 5.000.000. Lasciando da parte le alterazioni microscopiche che presentano queste larve, mi limito qui a ricordare che esse subiscono una precoce e rapida metamorfosi, come se al trattamento con tiroxina avessi sottoposto larve non roentgenirradiate della stessa età. Uguale comportamento hanno presentato le larve già irradiate da vari giorni. Adunque la roentgenirradiazione non ostacola, almeno in misura apprezzabile, l'azione della tiroxina sulla metamorfosi. Benché altri Autori si fossero già occupati della metamorfosi di larve di Anfibi roentgenirradiate e poi trattate con preparati tiroidei, questo controllo era necessario per l'interpretazione dei casi che ora vedremo, in cui al trapianto ho fatto seguire il trattamento con tiroxina.

Passando ora più direttamente all'argomento del presente lavoro, vediamo l'accrescimento che presenta un arto normale di *Bufo vulgaris* trapiantato su larva roentgenirradiata della stessa specie. È da tener presente che nei trapianti di arti tra *vulgaris* normali sia allo stadio embrionale sia allo stadio larvale, l'arto trapiantato giunge ad essere di poco più corto del normale, solo in alcuni casi è molto più corto.

Le larve portatrici sono state irradiate con dosi di 2.000 *r* allo stadio di larva giovanissima, o con dosi di 2.500 *r* in stadi un po' più avanzati. Si osserva, per quanto più interessa, che gli arti di queste larve presentano, com'era da attendersi, una fortissima diminuzione nel loro accrescimento e talora sono del tutto atrofici, in rapporto alle differenze di stadio e di dose.

(2) Thyroxin « Roche », in fiale. Le larve vennero tenute in soluzione di tiroxina, cambiata ogni due giorni, per tutta la durata dell'esperimento.

(3) I trapianti di cui tratto in questo lavoro furono per me eseguiti dalla sig.na L. Notarnicola, Assistente in questo Istituto.

(4) Le roentgenirradiazioni sono state eseguite con un apparecchio Gilardoni M. D. Tensione di 50.000 volt, intensità di 7 milliampere, senza filtro, distanza larve–anticatodo cm 15. Le larve erano tenute in una vaschettina di vetro con un po' di acqua comune, sempre nella stessa quantità.

Orbene, nei casi eseguiti di trapianto di un arto normale su larva roentgenirradiata di *vulgaris* (trapianti ortotopici) (ved. fig. 1) si ha che l'arto trapiantato si accresce molto più dell'arto proprio della larva portatrice, ma nello stesso tempo si accresce molto meno che nel trapianto su larva normale. Nei casi che ho esaminato microscopicamente, l'arto trapiantato si presenta in confronto all'irradiato, per limitarmi a questi accenni, con muscoltura molto più abbondante, anche nel sistema nervoso si notano chiare differenze tra il lato del trapianto e l'altro. Si osserva inoltre che quanto più si accresce l'arto proprio della larva irradiata (ossia quanto minori sono stati gli effetti della roentgenirradiazione) tanto più si accresce l'arto normale trapiantato.

A distanza di più giorni dall'irradiazione, la diminuzione della velocità di accrescimento dell'arto normale trapiantato si accentua sempre di più, ma ciò può dipendere non solo da una progressiva riduzione della funzionalità endocrina ma anche dall'instaurarsi, nella larva roentgenirradiata, di fatti di digiuno, il quale per sé stesso può diminuire o fermare l'accrescimento di un arto.

Fig. 1. – *Bufo vulgaris*. Trapianto ortotopico dell'abbozzo dell'arto posteriore destro di una larva normale su una larva roentgenirradiata.

L'arto trapiantato si è accresciuto molto di più dell'arto del portatore (al momento dell'operazione erano ambedue allo stadio a paletta). (Disegno).

Come ho già accennato, l'ambiente endocrino delle larve roentgenirradiate di *vulgaris* è stato pure saggiato con trapianti di un arto di *viridis* normali. *Bufo viridis* e *Bufo vulgaris* sono due specie sistematicamente assai vicine, ma *viridis* va in metamorfosi più tardi e raggiunge dimensioni maggiori; i suoi arti, in particolare, hanno un accrescimento molto più lento e raggiungono dimensioni maggiori. Debbo qui ricordare che, come dissi allo inizio di questo lavoro, un arto di *viridis* trapiantato su *vulgaris* normale cresce molto più velocemente che se fosse rimasto *in situ*. Quest'anno ho avuto varie riconferme di questo fatto.

Orbene, nel trapianto di un arto da *viridis* normale sul fianco di larva roentgenirradiata di *vulgaris* si osserva costantemente che l'arto trapiantato presenta uno scarso accrescimento (ved. fig. 2), molto minore che nel trapianto da *viridis* normale sul fianco di *vulgaris* normale.

Se l'arto di *vulgaris* normale trapiantato su *vulgaris* roentgenirradiato subisce una chiara diminuzione nella velocità di accrescimento, una diminuzione ancora più netta si ha nel trapianto da *viridis* normale su *vulgaris* roentgenirradiato. Tale risultato è ribadito dal comportamento di un arto normale di *viridis* trapiantato su *viridis* roentgenirradiato.

In vari casi di trapianto di un arto normale di *viridis* su larva roentgenirradiata di *vulgaris*, ho tenuto il portatore in soluzione di tiroxina alla concentrazione di 1 : 50.000.000. In queste condizioni l'arto di *viridis* presenta un accrescimento di gran lunga maggiore (ved. fig. 3). Ciò mostra come nella roentgenirradiazione si renda soprattutto manifesta una diminuzione della funzionalità tiroidea. Si è notato pure che la velocità di accresci-

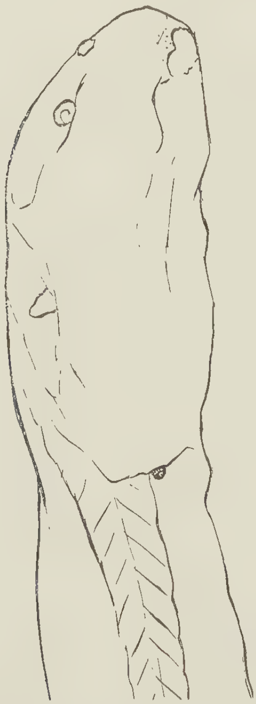


Fig. 2. – Trapianto dell'abbozzo di un arto posteriore di giovanissima larva di *Bufo viridis* normale sul fianco di larva roentgenirradiata di *Bufo vulgaris*.

Il trapiantato si è accresciuto pochissimo. (Disegno).

Fig. 3. – Trapianto come in fig. 2 e successivo trattamento con tiroxina.

Notevole accrescimento del trapiantato. (Disegno).

mento in quest'arto è minore che in quello del donatore se anche quest'ultimo viene sottoposto alla stessa soluzione di tiroxina, il che denota che la funzionalità tiroidea non è la sola ad essere interessata dalla roentgenirradiazione. In questo gruppo di esperienze le larve portatrici sono state tenute in vita, per lo più, sino all'inizio della metamorfosi anticipata dalla tiroxina.

Nei pochi casi di trapianto di un arto da *viridis* normali su *viridis* roentgenirradiati, allo stadio di arti già a paletta, ho osservato che l'arto trapiantato risente notevolmente delle modificazioni subìte dall'ambiente del portatore e si arresta quasi completamente nello sviluppo; se poi il porta-

tore è tenuto in soluzione di tiroxina allora l'arto trapiantato presenta un buon accrescimento.

Concludendo, un arto trapiantato da larve normali di *Bufo vulgaris* o di *Bufo viridis* su larve roentgenirradiate di *Bufo vulgaris* presenta una velocità di accrescimento nettamente minore di quanto si ha nel trapianto su larve normali di *Bufo vulgaris*. Tutto lascia ritenere che ciò dipenda soprattutto da una diminuzione, provocata dalla roentgenirradiazione, dell'attività endocrina del portatore, particolarmente di quella tiroidea. Si è visto infatti che in trapianti da *Bufo viridis* su *Bufo vulgaris* roentgenirradiati, se la larva portatrice viene trattata con tiroxina, l'arto trapiantato presenta una velocità di accrescimento nettamente maggiore.

Biologia (Microbiologia). — *Aumento del tasso properdinico del siero dopo introduzione parenterale di batteriofago* [*]. Nota preliminare di LUCIANO VELLA, presentata [**] dal Corrisp. D. MAROTTA.

Durante alcune esperienze sulla immunità naturale, e in particolare nel corso di prove per mettere a punto una tecnica di titolazione della properdina mediante la fagoneutralizzazione, si è rilevato che la introduzione per via parenterale nei conigli di sospensioni di fagi diversi, attivi su numerose specie di Enterobatteriacee, determina un aumento notevole del tasso properdinico del siero. Tale fenomeno è stato rilevato mediante la tecnica dell'inibizione dell'emolisi e mediante la tecnica della neutralizzazione fagica. In questo ultimo caso è stato impiegato un sistema costituito da un ceppo di micobatterio e dal fago omologo (in luogo del sistema adottato da Barlow e van Vunakis, basato sulla neutralizzazione del fago T2, attivo su *Escherichia coli* B). È stata introdotta questa modificazione per essere certi che la fagoneutralizzazione fosse dovuta veramente ad azione properdinica (azione antivirale aspecifica) e non ad anticorpi specifici del siero di coniglio antifago–*coli*, che avrebbero potuto formarsi dopo inoculazione parenterale del fago.

La titolazione del tasso properdinico mediante l'impiego del sistema *Mycobacterium pellegrini*–fago omologo presenta notevoli vantaggi su quello adottato da Barlow e coll., prima di tutto per la stabilità del fago *pellegrini* e la facilità della sua titolazione, per lo meno uguale a quella del sistema *coli* B-fago T2. Inoltre in patologia non si conoscono infezioni sostenute da *Myc. pellegrini* e pertanto il riscontro di anticorpi antivirali sarebbe senz'altro da attribuire ad azione properdinica, mentre è possibile riscontrare anticorpi specifici anti–fago *coli* in soggetti portatori del fago T2.

Il fenomeno riscontrato, dell'aumento cioè del tasso properdinico del siero dopo introduzione parenterale di batteriofago, deve venire approfondito in relazione allo studio delle sostanze che abitualmente determinano tale aumento (zymosan, altre sostanze di natura polisaccaridica, ecc.). Infatti il filtrato fagico contiene, oltre alle particelle virali, tutti i componenti della cellula lisata, cui potrebbe essere imputata l'azione biologica riscontrata.

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

Biologia (Microbiologia). — *Produzione di estratti microbici mediante criomacinazione dei corpi batterici* (*). Nota preliminare di ALFREDO ZAMPIERI, presentata (**) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Se si sottopone un materiale organico a temperature oscillanti intorno ai — 40° C, tale materiale perde ogni caratteristica di elasticità e plasticità, diviene indeformabile e presenta la stessa fragilità del ghiaccio a quella temperatura.

I microrganismi posti a — 60° C, si comportano nella stessa maniera.

Per questo motivo una sospensione batterica congelata può essere macinata, impiegando un mezzo meccanico, con le stesse modalità con cui si tritura un cubo di ghiaccio: si avrà rottura dei microrganismi là dove le linee di frattura della massa congelata, posta sotto processo di macinazione, coinvolgeranno le singole cellule batteriche.

Il rendimento di rottura, per una sospensione omogenea di una data concentrazione batterica, sarà quindi in rapporto al volume dei singoli frammenti della massa macinata.

Trattandosi di cellule batteriche dell'ordine di grandezza di 1–10 μ è necessario disporre di un sistema semplice e di rapida esecuzione, che possa triturare il materiale congelato in polvere estremamente fina.

Tale problema è stato risolto impiegando una camera ovoide in acciaio inossidabile del diametro di 20 cm $\times$ 12 cm, le cui pareti hanno uno spessore di 12 mm. Una robusta flangia al centro dell'asse maggiore della camera ne permette la chiusura ermetica.

La macinazione viene ottenuta da tre sfere di acciaio inossidabile del diametro di 20 mm che vengono poste nell'interno del mulino prima di metterlo in azione.

La sospensione batterica viene immessa sterilmente nella camera. Dopo chiusura ermetica, si pone il sistema in un bagno refrigerante a — 60° C. In 10 minuti tutto il complesso raggiunge questa temperatura.

Si pone quindi il mulino su di un supporto che consente un movimento di va e vieni dell'escursione di 60 cm, mosso da una biella–manovella. Si fa agire questo agitatore per 3 minuti alla velocità di 120–150 battute al minuto. Dopo questo tempo si ottiene una polvere cristallina, bianca, perfettamente asciutta che conserva ancora una temperatura di — 40° C, i cui elementi hanno una grandezza piuttosto omogenea fra i 5 e i 12 μ.

Al procedimento, abbiamo dato il nome di « criomacinazione ».

Per sospensioni batteriche di 10^9, 10^{10} cellule per cm^3 (sospensioni in soluzione tampone fosfato M/15 pH 7) si ha un rendimento di rottura del 60 %.

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità.
(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

L'indice di sopravvivenza, dopo questo primo ciclo di macinazione, è del 15 %. Risulta quindi che il restante 25 % di cellule apparentemente integre sono lese nelle loro funzioni vitali.

Decongelando rapidamente e ricongelando la sospensione, sempre nel mulino, e macinando per un altro periodo di 3 minuti, il rendimento in rottura sale al 75–80 %, mentre l'indice di sopravvivenza scende al 4 %. Con un terzo ciclo si ha il 90–95 % di rottura, con un indice di sopravvivenza dello 0,8, 0,5 %.

Gli estratti vengono quindi raccolti ancora allo stato di polvere, disciolti a 0°C in soluzione tampone (pH 7), e centrifugati, sempre a 0°C, a 18.000 r.p.m. per 30 minuti, onde allontanare il materiale cellulare non solubile. Se il materiale non viene utilizzato immediatamente, si liofilizzerà conservandolo in fiale sotto atmosfera di gas inerte.

Con questo sistema, prepariamo con successo da due anni antigeni batterici ad alto contenuto proteico (6–8 mg/cm^3), partendo anche da microrganismi, quali i micobatteri, notoriamente resistenti a tutti gli altri processi di macinazione.

Patologia. — *Metabolismo dello* I^{131} *in rapporto alla comparsa della funzione tiroidea* (*). Nota di GAETANO SALVATORE, ITALO COVELLI e JEAN ROCHE, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

La ghiandola tiroidea, almeno dal punto di vista morfologico, è presente, come è noto, solo nella classe dei vertebrati. Sin dalla fine del secolo scorso, però, Antonio Dohrn (1875, 1886) aveva prospettato l'ipotesi che il cosidetto endostilo dei protocordati fosse l'omologo della tiroide dei vertebrati superiori.

I Ciclostomi che sono i vertebrati primitivi, allo stato adulto posseggono già una tiroide ben formata con una struttura follicolare, ma durante la lunga vita larvale (Ammoceti) essi non presentano alcuna traccia di tessuto tiroideo ma solo un sacco ghiandolare sottofaringeo che viene chiamato endostilo. Marine (1913) e Leach (1939) hanno dimostrato che una parte del cosidetto endostilo degli Ammoceti si trasforma al momento della metamorfosi, in follicoli tiroidei, ma Horton (1932), ha negato funzione endocrina all'endostilo, giacché, al contrario della tiroide delle Lamprede adulte, esso non conterrebbe Iodio rivelabile con mezzi chimici né potrebbe accelerare la metamorfosi dei girini di rana.

Gorbman e Creaser (1942) hanno notato invece, con tecniche isto-autoradiografiche, che alcune zone dell'endostilo degli Ammoceti sono capaci di fissare lo Iodio radioattivo e Leloup e Berg (1954) vi hanno trovato anche aminoacidi iodati. Secondo Gorbman (1955) l'endostilo delle larve dei Ciclostomi (vertebrati) non corrisponde esattamente all'endostilo dei Tunicati e degli altri invertebrati, anche perché quest'ultimo (come nelle Ascidie, nell'Anfiosso, ecc.) non è capace di fissare lo iodio. Più recentemente però tanto in *Ciona intestinalis* (Barrington e Franchi, 1956 *a*; Barrington, 1957) quanto nell'Anfiosso (Thomas, 1956; Barrington, 1958) è stata trovata fissazione di iodio radioattivo nell'endostilo ed è stata, pertanto, riaffermata l'analogia di questo con l'endostilo delle larve dei Ciclostomi (Barrington e Franchi, 1956 *b*) e quindi con la tiroide dei vertebrati superiori.

Tali ricerche sono state però eseguite mediante istoradiografia che permette solo di localizzare la fissazione dello iodio, dimostrandone al massimo la natura organica.

Per la dimostrazione della funzione tiroidea, e quindi della comparsa di tale funzione nella filogenesi, non è invero sufficiente osservare la fissazione dell'alogeno o la sua concentrazione dal mezzo esterno, ma è necessario provare anche la biosintesi delle iodotironine ossia dei veri ormoni tiroidei. Il

(*) Lavoro eseguito nella Stazione Zoologica e nell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1959.

recente sviluppo di alcune tecniche (radiocromatografia, radiocromatoelettroforesi ecc.) ci ha permesso di eseguire uno studio comparativo sul metabolismo dello iodio in rapporto alla comparsa della funzione tiroidea, definita secondo il suddetto criterio. L'esposizione dei primi risultati ottenuti sulle larve dei Ciclostomi (Ammoceti di *Petromyzon planeri*), su un tunicato appartenente alla famiglia delle Ascidie (*Ciona intestinalis*) e su alcune specie di Gorgonidi (*Eunicella verrucosa*) costituisce l'oggetto della presente nota.

Parte sperimentale.

1) *Fissazione dello* I^{131} *e ripartizione della radioattività.*

Gli animali venivano incubati a + 20° C con aereazione in presenza di NaI^{131} senza portatore (da 0,01 a 0,2 μC/ml). Ogni 12 ore si prelevava 1 ml dell'acqua di immersione al fine di determinare, mediante la diminuzione della radioattività, l'eventuale fissazione dello I^{131} e la cinetica di essa in funzione del tempo. Si ottenevano così delle curve di fissazione che esprimono la velocità del fenomeno e la rapidità con la quale si raggiunge un eventuale equilibrio. La radioattività di ciascun campione era misurata a mezzo di un contatore a scintillazione a cristallo forato NaI (Tl). L'I^{131} fissato veniva calcolato, tenuto conto della decrescenza, in per cento della quantità totale presente al tempo zero. Al termine di ciascuna esperienza si effettuavano anche controlli diretti della fissazione dello I^{131}.

Negli Ammoceti si isolavano poi la regione dell'endostilo ed il siero; dopo omogeneizzazione in Potter a freddo si ottenevano per centrifugazione il resto dello scheletro e gli altri tessuti. Queste 4 frazioni venivano separatamente misurate e si analizzavano sia la regione dell'endostilo sia gli altri tessuti molli.

In *Ciona intestinalis* si isolava la regione dell'endostilo dagli altri tessuti e ambedue queste frazioni venivano misurate e analizzate separatamente.

In *Eunicella verrucosa* si separavano accuratamente i tessuti molli dall'asse sclero–proteico ed anch'essi venivano misurati e analizzati.

2) *Analisi qualitativa e quantitativa dei composti iodati presenti nei vari tessuti.*

a) Tecniche analitiche generali. – La separazione degli ioduri marcati veniva effettuata mediante elettroforesi su carta in tampone di carbonato d'ammonio/ammoniaca a pH 8,9 (2 ore, 4 V per cm).

L'analisi cromatografica (monodimensionale o bidimensionale) veniva eseguita con i sistemi: alcool amilico tert. sat. di NH_4OH 2 N (senso ascendente) e *n*–butanolo/acido acetico/acqua (78 : 5 : 17, senso discendente). La localizzazione delle macchie radioattive veniva accertata mediante autoradiografia, l'identificazione di esse mediante sostanze di riferimento pure, incorporate nella miscela da analizzare o deposte al lato di essa e rivelate con la reazione

di Pauly. La ripartizione quantitativa delle varie frazioni radioattive separate mediante l'analisi elettroforetica e cromatografica, veniva valutata in base all'attività presente sulle rispettive macchie, mediante esplorazione discontinua di tutto il foglio a mezzo di 2 tubi G. M. affacciati e strettamente ravvicinati ovvero mediante scintillatore a cristallo piatto con schermo direzionale in piombo.

b) Preparazione degli estratti per l'analisi elettroforetica e cromatografica. – Le regioni dell'endostilo, tanto degli Ammoceti che delle Ascidie, venivano dapprima omogeneizzate a pH alcalino, poi sottoposte ad idrolisi enzimatica con pancreatina e papaina. L'idrolizzato veniva liofilizzato e la polvere così ottenuta veniva delipidata con etere privo di perossidi. Si estraevano poi i composti iodati con *n*–butanolo acido, l'estratto butanolico veniva ripetutamente purificato per eliminare pigmenti ed impurezze mediante ripetute cromatografie ed elettroforesi preparative e si procedeva infine all'analisi cromatografica.

I tessuti molli di *Ciona* e di *Eunicella verrucosa* venivano similmente trattati; gli altri tessuti molli degli Ammoceti venivano trattati con analoga procedura ma senza idrolisi enzimatica.

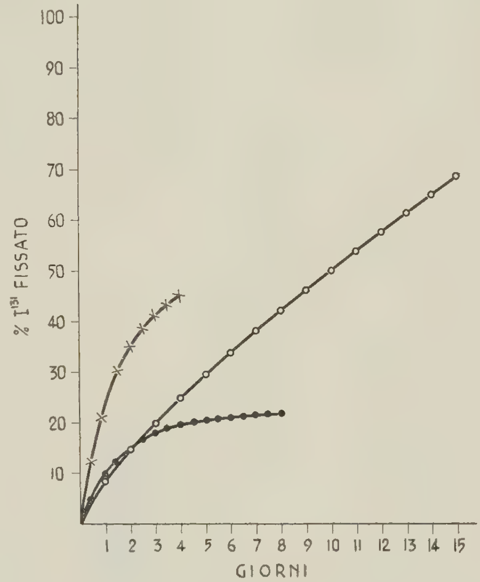


Fig. 1. – Fissazione in funzione del tempo dello I^{131} (attiv. spec. ~ 5 mC/µg) aggiunto all'acqua di immersione di:

●—● Ammoceti di *Petromyzon planeri* (acqua di fonte: 1500 ml. per 100_{gr} di tessuto; I^{131}: 0,2 µC/ml).

×—× *Ciona intestinalis* (acqua di mare filtrata Golfo di Napoli; 2500 ml 100_{gr} di tessuto; I^{131} : 0,06 µC/ml).

o—o *Eunicella verrucosa* (acqua di mare filtrata Golfo di Napoli: 2500 ml per 30_{gr} di tessuto; I^{131} : 0,01 µg/ml.

L'asse sclero–proteico delle Gorgonidi veniva invece previamente digerito mediante NaOH 6 N.

RISULTATI.

1) *Cinetica della fissazione dello* I^{131}.

Nella fig. 1 è riportata la curva di fissazione in funzione del tempo, per 100 gr di tessuto, di Ammoceti di *Petromyzon planeri*, *Ciona intestinalis* e *Eunicella verrucosa*.

Si noti che mentre la fissazione dello I^{131} in *Eunicella verrucosa* è funzione pressochè lineare del tempo, quella in *Ciona intestinalis* e negli Ammoceti è

inizialmente più rapida, raggiungendosi l'equilibrio nel primo caso dopo 4 giorni e nel secondo dopo 8. In ogni caso la fissazione dello I^{131} in *Ciona intestinalis* è più rapida e quantitativamente più importante che negli Ammoceti; in *Eunicella verrucosa* essa raggiunge in 15 giorni circa il 70 °/₀ dello iodio presente nel mezzo ambiente. L'aggiunta di tiocianato arresta la fissazione dello iodio che ricomincia dopo l'allontanamento dell'inibitore, l'azione del quale è dunque perfettamente reversibile.

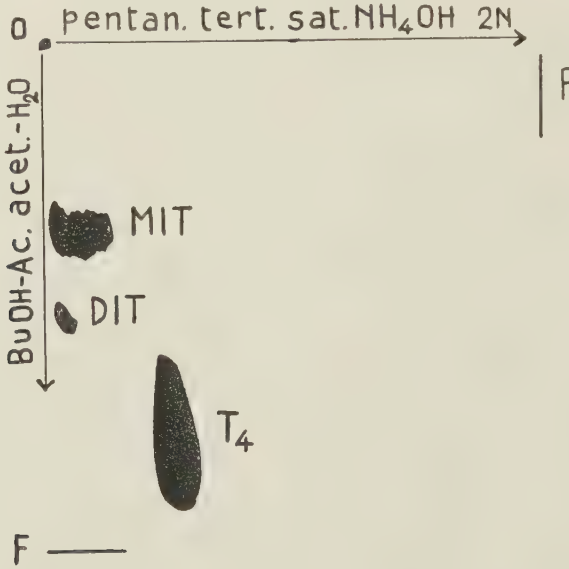


Fig. 2. – Autoradiogramma da un cromatogramma bidimensionale (I dimensione: alc. amilico tert. sat. NH_4OH 2 N, senso ascendente; II dimensione: BuOH -ac. acetico -H_2O (78–5–17), senso discendente, $t = 17°$ C, Wh. n. 1) dell'estratto butanolico dell'omogenato dell'endostilo di Ammoceti di *Petromyzon planeri* dopo 8 giorni di fissazione dello I^{131}.

O = origine; F = fronte; MIT = monoiodotirosina; DIT = diiodotirosina; T_4 = tiroxina.

2) *Ripartizione della radioattività nei vari tessuti.*

Negli Ammoceti le strutture ove lo iodio si concentra maggiormente sono l'endostilo e la corda dorsale: in esse si ritrova circa il 40 °/₀ dello iodio totale fissato e circa il 70 °/₀ dello iodio organico presente nell'animale.

Se si considera che l'endostilo e la corda dorsale insieme rappresentano meno del 10 °/₀ del peso totale dell'animale, si può affermare che il potere di fissare lo iodio è localizzato quasi esclusivamente in tali strutture. Dopo 4 giorni d'incubazione l'endostilo contiene una percentuale di I^{131} maggiore di quella dello scheletro, mentre dopo 8 giorni tale rapporto si inverte: ciò dimostra che la fissazione dello iodio nell'endostilo è più rapida di quella nella corda dorsale e indica quindi che anche i due meccanismi sono diversi. Infatti mentre la fissazione dell'alogeno nell'endostilo raggiunge più rapida-

mente il suo valore massimo ottenendosi in seguito l'equilibrio, la fissazione nella corda dorsale è, anche se quantitativamente maggiore, più lenta e di natura aspecifica.

In *Ciona intestinalis* la regione dell'endostilo sembra che non sia la sede del processo di fissazione dello iodio giacché essa, pur rappresentando l'1 °/₀ del peso totale, contiene invece solo lo 0,25 °/₀ dello iodio fissato.

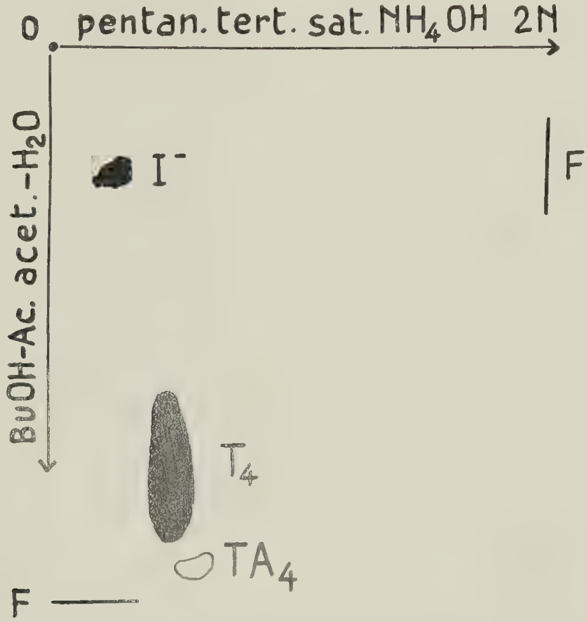


Fig. 3. – Autoradiogramma dell'analisi cromatografica bidimensionale (I dimensione: alc. amilico tert. sat. NH_4OH 2 N, senso ascendente; II dimensione: BuOH-ac. acetico-H_2O 78 : 5 : 17, senso discendente, $t = 17°$ C, Wh. n. 1) dell'estratto butanolico dell'omogenato dei tessuti molli (senza endostilo) di Ammoceti di *Petromyzon planeri* dopo 8 giorni di fissazione dello I^{131}.

O = origine; F = fronte; I^- = ioduri; T_4 = tiroxina; TA_4 = ac. tetraiodotiroacetico.

In *Eunicella verrucosa* l'asse corneo, che rappresenta circa i 2/3 del peso fresco totale, contiene l'80 °/₀ dell'I^{131} fissato; i tessuti molli dunque il 20 °/₀ residuo. Ciò nonostante in rapporto al peso secco questi tessuti rappresentano il 5 °/₀ del peso totale e concentrano dunque lo I^{131} più attivamente che l'asse corneo.

3) *Analisi qualitativa e quantitativa dei composti organici presenti nei vari tessuti dopo incubazione dell'animale con* I^{131}.

L'endostilo dell'Ammocete mostra la presenza di iodotirosine (MIT e DIT) e di iodotironine (T_3 e T_4); nel gruppo delle iodotirosine la MIT è sempre in quantità maggiore che la DIT, ma tale rapporto varia nel tempo (20 : 1 dopo 4 giorni di fissazione e 4 : 1 dopo 8 giorni) (ved. fig. 2); parallelamente

la triiodotironina (T_3) è in quantità molto maggiore dopo 4 giorni mentre la tiroxina è praticamente il solo ormone presente dopo 8 giorni.

Gli altri tessuti dell'Ammocete contengono una percentuale di ioduri molto maggiore, ma mancano assolutamente le iodotirosine ossia i precursori

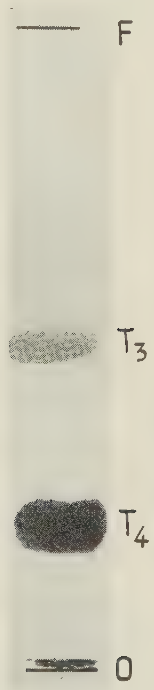


Fig. 4.

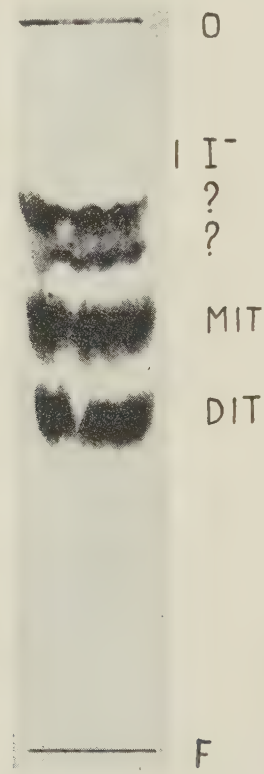


Fig. 5.

Fig. 4. – Autoradiogramma da un cromatogramma (alc. amilico tert. sat. NH_4OH 2 N, senso ascendente, 40 h, $t = 17°$ C, Wh n. 1) dell'estratto butanolico dei prodotti dell'idrolisi enzimatica dell'omogenato dei tessuti (senza endostilo) di *Ciona intestinalis*.

O = origine; F = Fronte; T_4 = tiroxina; T_3 = 3,5,3'-triiodotironina.

Fig. 5. – Autoradiogramma da un cromatogramma [BuOH–ac. acetico–H_2O (78–5–17), senso discendente, $t = 17°$ C, 16 h, Wh. n. 1] dell'estratto butanolico dell'omogenato dei tessuti molli di *Eunicella verrucosa*.

O = origine; F = fronte; MIT = monoiodotirosina; DIT = diiodotirosina; ? = macchie non identificate, non corrispondenti agli ioduri (I^-).

degli ormoni (ved. fig. 3). La situazione è dunque perfettamente analoga a quanto avviene nei vertebrati superiori dove le iodotirosine sono presenti solo nella ghiandola tiroide e non nei tessuti periferici o nel sangue.

L'endostilo di *Ciona* mostra invece solo la presenza di tiroxina e non è stato possibile mettere in evidenza altri aminoacidi iodati, anche per la debole quantità di radioattività in esso ritrovata.

Negli altri tessuti di *Ciona* si ritrova invece la maggior parte dello I^{131} fissato, ma l'80 % dello iodio organico ivi contenuto non è direttamente estraibile con il butanolo acido perché è incorporato nel senso di una o più particolari proteine contenenti gli aminoacidi iodati. Questi infatti possono venire liberati da tali proteine mediante idrolisi enzimatica e ciò lascia supporre che queste siano funzionalmente diverse dalle scleroproteine dell'asse corneo delle Gorgonidi nelle quali è necessaria l'idrolisi alcalina per liberare gli eventuali aminoacidi iodati in essa presenti. In ogni caso, mentre nella frazione direttamente estraibile col butanolo si trovano solo triiodotironina e tiroxina (ved. fig. 4), nell'idrolizzato enzimatico della frazione non estraibile si trovano anche i precursori degli ormoni, ossia monoiodotirosina e diiodotirosina. È dunque evidente che la biosintesi degli ormoni avviene nel seno di tali proteine che possono essere digerite mediante idrolisi enzimatica, senza che per il momento possa dirsi se esse siano localizzate in un particolare organo o tessuto.

Sia nei tessuti che nell'asse corneo di *Eunicella verrucosa* si trovano solo le iodotirosine e nessuna traccia di iodotironine marcate con I^{131} (ved. fig. 5). Nei tessuti esiste una quantità di diiodotirosina proporzionalmente molto maggiore di quella presente nell'asse corneo.

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

I risultati ottenuti dimostrano anzitutto che sia le larve dei Ciclostomi sia *Ciona intestinalis* sia *Eunicella verrucosa* sono capaci di fissare gli ioduri presenti nel mezzo esterno. In essi si raggiunge una concentrazione di I^{131} che è molte volte superiore a quella del mezzo ambiente. L'esame delle curve di fissazione tuttavia lascia già supporre che il meccanismo interessato sia di diversa natura nelle larve dei Ciclostomi e nei Tunicati da un lato e negli Antozoari dall'altro.

I Ciclostomi anche allo stato larvale sono sicuramente dotati di funzione tiroidea localizzata nella regione dell'endostilo. Gli aminoacidi iodati (iodotirosine e iodotironine) sono incorporati nel seno di una proteina dalla quale essi possono essere liberati a mezzo dell'idrolisi enzimatica. In questi organismi il rapporto tra monoiodotirosina e diiodotirosina e quello tra triiodotironina e tiroxina dopo 4 giorni di fissazione è spostato in favore dei composti parzialmente alogenati: la biosintesi degli ormoni sembra essere dunque un processo relativamente lento.

In *Ciona intestinalis* (Tunicati) la fissazione dello I^{131} è maggiore e la sua concentrazione in rapporto al mezzo esterno è molto più forte: la biosintesi degli ormoni tiroidei è più rapida in tali animali che negli Ammoceti; tuttavia essa non sembra aver luogo nella regione dell'endostilo.

Negli Antozoari invece, pur essendovi un'attiva fissazione dell'alogeno non può in alcun modo parlarsi di presenza di attività tiroidea, giacché in

essi, anche dopo 15 giorni, sono presenti solo le iodotirosine e non le iodotironine.

Resta dunque confermato che la concentrazione dello iodio per gli invertebrati e i vertebrati inferiori è l'espressione di due meccanismi. La fissazione sui nuclei tirosinici delle proteine di sostegno è di natura aspecifica e non è seguita dalla formazione delle iodotironine. Nelle larve dei Ciclostomi e nei Tunicati esiste, al lato di tale fissazione aspecifica dell'alogeno sulle scleroproteine, una concentrazione attiva di iodio nel seno di proteine funzionalmente più specializzate che permettono la biosintesi rapida e quantitativamente importante degli ormoni tiroidei [1]. Solamente l'esistenza di questo tipo specifico di metabolismo dello iodio deve fare ammettere la presenza di attività tiroidea. Viene quindi dimostrato per la prima volta che la funzione tiroidea non è limitata ai soli vertebrati, giacché essa esiste, almeno dal punto di vista funzionale, anche nei Tunicati.

Bibliografia.

E. J. W. Barrington, «J. Mar. Biol. Ass. U. K.», *36*, 1 (1957).

E. J. W. Barrington, «J. Mar. Biol. Ass. U. K.», *37*, 117 (1958).

E. J. W. Barrington and L. L. Franchi, «Nature», *177*, 432 (1956*a*).

E. J. W. Barrington and L. L. Franchi, «Quart. J. Micr. Sci.», *97*, 393 (1956*b*).

A. Dohrn, *Der Ursprung der Wirbelthiere und das Princip des Funktionswechsels*. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1875.

A. Dohrn, «Mitt. Zool. Stat. Neapel», *6*, 49 (1886).

A. Gorbman and C. W. Creaser, «J. Exp. Zool.», *89*, 391 (1942).

A. Gorbman, «Physiol. Rev.», *35*, 336 (1955).

F. M. Horton, «J. Exp. Biol. and Med.», *11*, 257 (1932).

W. J. Leach, «J. Morphol.», *65*, 459 (1939).

J. Leloup and O. Berg, «C. R. Acad. Sci.», *238*, 1069 (1954).

D. Marine, «J. Exptl. Med.», *17*, 379 (1913).

I. M. Thomas, «J. Mar. Biol. Ass. U. K.», *35*, 203 (1956).

(1) Sulla base di esperienze condotte sull'Anfiosso lanceolato riteniamo molto probabile la presenza di tiroxina nell'endostilo di questo invertebrato, tuttavia i risultati non sono riportati in questa nota e le ricerche proseguono su tale argomento.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Giuseppe Armellini

tenuta (*) dal Socio VITTORIO NOBILE

Nella notte tra il 15 e il 16 luglio dello scorso anno un incendio improvvisamente divampato nella cupola maggiore dell'osservatorio astronomico di Monte Mario distruggeva con la cupola stessa il grande equatoriale di Steinheil-Cavignato e determinava, per la gravissima emozione destatasi in Giuseppe Armellini, un fatale collasso cardiaco e la morte quasi istantanea dell'insigne astronomo e nostro carissimo collega. L'Astronomia al cui culto l'Armellini aveva votato la propria esistenza, a cui nessuno dei pensieri e dei sentimenti di Lui rimaneva estraneo e che con le grandiose sue visioni e con gli alti suoi problemi aveva affascinato lo spirito e impegnato tutte le potenti energie intellettuali dell'uomo, era così presente a Lui anche nell'ora suprema del passaggio ad una vita superiore.

Non è vana espressione il parlare di culto: l'Armellini si dedicò alla ricerca nel campo della scienza prediletta con l'animo di chi compia una missione e il segno della predestinazione si palesò in tutte le fasi della carriera di Lui.

Nato a Roma il 24 ottobre 1887, Egli mostrò, appena in età di rivolgersi agli studi, che quello era il suo campo d'azione e il suo mondo. Così, fin dagli anni dell'adolescenza, quando l'anima giovanile è generalmente protesa verso un mondo di sogni e di gioconde speranze, egli godeva, in una serena austerità di vita, solo delle gioie intime che gli offriva la sua ragionata e appassionata contemplazione della natura, e di quelle che gli venivano dalla ammirazione per tutte le conquiste del pensiero umano. Questa concezione quasi ascetica della vita, che si riscontra non di rado in giovani di eccezione, ma che nell'Armellini si rivelò fin dalla tenera età con una determinatezza singolare, mostrava chiaramente l'affermarsi di una fortissima individualità e di una mente singolarmente dotata e già rivolta verso alte mete.

La realizzazione di queste grandi promesse si effettuò nel modo più completo con lo svolgersi della vita scientifica dell'eminente Uomo. Ciò mi propongo di far presente oggi: grato dell'onore conferitomi dall'Accademia con l'assegnazione di tale compito, ma pure dolente che per la vastità

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

della materia – più di duecento sono gli scritti dell'Armellini – io sia costretto a fermarmi di preferenza sui lavori che sono da considerarsi i più rappresentativi per la grande importanza dei risultati e pel carattere di assoluta originalità.

Il primo lavoro dell'Armellini riguarda un problema da cui il giovane autore aveva tratto argomento per la sua tesi di laurea in matematica: lavoro che poi, maggiormente sviluppato in alcuni punti particolari, fu pubblicato nel 1913, cioè in epoca posteriore di un solo anno a quello della laurea predetta.

Si può con sicurezza affermare che quello studio è da considerarsi tra i più importanti dell'autore. Scopo della ricerca è l'esame delle perturbazioni determinate nel movimento orbitale del satellite V di Giove da cause diverse e cioè non solo da un'azione diretta del Sole e degli altri satelliti ma anche da un'altra per così dire anormale, riferibile all'astro principale, in quanto che, a causa della prossimità del satellite al pianeta e della presumibile non omogenea distribuzione di massa nell'interno di questo, non può supporsi *a priori* che la sollecitazione dovuta al corpo principale sia rappresentabile con una forza centrale e che il corrispondente moto del satellite sia semplicemente kepleriano. Questo moto deve dunque necessariamente dipendere da un potenziale di tipo più complesso; l'Armellini è così condotto ad assumere, per precisarlo, un'espressione già indicata dal Pizzetti e dedotta in base al teorema di Stokes nel caso dell'ellissoide di rivoluzione schiacciato, che può qui essere considerato come superficie di livello. Il nostro autore evita in tal modo, non soltanto di dover ricorrere a speciali ipotesi sulla distribuzione di massa nell'interno del pianeta, ma anche il concetto stesso di perturbazione, perché il problema del moto del satellite viene affrontato non per via di approssimazioni successive, ma direttamente nella sua integrità. Dopo una accurata valutazione numerica dell'entità delle variazioni del moto kepleriano in rapporto alle varie cause accennate, l'Armellini rileva la tenuità degli effetti dipendenti dalle prime due cause e nota pertanto la possibilità di trattare a parte il problema che si pone per la predetta modifica del potenziale dell'attrazione. Egli riesce quindi a far dipendere la conoscenza del moto relativo del satellite considerato dall'integrazione di un sistema di tre equazioni del secondo ordine, sistema che, in seguito ad ovvie e ben giustificate semplificazioni, si scinde in un sistema di due indipendenti dalla terza, la quale interviene poi per la determinazione dell'altra coordinata, quando sia stato integrato il sistema delle prime due. Questa integrazione è ridotta facilmente alle quadrature (ellittiche) e l'Armellini passa quindi alle equazioni finite introducendo le trascendenti ellittiche e servendosi, secondo i casi relativi ai vari elementi dell'orbita, tanto delle notazioni di Jacobi–Hermite quanto di quelle di Weierstrass (e delle corrispondenti serie per il calcolo numerico).

I risultati finali di tale esauriente esame del problema sono anzitutto altamente apprezzabili come esempio di un procedimento originale suscettibile di applicazione in altri importanti casi. Ma più che l'uso sagace dei

procedimenti matematici e l'avveduta scelta della via più opportuna è da notarsi l'ampia visione che l'Armellini mostra del problema generale, il quale non poteva essere affrontato con pieno successo con i soli mezzi dell'analisi e della meccanica. Nei problemi dell'astronomia non è da pensare di poter raggiungere soluzioni *complete* se l'astronomo non serba come lume e guida delle sue concezioni teoriche quello stretto contatto con la realtà che l'osservazione è in grado di assicurare. Di ciò l'Armellini mostra fin dall'epoca di questo primo lavoro la più intima persuasione: cosa veramente singolare in un giovane venticinquenne, perché, se è vero che dai grandi maestri come quelli che l'Armellini ebbe, molte importanti cose si possono direttamente apprendere, in quanto alla esperienza questa ben difficilmente è trasmissibile e non può essere acquistata se non per via diretta e anche, non di rado, coll'ammaestramento di qualche errore.

Le ricerche dell'Armellini intorno al predetto problema davano già luogo a grandi speranze per l'astronomia italiana e tali speranze non furono deluse perché sopraggiunsero presto altre cospicue realizzazioni con contributi notevolissimi a ricerche più generali per cui il nome dell'Armellini rimane strettamente legato a quelli illustri del Levi-Civita e del Sundman.

Lo studio delle singolarità delle equazioni del moto nel problema dei tre corpi e dell'eventuale « regolarizzazione » delle equazioni medesime si impone, come è noto, pel fatto che la possibilità di rappresentare le coordinate in funzione del tempo con serie di polinomii viene a mancare - come risulta da ricerche anteriori del Painlevé e del Poincaré -- per la presenza di singolarità polari nei secondi membri delle equazioni del moto. Tali casi si verificano quando due o più dei punti (corpi) vengono a coincidere (urti binari o multipli). Rimane anche esclusa in tal caso la possibilità di conoscere il moto del sistema per tempi successivi all'istante del cosidetto urto; assume quindi una fondamentale importanza la questione della prevedibilità degli urti, ossia la determinazione delle relazioni che debbono sussistere fra i dati relativi allo stato iniziale perché qualche urto abbia a verificarsi in un tempo posteriore. Escluso il caso in cui il momento risultante delle quantità di moto del sistema sia nullo (unico caso in cui, come ha dimostrato il Sundman, può aver luogo una collisione multipla), si presentano i due problemi fondamentali della previsione degli urti e della cosidetta *regolarizzazione del moto* con opportune trasformazioni da effettuare sulle coordinate e eventualmente sulla variabile indipendente. Di preminente interesse astronomico è il primo problema per le ragioni sopra accennate, non meno importante dal punto di vista matematico è però il secondo, da cui dipende il prolungamento analitico delle soluzioni *critiche* oltre l'istante « catastrofico ».

Ricerche di fondamentale importanza si ebbero in Italia su tali problemi e a queste non mancò, come vedremo, di prender parte l'Armellini. Tali ricerche furono intraprese dal Levi-Civita che, in una serie di lavori iniziati nel 1904, pervenne alla regolarizzazione completa del problema piano dei tre corpi con un cambiamento nella variabile temporale e con una tra-

sformazione di contatto operante sulla doppia serie di variabili coniugate. Con una tale trasformazione, con cui rimane verificata la relazione differenziale che caratterizza le trasformazioni completamente canoniche, è pertanto anche assicurato il mantenimento della forma canonica delle equazioni del moto.

Con l'incitamento dell'insigne e non mai abbastanza compianto autore furono raggiunti altri importantissimi risultati: non solo in Italia, dove il Bisconcini riuscì a precisare le due condizioni (già previste dal Painlevé) necessarie per il determinarsi di un urto, ma anche fuori, in quanto che le ricerche con le quali il Sundman ha indicato la via per la soluzione generale del problema dei tre corpi, mostrano come quest'autore si sia attenuto, almeno in parte, ai procedimenti e alle direttive del Levi-Civita.

Alle ricerche medesime non mancò il contributo dell'Armellini e non potevano mancare in tale contributo quei caratteri di originalità che sono inerenti alla personalità dell'autore.

Un apporto di considerevole interesse da lui arrecato alle ricerche nel campo predetto consiste in una rettifica sostanziale e opportuna a talune concezioni del Sundman sul modo di interpretare il prolungamento analitico. Il Sundman dichiara di considerare – ai fini di quel prolungamento ottenuto con la regolarizzazione del moto – che i punti in questione siano da considerarsi *privi di materia*. L'Armellini dimostra invece come solo col partire da un concetto opposto sia possibile attribuire un chiaro significato meccanico al detto prolungamento e deduce pertanto che la restrizione posta dal Sundman è, per lo meno, non necessaria. Egli dimostra infatti, con acuta analisi, come col considerare invece di due punti geometrici due sfere perfettamente elastiche si possa verificare che i centri di queste descriverebbero, dopo l'urto, due traiettorie le quali tendono a coincidere, quando si facciano tendere a zero i due raggi, con i rami delle due curve ottenute dal Sundman col prolungamento analitico.

È poi opportuno osservare come il dissenso fra l'Armellini e il Sundman sorga da un equivoco insito nella impostazione del problema generale: equivoco che dipende da una insufficiente definizione dei *corpi*, i quali sono considerati dal Sundman in tutta la trattazione come punti geometrici. Il Sundman, ponendosi da un punto di vista strettamente astronomico, non si interessa dell'eventualità di un urto *effettivo*, ma solo della regolarizzazione delle equazioni e ciò al fine di assicurare la validità degli sviluppi in serie della meccanica celeste. Passa bensì a trattare in una seconda fase del prolungamento analitico delle soluzioni critiche e lo può in quanto che, per assolvere tale compito, gli basta operare esclusivamente sulle equazioni come *date a priori*, nelle quali i corpi sono rappresentati dai loro centri di massa, ossia da punti grometrici, le masse figurano come semplici costanti numeriche e rimane pertanto *ignorato* l'episodio dell'urto come fatto fisico e l'evento è considerato solo come la coincidenza di due punti, per cui si determina così soltanto, ai fini della integrazione del sistema, una singolarità analitica. Viene però in tal modo a mancare totalmente qualsiasi significato meccanico

del prolungamento e ciò dà luogo ad una anomalia logica nella trattazione del problema generale, anomalia che è del tutto rimossa con la interpretazione meccanica dell'Armellini.

È questo il risultato più considerevole raggiunto dal nostro autore nei suoi studi intorno al predetto fondamentale problema.

Degne di molto interesse sono tuttavia altre ricerche che egli intraprese nello stesso indirizzo, con la manifesta intenzione di pervenire ad una completa e definitiva regolarizzazione delle equazioni del moto nel caso generale del problema degli n corpi. In tali studî egli si è però limitato ad assicurare la possibilità di conseguire quel risultato – ciò che è già molto importante – e di accennare a programmi riguardo a complementi da aggiungere e alle importanti estensioni da realizzare. L'attuazione di tali programmi è stata però ostacolata, oltre che dalla continua attrazione verso nuovi problemi, da gravi impegni didattici, intesi nel senso più largo, e dall'attività di osservazione che l'Armellini infaticabilmente svolgeva. Non è tuttavia da escludere che altre idee egli abbia fermato in appunti non pubblicati sul problema della regolarizzazione. Degna di particolare rilievo è però una Nota posteriore di qualche anno all'epoca degli studî qui ricordati (1918), nella quale è indicata ben chiaramente la via da seguire per poter giungere alla determinazione del tempo in cui, nel moto dei tre corpi, ha luogo il primo urto binario posteriore ad un'epoca prestabilita.

Il problema dei moti orbitali relativi nel caso di variazione delle masse ha formato oggetto di altre importantissime ricerche dell'Armellini, ricerche proseguite poi attivamente in Italia per l'interesse destatosi in altri studiosi a seguito dei primi brillanti risultati ottenuti dal nostro autore nel campo accennato. L'Armellini ha rivolto speciale attenzione al caso delle masse decrescenti, caso che si presenta con grandissima frequenza nei sistemi stellari, dove alla perdita di energia per irradiazione deve necessariamente corrispondere un lento e continuo decremento della massa. Primo e sostanziale risultato di quelle ricerche è stata la dimostrazione che nei sistemi stellari binari col decrescere della massa totale deve aversi necessariamente un andamento progressivamente crescente nella variazione del semiasse maggiore dell'ellisse osculatrice. Una classifica dei detti sistemi in base alla loro *età* (relativa) si rende pertanto possibile e tale classifica si trova in pieno accordo con le conclusioni alle quali si è condotti al riguardo con l'esame delle caratteristiche spettrali.

In quanto agli effetti sulla eccentricità delle orbite si determinò un disaccordo tra i primi risultati teorici dell'Armellini e quelli di studî anteriori del Poincaré e del Jeans coi quali si concludeva che la diminuzione delle masse non avesse effetto apprezzabile sull'eccentricità. L'Armellini dimostrò invece in un suo ulteriore esame della questione come le conclusioni dei predetti autori dovessero ritenersi valide solo subordinatamente a condizioni ammesse in maniera implicita dagli autori medesimi e cioè soltanto per intervalli di tempo non molto estesi e nel caso di eccentricità inizialmente

molto piccole. L'Armellini, inoltre, perseguendo idee più generali e in vista di soluzioni più radicali e più ampie del problema relativo all'eccentricità, ottenne in seguito e pubblicò in una Nota lincea del 1936 un risultato degno del più alto interesse, col formare un'equazione differenziale del secondo ordine che lega direttamente l'eccentricità della conica osculatrice alla massa totale del sistema, considerata come funzione nota del tempo. L'equazione, perfettamente rigorosa, include tutti i casi possibili e ad essa dovranno necessariamente riattaccarsi tutti gli studî sulla variazione dell'eccentricità, nel caso di masse decrescenti.

Riguardo al caso delle variazioni nel senso crescente questo è stato bensì considerato dall'Armellini nei suoi primi studî sull'argomento, ma solo in astratto, cioè senza formulare ipotesi speciali sulle cause che possono determinare il detto aumento; pertanto senza la necessità di prendere in considerazione eventuali *azioni esterne*.

Se invece si consideri che la più naturale spiegazione di quell'accrescimento consista nell'attribuirlo alla caduta di meteoriti, appare evidente la necessità di riesaminare l'impostazione del problema, per tener conto di una serie di urti delle due masse principali con uno sciame di corpuscoli. Uno studio inteso a definire il più probabile coordinamento di tali urti e a determinare la corrispondente modifica da apportare alle equazioni del moto relativo tra le due masse principali fu eseguito dal Levi-Civita. I risultati, ben chiari e sostanziali, sono troppo noti agli astronomi perché occorra ricordarli nei loro particolari: desidero qui solo esprimere il mio convincimento che l'attenzione del Levi-Civita sull'argomento fu, con ogni probabilità, richiamata dall'Armellini. Tale ipotesi apparirà ben naturale a chi conosca quanto fosse stretta la comunione intellettuale tra i due eminenti studiosi.

Per potere ora guardare da un giusto punto di vista il contributo recato dall'Armellini alle ricerche di astronomia stellare alle quali egli si dedicò, nella seconda metà della sua carriera scientifica, col più grande fervore, occorre fermarsi per poco a qualche considerazione generale e notare anzitutto, riguardo ai vari problemi posti nell'epoca attuale in quel campo, come questi, sebbene formulati e presentati come distinti, non possano in realtà avere soluzioni separate che siano da considerarsi rigorose e coerenti perché tutta la materia che nell'insieme di quegli studî viene esaminata non può che rientrare nella trattazione di un problema ben più vasto che potrà forse essere affrontato in avvenire, ma che non ancora lo è stato e che probabilmente è lontano dall'esserlo. Tale problema: quello della conformazione e dell'estensione dell'universo e dello studio dei moti relativi fra i vari aggruppamenti dei corpi celesti che esso comprende, viene poi maggiormente ad ampliarsi a seguito di tentativi ancora più arditi, come quello di assurgere alla concezione di una cosmogonia totale e perfino – ciò che talvolta si osa pensare – quello di porre ed esaminare la questione dell'*età dell'universo*. Ma anche a prescindere da tali ambizioni estreme, il problema, per così dire, *ristretto* è già immane e le difficoltà che impediscono di affrontarlo nella sua inte-

rezza sono tali da creare ostacoli gravissimi anche per la sola impostazione. Senza entrare in particolari, basterà notare, per quanto qui occorre tener presente, come, neppure riguardo alla preliminare, fondamentale, questione di delimitare i campi di azione spettanti rispettivamente alla ricerca di dati *a priori* (osservazioni) e a quella speculativa tendente alla costruzione di teorie, possa aversi, per i problemi in questione, una soddisfacente soluzione. Quella netta distinzione dei due compiti che nei problemi della meccanica celeste classica si presenta come immediata e naturale non può aver luogo quando si tratti non più di sistemi parziali e – almeno in prima approssimazione – isolati, ma di un sistema la cui estensione è ignota e riguardo al quale non può concepirsi nessuna teoria che non introduca espressamente ipotesi sulla struttura dello spazio e non affronti il problema dell'assoluto nei movimenti e quello dell'infinito in tutti i suoi aspetti.

Sembra pertanto evidente che la possibilità di trovare una via per evadere dalle presenti gravissime difficoltà dipenda essenzialmente dal verificarsi di una necessaria evoluzione dell'insieme di talune fondamentali concezioni della nostra mente. Tale evoluzione potrà condurre a realizzare in maniera concreta una trasformazione profonda del procedimento matematico e di essenziali presupposti sul riferimento, per cui possano rendersi accessibili gli accennati problemi. Ciò potrà forse ottenersi solo con l'applicazione ai grandi problemi astronomici dei metodi di una geometria fusa con la meccanica in una teoria unitaria di tipo einsteiniano.

Dal successo o meno di una siffatta intrapresa si potrà forse comprendere se un progresso essenziale nell'indirizzo accennato possa realizzarsi senza uscire dai confini della nostra logica oppure se la natura dell'altissimo compito sia tale da trascendere le facoltà della mente umana. Ad ogni modo, e nel caso migliore finché manchi una chiara formulazione del problema unitario, gli astronomi si troveranno privi di direttive ben determinate che permettano di orientare con qualche sicurezza l'attività di osservazione: ciò perché quelle indicazioni non possono che essere coordinate con gli obbiettivi di una teoria la quale sia, se non ancora formata, almeno intravista. L'opera degli astronomi nel campo dell'osservazione si è pertanto rivolta ad indagini riguardanti problemi parziali, forse nel concetto che con una soluzione soddisfacente di questi si possa venire in possesso degli elementi costitutivi di una grande teoria futura. Una siffatta ipotesi, già difficilmente giustificabile per le considerazioni innanzi accennate, appare assolutamente da escludere – almeno nell'attuale fase di sviluppo di quelle ricerche – specialmente perché mancano finora dati di osservazione fondati su metodi di misura accettabili per quanto concerne i *moti proprii* stellari. Infatti i cosidetti metodi classici finora seguiti per la determinazione di quelle grandezze si fondano ancora totalmente, come da non pochi anni ho avuto occasione di precisare, sopra una soluzione *del tutto illusoria* del problema del riferimento.

Le varie conclusioni alle quali si è pervenuti nel corso delle predette frammentarie ricerche non possono pertanto considerarsi definitivamente

acquisite neppure come *teorie parziali*: esse sono *meramente provvisorie* e destinate ad essere in futuro o cancellate o assorbite, con radicali modifiche, in altre più generali e rigorosamente stabilite.

Appaiono ora ben chiare, dopo tali premesse, le ragioni per le quali l'Armellini, che pure ha rivelato con numerosi scritti e con la pubblicazione di un importantissimo trattato, il più vivo interesse pei problemi dell'astronomia stellare, non ha creduto di doversi direttamente impegnare nelle ricerche istituite in quel campo secondo gli schemi adottati. Stabilitosi fra gli astronomi, per la situazione innanzi delineata, un accordo non formale ma tuttavia reale ed operante su direttive e metodi di lavoro, si è avuto per effetto il crearsi di un ambiente in cui le iniziative con programmi e criteri individuali non trovano condizioni favorevoli per esplicarsi, mentre all'Armellini, d'altra parte, per la sua autorità personale e per l'originalità del suo pensiero, non sarebbe stato possibile associarsi ad intraprese la cui utilità ai fini della risoluzione del problema massimo non poteva apparirgli evidente. Se a tali considerazioni si aggiunge quella della relativa insufficienza dei mezzi strumentali dei quali egli poteva in passato disporre, sembrerà ben naturale che egli abbia creduto di doversi limitare a svolgere nel campo qui accennato un'attività che può dirsi, in senso largo, didattica: quella di esporre ed illustrare, espressamente o occasionalmente, gli accennati problemi così come ora sono convenzionalmente posti. In tal modo, mentre egli discuteva e riassumeva autorevolmente, senza intendimenti critici, la complessa materia e creava così per gli studiosi le condizioni più propizie per un loro libero orientamento, riserbava a sé stesso una non minore libertà per poter esporre, senza nessun necessario collegamento con ricerche altrui, idee essenzialmente personali su speciali problemi del tipo anzidetto. Di tali particolari studi dell'Armellini – i quali sono senza dubbio fra i più impegnativi di quelli da lui affrontati – passo a ricordare l'idea fondamentale e le conclusioni.

Gli argomenti sui quali si fermò a preferenza l'Armellini nel corso delle sue ricerche di astronomia stellare furono quelli relativi ai problemi cosmogonici. Tale studio dovette sembrargli singolarmente promettente, sia per l'importanza generale della materia che per l'assoluta sicurezza sui dati di osservazione necessari, i quali sono semplici e indiscutibili. Guidato evidentemente dall'idea che per conseguire sostanziali progressi secondo il detto indirizzo fosse necessario l'apporto di idee del tutto nuove, egli si propose di esaminare se, col sussidio di opportune ipotesi, sia possibile di assegnare le cause per cui in tutte le parti dell'universo siderale dove hanno luogo, in sistemi parziali di corpi celesti, movimenti orbitali, questi movimenti presentano invariabilmente taluni tipici caratteri geometrici e si conformano a tendenze identiche. Convinto che la supposta causa di tali coincidenze non potesse che avere carattere di *universalità*, l'Armellini ha cercato di scoprirne l'origine. Fissata in un primo tempo la sua attenzione sui movi-

menti dei pianeti nel sistema solare e premessa una critica ben giustificata a varie ipotesi cosmogoniche anteriori, egli si è attenuto a quella da lui ideata, che del resto è la prima che sia stata concepita nell'intento di stabilire una vera e propria teoria. Tale ipotesi, consistente nell'aggregare un termine variabile al coefficiente attrattivo f che nella espressione newtoniana della forza è considerato presentemente una costante universale, è accompagnata, inoltre, nella trattazione del nostro autore, con ipotesi collaterali secondarie, destinate ad essere implicitamente convalidate appena che sia stata ottenuta, in base all'ipotesi principale, una soddisfacente interpretazione di tutti i fatti osservati.

Il nuovo termine di cui l'Armellini propone l'introduzione dipende, oltreché da una costante positiva da determinarsi, anche, linearmente, dalla componente radiale della velocità relativa fra le due masse che si considerano.

Tale proposta non è stata, generalmente, accolta con molto favore dagli astronomi, ma un esame obbiettivo della questione mostra come le contestazioni che potrebbero muoversi non possano avere per effetto di far cadere l'ipotesi dell'Armellini. Infatti è bensì vero che con l'includere nella espressione dell'intensità della forza un termine dipendente dalle velocità cessa di esistere quel campo di forze che nel caso newtoniano sussiste qualunque sia la grandezza e la distribuzione delle masse in presenza, ed è anche vero che, mancando un campo di forze posizionali, non potrebbe più parlarsi di un potenziale, ciò che sconvolgerebbe la meccanica celeste nel suo attuale assetto, determinerebbe complicazioni analitiche assai gravi, e sopratutto porterebbe a conclusioni diverse da quelle presentemente raggiunte, le quali, dato il perfetto accordo tra calcolo e osservazioni, debbono ritenersi invece bene stabilite. Ma tali obbiezioni, essenzialmente qualitative, perdono ogni valore quando si osservi che riguardo al coefficiente cosmogonico ε, positivo e necessariamente molto piccolo, nessuna attendibile considerazione permette di fissare un limite inferiore. Tale coefficiente può dunque sempre immaginarsi tanto piccolo che i corrispondenti effetti sui movimenti del sistema solare rimangano, anche per secoli, compresi in limiti così ristretti che gli spostamenti dei movimenti *reali* da quelli previsti in base alla legge newtoniana rimangano nascosti dagli errori delle osservazioni anche le più precise, mentre per il raggiungimento degli effetti cosmogonici contemplati dall'Armellini nessun limite di tempo è assegnato nè assegnabile in quella teoria.

I risultati ottenuti dall'Armellini nelle sue ricerche cosmogoniche sono esposti in otto importanti Note, delle quali quattro apparse nei « Rendiconti » della nostra Accademia fra il 1937 e il 1939 e quattro nei « Rendiconti dell'Accademia d'Italia » negli anni 1940 e 41.

Nelle Note del primo gruppo l'autore premette alcune considerazioni le quali lo hanno portato a riconoscere come con la modifica da lui proposta all'espressione dell'attrazione tra due masse elementari si risponda anche a precise esigenze di ordine fisico. Sebbene sembri che questo aspetto della

questione possa essere utilmente ancora esaminato, al fine di qualche ulteriore precisazione, è da notarsi fin da ora come la detta modifica sia da ritenersi non solo sufficiente a spiegare la frequenza degli speciali caratteri che assumono i movimenti orbitali dei corpi celesti, ma anche *necessaria* per un pieno accordo con l'assetto della fisica moderna.

Supposto che l'origine dei pianeti sia da attribuirsi al distacco di parti relativamente piccole della massa del Sole avvenuto a causa di ignoti cataclismi (esplosioni solari o effetto del passaggio in epoca remota di grandi masse stellari a breve distanza) e che le traiettorie di questi frammenti siano state inizialmente ellittiche, l'Armellini deduce che, per effetto dell'azione corrispondente al supposto nuovo termine, alcuni elementi delle orbite dei pianeti così generati debbano risultare influenzati in maniera che dopo un tempo lunghissimo, non precisabile, si determinino appunto quei caratteri che l'osservazione mostra e cioè:

a) tendenza delle dette orbite a diventare circolari, con raggio eguale al parametro dell'orbita iniziale;

b) il moto rivolutivo del pianeta risulti necessariamente di verso concorde a quello della rotazione del Sole, perché in caso di un moto iniziale retrogrado, la distanza del pianeta dal Sole andrebbe continuamente decrescendo e il pianeta considerato ritornerebbe a far parte della massa solare;

c) tendenza delle orbite a divenire complanari e del piano comune a disporsi normalmente all'asse di rotazione del Sole. Infine:

d) a conferma del risultato *a*), risulta, anche per via diretta, che le eccentricità delle orbite tendono a zero.

Dopo questi primi risultati l'Armellini è passato ad esaminare, sulla base della ipotesi da lui avanzata, problemi ancora più vasti, come quello dell'evoluzione di sistemi stellari parziali e, in particolare, quello della progressiva condensazione degli ammassi globulari, fenomeno la cui spiegazione è da lui ottenuta senza gravi difficoltà, come è esposto nella Nota VII di quelle qui ricordate. In tale Nota è anche esplicitamente rilevato come ad analoga conclusione non possa pervenirsi quando si escluda la presenza del termine cosmogonico e ci si attenga alla semplice legge newtoniana.

Il grande passo fatto dall'Armellini con l'affrontare, dopo del problema di una cosmogonia planetaria, quello della evoluzione dei sistemi stellari e i primi notevolissimi risultati da lui ottenuti in tale studio non possono che incitare altri studiosi ad indagare se col sussidio della nuova ipotesi possa aversi la soluzione di problemi ancora più generali. Bisogna peraltro notare come, nel corso della trattazione dell'Armellini in questa seconda fase dei suoi studi cosmogonici, si sia resa inevitabile l'introduzione di ipotesi secondarie e l'impiego sempre più frequente di dati alquanto incerti. Ciò porta a previsioni poco favorevoli riguardo ai risultati di future indagini, ma si è indotti intanto alla persuasione che, se pure non si è vicini al limite delle

possibilità umane, la realizzazione di ulteriori, essenziali progressi sia da attendersi non dall'opera di studiosi isolati ma da quella che potrà svolgersi durante tutta un'epoca.

In quanto all'Armellini, se il suo nome rimarrà, come non è dubbio, segnato tra i più degni nella storia dell'astronomia, lo sarà sopratutto per queste ultime ricerche, con le quali sono posti e trattati, con risultati ben concreti, problemi tra i più elevati di quelli che possa affrontare l'uomo. Se ci richiamiamo ad una ben nota dichiarazione del Poincaré, con la quale si indica come compito preminente della meccanica celeste quello di stabilire se la legge di Newton debba ritenersi rigorosamente e incondizionatamente valida in tutto l'universo, si vede che ad assicurare una risposta al fondamentale quesito ha più d'ogni altro contribuito l'Armellini. Sebbene il detto quesito sia stato formulato in termini assoluti che occorrerebbe forse modificare e che pertanto una risposta possa risultare meno semplice di quella attesa dal Poincaré, rimane in ogni caso ben certo che, ai fini di tale risposta, i risultati ottenuti dall'Armellini e gli altri che potranno ottenersi in base alla sua ipotesi dovranno considerarsi tra gli elementi più decisivi.

I gruppi di lavori dell'Armellini qui ricordati sono, come già premesso, quelli che caratterizzano nella maniera più espressiva la figura di Lui come ricercatore e ai quali rimarrà più strettamente legato il suo nome. Ma vasta e multiforme è in tutto il suo complesso l'opera da lui svolta per il progresso della scienza, con una attività che lungi dal concentrarsi esclusivamente sopra alcuni problemi, si esplicava nelle forme più varie, rimanendo l'autore immune da ogni personale ambizione e sempre pronto alla dedizione di tutto se stesso all'ideale scientifico.

Passo ad accennare a tali attività, ma desidero prima ricordare in riassunto i risultati da lui ottenuti nel corso di altre ricerche individuali non menzionate espressamente qui innanzi, ma che presentano tuttavia grande interesse, pure riferendosi a problemi particolari. Quei risultati possono elencarsi come segue:

I) Confutazione delle conclusioni del Le Verrier sulla esistenza di un limite inferiore per le distanze degli asteroidi dal Sole. Riguardo alle cause che imporrebbero tale limitazione e che secondo il Le Verrier dipenderebbero dall'azione combinata del Sole e di Giove per cui si produrrebbero rapide variazioni nelle inclinazioni di certe orbite e l'allontanamento degli asteroidi considerati dalla zona zodiacale, l'Armellini, dopo un approfondito esame delle azioni predette e una valutazione molto più approssimata degli effetti, raggiunge la conclusione che l'esistenza del limite posto dal Le Verrier non è giustificata e una conferma definitiva nel senso stesso si è avuta in seguito dall'osservazione, con la scoperta di alcuni asteroidi più vicini al Sole di quanto indichi il previsto limite.

Questa memoria figura fra quelle per le quali all'autore fu assegnato dall'Accademia dei Lincei, nel 1920, il premio Reale per l'Astronomia.

II) Conferma a risultati anteriori del Tisserand sulle cause di uno spostamento secolare della linea dei nodi nel movimento orbitale del satellite di Nettuno. Quella perturbazione era attribuita dal Tisserand alla forma ellissoidale del pianeta e invece dallo Struve alla presenza di altro satellite, supposto esistente ma sfuggito, per la sua piccolezza, all'osservazione diretta. L'Armellini esclude, in seguito a più completa analisi, questa eventualità.

III) Il problema dell'origine delle comete, che ha dato luogo ad ipotesi svariate, spesso infondate e sempre controverse, ha interessato molto l'Armellini ed è stato da lui esaminato con una critica acuta e tuttavia serena. L'insufficienza degli elementi di giudizio lo ha indotto in seguito, allo scopo di ricercare argomenti più conclusivi, a proporsi un problema più ampio che evidentemente si ricollega al precedente: quello di precisare alcuni caratteri del potenziale galattico. La risoluzione di questo secondo problema dovrebbe portare a riconoscere se effetti di perturbazione di entità apprezzabile nel moto di corpi del sistema solare possano essere attribuiti alla presenza di masse esterne al sistema stesso. L'Armellini è condotto a concludere con sicurezza in senso affermativo – particolarmente sensibile egli trova l'effetto delle perturbazioni considerate sui pianeti più lontani – ma l'incertezza nei dati sulla distribuzione delle masse galattiche, tra le quali deve considerarsi anche una materia cosmica diffusa e informe, non permette valutazioni numeriche attendibili sugli effetti stessi.

Una conferma dei risultati dell'Armellini, almeno da un punto di vista qualitativo (esistenza delle accennate perturbazioni) deve tuttavia ritenersi acquisita in maniera implicita. Tale conferma risulta dall'accertamento avvenuto in epoche diverse e in seguito a studî accuratissimi da parte degli astronomi Hill, Newcomb e Pickering dell'esistenza di residue deviazioni dal moto kepleriano dei pianeti Saturno, Urano e Nettuno, deviazioni che l'osservazione mostra e che è impossibile attribuire all'azione dei pianeti noti.

È stato detto e non a torto che l'Armellini fu anzitutto un teorico. Certo, ma si deve subito aggiungere che in caso contrario egli non sarebbe stato un astronomo, perché la fase di sviluppo in cui si trova presentemente l'astronomia non è più quella del raccoglimento di fatti slegati, unica attività che poteva svolgersi nei primordi di questa scienza, sibbene quella del coordinamento razionale dei fatti osservati, ossia quella in cui ha luogo la costruzione di teorie generali o, provvisoriamente, parziali. L'acquisizione di fatti nuovi può aversi ora in due modi: o con la previsione in base ad un legame logico esistente tra quelli noti e gli ignoti e qui il procedimento deduttivo si identifica con quelli della analisi matematica e della meccanica, oppure direttamente con l'osservazione, ma ciò ad opera di chi sia in grado di fornire elementi di reale interesse, ossia utili ai fini della costruzione di teorie nuove o del perfezionamento e controllo di quelle già formate. L'osservatore deve dunque essere, in sostanza, anche egli un teorico. L'Armellini

fu l'uno e l'altro nella maniera più completa. L'impulso alla ricerca e la tenacia indomita nello sforzo per raggiungere gli obbiettivi prefissi nascevano in lui da un purissimo interesse scientifico, per cui egli da ogni ostacolo traeva maggior vigore, senza essere mai turbato o fuorviato da ambizioni personali o da vanagloria.

In tutti i campi dell'astronomia egli si affermò: assai spesso senza alcuna intenzione preconcetta di imprimere in questi la propria orma, ma spinto dall'ansia di conoscere, di comprendere e sopratutto di far partecipi i suoi affezionati discepoli e amici delle alte e pure soddisfazioni che provengono ai veri studiosi dal possesso di nuove verità e dal progressivo addentrarsi nei misteri della natura. In tale spirito è concepito e scritto l'importante trattato di Astrofisica. A questi studi l'Armellini si volse nella seconda fase della sua carriera scientifica con marcata predilezione: ciò perché – a parte i nobilissimi fini didattici – in lui, quasi inconsapevolmente, subentrava all'astronomo il fisico ed egli pertanto, la cui mente era organizzata per portar luce e per innovare, non poteva sottrarsi ad un compito a lui imposto dall'intimo dell'essere, cioè quello di contribuire a realizzare una più vasta sintesi, forse già intravista, che implicasse sicuri collegamenti tra alcuni problemi dell'astronomia stellare e fondamentali questioni della fisica moderna.

Osservatore diligente e assiduo, egli praticò tale attività col più grande impegno, per quanto, in un primo tempo, saltuariamente, dati i gravi doveri inerenti alle sue mansioni di professore di meccanica, esplicate in varie sedi. Nessuno più di lui fu conscio della necessità di tener conto, ai fini di una vera ricerca nel campo dell'astronomia, del carattere strettamente complementare tra i contributi della indagine teorica e quelli dell'osservazione. A tale concetto si informa tutta la sua opera scientifica e al convincimento medesimo egli fu condotto non solo per ragionamento e per esperienza, ma anche, si può dire, per istinto, poiché in lui coesistevano come già osservato, il matematico e il naturalista.

Onori e riconoscimenti vennero a Lui non chiesti ma come attuazione della pura giustizia, in un'epoca aurea della scienza italiana, ad opera di uomini che seppero apprezzare in Lui non solo le preclare qualità dell'ingegno e gli importantissimi risultati conseguiti, ma anche l'ampiezza delle vedute e l'assoluta obbiettività scientifica: qualità congiunte ad un'eccezionale modestia e ad una imperturbata serenità del temperamento.

I primi suoi lavori, tutti dedicati a problemi di meccanica celeste, furono considerati come titoli importantissimi in concorsi universitari a cattedre di meccanica razionale. Così egli iniziò nel 1915 la sua carriera di professore nell'università di Torino; passò quindi a quella di Padova nel 1919, poi nel 1920 a quella di Pisa – dove insegnò meccanica celeste – ed infine alla cattedra di astronomia nella sua Roma.

Non meno che teorico dell'astronomia e diligente ed acuto osservatore egli fu attivo organizzatore. Il trasporto dell'osservatorio universitario di Roma dall'antica sede del Campidoglio a Monte Mario, l'incremento cospicuo apportato al corredo strumentale di questo osservatorio, la costruzione della grande torre solare a Monte Mario, l'impianto della succursale dell'osservatorio a Campo Imperatore e di un'altra a Monte Porzio, sono opere rese possibili in un periodo relativamente breve solo per la esplicazione, da parte dell'Armellini, della più sapiente e geniale attività.

La scienza e la vita furono in pochi studiosi così intimamente fuse come nell'Armellini. L'osservatorio, la biblioteca e la casa erano per Lui una cosa sola. I rapporti sociali che egli ebbe si strinsero quasi sempre nel campo scientifico o in occasione di contatti scientifici; agli amici fu attaccatissimo e fedelissimo, agli allievi fu largo di incoraggiamento, di consiglio e di guida, con animo paterno. Anche il suo affetto più caro, quello per l'eletta donna al cui destino egli volle legare il proprio, nacque nel campo scientifico e animò una collaborazione astronomica attivissima e mai interrotta.

Nel mondo astronomico italiano, in quello universitario e nella nostra Accademia la scomparsa dell'Armellini crea un vuoto tristissimo e doloroso.

L'eminente astronomo lascia però a tutti gli studiosi e principalmente ai giovani, con la sua opera e con la sua alta concezione della maniera di intendere e praticare la ricerca scientifica, un esempio fulgidissimo che non sarà infecondo. Onore alla Sua memoria!

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio anziano Levi, che presiede la seduta, dà la parola al Collega Nobile che commemora il compianto Socio Giuseppe Armellini.

Il Presidente ringrazia il prof. Nobile per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del prof. Armellini, presenti alla seduta, i sentimenti del più vivo cordoglio dell'Accademia per la scomparsa dell'insigne astronomo.

Il Socio anziano Levi, assolvendo il compito affidatogli dal Presidente Giordani, rievoca la figura di scienziato e di Maestro di un altro grande Socio Nazionale dell'Accademia, il prof. Giulio Chiarugi, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita e presenta i primi quattro volumi della IX edizione delle « Istituzioni di anatomia dell'uomo », che di Giulio Chiarugi costituiscono una delle opere fondamentali, con le seguenti parole:

« Nella psicologia moderna il tipo estrovertito, buon parlatore, esuberante, insegnante efficace, vien contrapposto il tipo introvertito, timido, riflessivo, il quale rifugge dal comunicare pubblicamente le proprie idee. Wilhelm Ostwald e C. G. Jung dànno come esempio di introvertito il grande fisico Helmholtz, di estrovertito Du Bois Reymond. Gli estrovertiti sarebbero più adatti degli introvertiti all'insegnamento. Ciò non risponde certamente al vero nel caso di Giulio Chiarugi. Questi era un tipico introvertito; estremamente modesto, timido e riservato, rifuggiva dal partecipare a pubbliche discussioni, e tanto meno a convegni internazionali; ricordo che al congresso dell'Anatomische Gesellschaft che si tenne a Pavia nel 1900, molti studiosi tedeschi chiedevano di Lui, ma Egli non era presente; fece una sola eccezione per il congresso internazionale di Anatomia di Milano nel 1936. Se gli si chiedeva un consiglio, di rado rispondeva subito, soltanto dopo lunga riflessione. Eppure Chiarugi fu un efficacissimo insegnante; era un eccellente parlatore, le sue lezioni erano un modello di chiarezza; si esprimeva in uno stile impeccabile. Per la sua timidezza non era facile di avere dimestichezza con lui; ciononostante Egli esercitò un grande fascino sovra tutti coloro che ebbero la fortuna di conoscerlo nell'intimità; attratti dalla sua personalità di eccezione, numerosissimi furono coloro i quali desiderarono di lavorare sotto la sua guida. Ben sette dei suoi allievi diretti divennero titolari di Anatomia umana, altri, pur seguendo l'indirizzo morfologico di Chiarugi divennero professori di Anatomia comparata: Ercole Giacomini, ricercatore di grande valore, lavorò con Chiarugi a Siena; Nello Beccari insegnò Anatomia umana soltanto per un breve periodo, successivamente divenne titolare di Anatomia comparata.

« A tutt'oggi molti anatomici italiani provengono sia direttamente, sia indirettamente dalla scuola di Firenze.

« Altri, dopo un soggiorno più o meno lungo nell'Istituto di Firenze, si affermarono in altre discipline; tra questi appartengono alla nostra Accademia, il fisiologo Gilberto Rossi, il quale legò il proprio nome ad una fonda-

mentale scoperta, Massimo Aloisi, patologo; ricordo ancora Gaetano Pieraccini al quale l'Accademia assegnò un premio Feltrinelli, Ercole Cova, ginecologo, Antonio Comolli, chirurgo. Un altro allievo di Chiarugi, il quale si affermò in varie ricerche di Morfologia descrittiva e sperimentale, va ricordato: Arturo Banchi; persona molto dotata, ma che troppo presto, per le sue condizioni di salute, fu costretto a rinunziare alla ricerca scientifica.

«Chiarugi predilesse durante la sua lunga vita scientifica l'orientamento morfologico dell'Anatomia, scaturito dalla dottrina di Darwin; ma egli era ben lontano dall'imporre ai suoi allievi di seguirlo su quella via; considero come uno dei maggiori meriti di Chiarugi, che Egli lasciasse loro la maggiore libertà di scegliere l'orientamento che essi prediligevano; non di rado dava loro acuti suggerimenti tratti dalla sua lunga esperienza di studioso anche in argomenti estranei al suo diretto campo di studi.

«Le ricerche più fondamentali di Chiarugi sono quelle sullo sviluppo dei nervi cranici; e, come tutte le altre, sono sotto tutti i punti di vista ineccepibili; a tutt'oggi, dopo oltre 60 anni, a quanto Chiarugi scrisse non vi è nulla da aggiungere, né da modificare. Ma non è questo il momento di rievocare l'opera scientifica originale del Nostro. Lo fece già in modo esauriente Nello Beccari nel '45, ed io stesso in quest'Accademia nel '46. Dirò soltanto dei suoi due trattati: "Le Istituzioni di Anatomia dell'uomo" in 5 volumi ed "il Trattato di Embriologia" in 4 volumi.

«Il I volume dell'Anatomia dell'uomo apparve nel 1903, l'opera fu completata solamente nel 1909; durante i 50 anni trascorsi da allora ne furono pubblicate altre 8 edizioni – un successo ben raro per un'opera tanto voluminosa e scritta essenzialmente a fini didattici. Le cinque edizioni successive alla prima furono curate da Chiarugi, le ultime tre da me. Nella 7ª edizione ho ritenuto di dover aggiornare vari Capitoli, quelli riguardanti l'Istologia e l'Anatomia microscopica, ed i Capitoli sovra i centri e le vie dell'encefalo. Nell'8ª edizione fu aggiornato il Capitolo sull'Embriologia dell'uomo (specialmente quanto riguarda i primissimi stadi dello sviluppo); argomento che subì negli ultimi anni un profondo rinnovamento per merito degli embriologi dell'Istituto Carnegie di Baltimora.

«In questa 9ª edizione recentissima che ho l'onore di presentare all'Accademia, ho esposto qualche nozione sulla struttura submicroscopica dei tessuti e degli organi, argomento di attualità, che assurge a grande importanza in seguito allo sviluppo che ebbe negli ultimi anni la microscopia elettronica. Con ciò ho ritenuto di interpretare il pensiero di Chiarugi, il quale ha sempre sostenuto, che lo studio delle forme degli organismi non deve essere limitato a ciò che è accessibile ad un determinato metodo d'indagine, in contrasto colla più gran parte degli anatomici italiani dell'800 i quali erano convinti che il metodo essenziale nell'Anatomia dev'essere quello della dissezione.

«Ma l'opera nella quale rifulsero le eccezionali doti della mente di Chiarugi, la chiarezza nell'esposizione e lo spirito di sintesi, è il suo trattato di Embriologia, in 4 volumi; quest'è senza dubbio l'opera più completa di storia dello sviluppo degli animali e dell'uomo, che sia apparsa, non soltanto in

Italia, ma anche all'estero. Vi è invero il grande Trattato di Embriologia pubblicato al principio di questo secolo da Oskar Hertwig, al quale collaborarono alcuni tra i più eminenti embriologi tedeschi; ma, anche prescindendo dalla circostanza che quest'opera è ormai antiquata, il suo contenuto non è paragonabile, specialmente per quel che riguarda l'Embriogenia, all'Embriologia di Chiarugi.

« Non si può a meno di rimanere sorpresi che Egli, non più giovane, non solo si sia reso conto del profondo rivolgimento che la conoscenza delle conseguenze degli interventi sperimentali sull'embrione, portava nell'Embriologia, ma abbia seguito in tutti i particolari le nuove conquiste, ed abbia saputo esporle tanto lucidamente. Lo stesso valga per i capitoli nei quali si parla della parte che hanno gli ormoni ipofisari ed ovarici sul ciclo dell'ovulazione e sulla fissazione del germe alla parete uterina.

« Esprimiamo il rammarico che questa opera insigne non sia conosciuta all'estero, come si merita, e che nessuno si senta in grado di curarne una nuova edizione, dato che la sola apparsa è da molto tempo esaurita ».

Il Presidente informa i Colleghi della morte, avvenuta il 21 settembre c.a., del Socio Nazionale Giulio Cesare Trabacchi, della Categoria III – Sezione Fisica – e formula un pensiero di reverente omaggio alla memoria dell'illustre Consocio, che sarà degnamente commemorato in una delle prossime sedute.

Comunica quindi la notizia, direttamente pervenutagli, della morte di due insigni scienziati, Soci Stranieri dell'Accademia, ascritti alla Categoria V della Classe: Oskar Vogt e Ross Granville Harrison, scomparsi rispettivamente nell'agosto e nell'ottobre del c.a.

Oskar Vogt ha legato il suo nome in modo imperituro ad una scoperta di grande portata per la neurologia, la conoscenza cioè di una citoarchitettonica specifica per le singole regioni della corteccia cerebrale, contribuendo, inoltre, mediante ricerche di fisiologia sperimentale sulle scimmie, alla conoscenza del significato funzionale delle varie zone citoarchitettoniche.

A Ross Granville Harrison, a Wilson ed a Morgan si deve il grande impulso che l'Embriologia sperimentale ha assunto sin dalla prima decade di questo secolo negli Stati Uniti d'America. Il nome di Harrison è legato soprattutto alla scoperta del metodo della coltivazione dei tessuti isolati dall'organismo; metodo che ebbe di recente uno sviluppo ben più grande di quel che si potesse prevedere in un primo tempo e che trovò applicazione in tutti i rami della Biologia. Nel 1956 l'Accademia conferì a Harrison il Premio Internazionale Feltrinelli per la Biologia.

Il Socio anziano Levi conclude elevando un commosso pensiero alla memoria dei due grandi biologi scomparsi.

Il Presidente comunica che hanno ringraziato, per la nomina avvenuta nello scorso giugno, i Soci Nazionali: Francesco Zagar e Massimiliano Aloisi; i Soci Corrispondenti: Carlo Miranda, Cataldo Agostinelli, Placido Cicala, Massimo Cimino, Giorgio Salvini, Gianpietro Puppi, Giovanni Malquori, Piero Leonardi, Giulio Raffaele, Alfonso Giordano; e i Soci Stranieri: Bruno Rossi, Abramo Joffè, Linus Pauling.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente dà lettura della mozione, approvata all'unanimità dal Consiglio Direttivo dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare nella seduta del 20 ottobre c. a., con la quale il predetto Consiglio Direttivo, preso atto che le autorità governative, dopo tre mesi dall'inizio dell'esercizio finanziario 1959-1960, non hanno emesso alcun provvedimento atto a sopperire alla mancanza di fondi necessari per lo svolgimento dell'attività del C.N.R.N., da cui l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare trae i suoi mezzi finanziari, chiede, oltre ai contributi necessari per permettere allo stesso C.N.R.N. l'attuazione e l'espansione delle ricerche nucleari in esecuzione di un piano pluriennale ed organico, una legge nucleare adeguata agli interessi effettivi del Paese.

Il Socio Segre propone che l'Accademia dia la sua adesione al citato ordine del giorno, e crede che essa debba anche preoccuparsi del problema generale della ricerca scientifica. Dopo aver ricordato che già nel periodo fascista, a causa della guerra e dei provvedimenti razziali, l'Italia fu costretta, purtroppo, a privarsi della collaborazione di uomini quali Tullio Levi Civita, Guido Fubini e Federico Enriques, in seguito prematuramente scomparsi, l'oratore mette in evidenza come anche oggi, nonostante il sempre maggiore sviluppo delle scienze fisiche e matematiche e l'importanza fondamentale da esse acquisita, vi sia un preoccupante esodo di scienziati italiani verso Paesi stranieri, dovuto essenzialmente alla mancanza in Italia di mezzi finanziari adeguati alle necessità attuali della ricerca scientifica.

Egli riterrebbe quindi opportuno che l'Accademia promuovesse un convegno internazionale per discutere gli importanti problemi inerenti alla più efficace organizzazione della ricerca scientifica ed al suo finanziamento, ed è convinto che una simile iniziativa potrebbe esercitare, per la risoluzione dei problemi stessi, una funzione determinante.

Ferme restando le attribuzioni del C.N.R. per il compito di procurare i fondi necessari, e ciò, non soltanto dal Governo, ma anche dall'Industria, con la quale esso dovrebbe istituire più intimi legami, ai Soci dell'Accademia dovrebbe essere conferita la facoltà di decidere sugli stanziamenti a favore dei vari rami di ricerca. In tal caso però i Soci, essendo esclusi dai finanziamenti stessi, per la loro funzione di giudici, dovrebbero almeno poter contare sulla corresponsione di emolumenti fissi, così come avviene in altri Paesi. Comunque, riferendosi per ora ad un argomento più immediato e di più facile attuazione, il Socio Segre, in relazione a quanto auspicato dal Collega Picone nella seduta segreta a Classi riunite di oggi, crede che potrebbe essere assicurato agli Atti accademici un contributo di Note e Memorie assai più notevole se fosse corrisposto un compenso ai Soci che presentino Note proprie.

Il Socio Sansone osserva che il Collega Segre ha enunciato varie proposte indubbiamente interessanti, ma che richiedono, per la complessità dei pro

blemi cui si riferiscono, un esame preventivo. Poiché l'organo competente in questa materia è il C.N.R., egli è d'avviso che il problema circa il finanziamento della ricerca scientifica debba essere studiato d'intesa con il Consiglio stesso.

Il Socio Amaldi illustra il già citato ordine del giorno dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e mette in evidenza la gravità dei motivi che hanno determinato l'agitazione dei ricercatori. Infatti, già dal 1° luglio c.a., l'I.N.F.N. si è visto costretto a rallentare la sua attività di ricerca per carenza di mezzi finanziari e, se non interverranno adeguati provvedimenti, si troverà di fatto, a breve scadenza, nell'impossibilità di continuare la sua attività. Vi è dunque materia di serie preoccupazioni, sia per lo stato di crisi in cui versa la ricerca nucleare in Italia, e per le conseguenze che tale crisi provocherà sugli sviluppi tecnici ed economici della Nazione, sia per le difficili condizioni in cui si troverebbero le 2000 persone addette alle ricerche nucleari se l'Istituto dovesse essere costretto a sospendere la sua attività.

Il Socio Amaldi propone quindi che l'Accademia appoggi, con il suo autorevole voto, le giuste richieste dell'Istituto. Riconosce poi che il fenomeno particolare dei mancati finanziamenti ai fisici nucleari si inquadra nel fenomeno generale del finanziamento della ricerca scientifica, ma riterrebbe opportuno distinguere tra il problema speciale e quello generale.

Circa poi la competenza dell'Accademia o del C.N.R., egli crede che ogni ente debba studiare il problema giovandosi della propria organizzazione.

Il Socio anziano Levi è convinto che la questione non consista soltanto nella carenza di mezzi finanziari, ma soprattutto in quella di uomini capaci e preparati; a tal fine, egli desidererebbe che i Soci dell'Accademia fossero interpellati in merito alla progettata riforma universitaria.

Il Socio Ghigi è d'accordo con le osservazioni formulate dai Soci Segre e Amaldi, ma desidera ricordare che anche le scienze naturali si trovano in condizioni non meno gravi di quelle in cui versano le scienze fisiche e matematiche. Con ogni probabilità, la crisi è determinata dall'orientamento scolastico e, proprio per tale motivo, egli rinnova il voto che abbia luogo il più presto possibile la discussione sul problema riguardante le progressive necessità di competenze e di attività scientifiche e tecniche in relazione alla organizzazione scolastica, già decisa nella seduta a Classi riunite con l'intervento degli «Amici» del 10 giugno 1958, e per l'organizzazione della quale fu nominato un comitato composto dallo stesso Socio Ghigi e dai Colleghi Calò, Dore e Mingazzini.

Il Socio Dore concorda con quanto è stato detto dai precedenti oratori e insiste anch'egli sulla necessità della formazione e preparazione degli uomini che dovranno occuparsi della ricerca scientifica. Ma per ottenere tali risultati è necessario poter disporre di mezzi finanziari adeguati, che oggi, purtroppo, mancano, come accade, ad esempio, per il corso di specializzazione d'ingegneria nucleare presso l'Università di Bologna, che non si sa ancora se possa o meno funzionare quest'anno.

Il Socio Perucca crede che dal caso particolare riguardante i fisici nucleari, l'Accademia possa estendere il problema fino al caso generale della ricerca in tutti i campi della scienza, perché il suo compito è quello di promuovere un sempre più alto livello scientifico.

Il Socio Amaldi dà lettura dei due seguenti ordini del giorno, il primo dei quali si riferisce alla particolare contingenza messa in luce dall'I.N.F.N., e il secondo al problema generale del finanziamento della ricerca scientifica:

« La Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei, preso atto delle dichiarazioni del Consiglio direttivo dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, secondo le quali le ricerche nucleari si vengono oggi a trovare sul punto di arrestarsi per carenza di finanziamenti e di precise norme legislative che garantiscano la necessaria continuità delle ricerche stesse, fa voto affinché il Governo prenda immediatamente le misure necessarie per superare l'attuale stato di gravissima crisi ».

« La Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei, conscia dei suoi compiti e responsabilità nel campo della cultura e della ricerca, preoccupata della grave situazione di stasi o addirittura di crisi in cui si trovano tutti i campi della ricerca per carenza di mezzi e inadeguatezza delle forme d'intervento, fa voto affinché le Autorità di Governo provvedano, nel minor tempo possibile, a far sì che lo sviluppo scientifico del Paese si adegui alle necessità della vita moderna come viene oggi fatto in tutti i Paesi del mondo ».

Il Socio Signorini, pur rendendosi conto del carattere d'urgenza della questione, propone di rinviare a dicembre la discussione, in modo che tutti i Colleghi possano essere preparati a presentare proposte concrete.

Il Socio Picone ritiene che convenga aderire alla proposta del Collega Signorini e che l'Accademia, dopo aver studiato il problema, indichi al Governo i mezzi per risolverlo.

Il Socio Sergi è invece d'opinione che i due ordini del giorno debbano essere subito messi in discussione e approvati.

I Soci Segre e Caglioti concordano con il Collega Sergi.

Il Socio Perucca, riferendosi a quanto ha già avuto occasione di dire precedentemente, richiama l'attenzione dei Colleghi sull'opportunità che l'Accademia consideri soltanto il secondo ordine del giorno e che, prendendo lo spunto da un rapporto su una situazione scientificamente deplorabile, esprima il suo voto per l'incremento delle possibilità di ricerca nel campo delle scienze, in particolare di quelle per le quali oggi specialmente si sente la scarsità di contributo scientifico in campo internazionale.

Il Presidente mette in votazione, uno dopo l'altro, i due ordini del giorno presentati dal Socio Amaldi che sono entrambi approvati dalla Classe.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Edoardo Amaldi presenta il suo articolo intitolato « The Production and Slowing Down of Neutrons » (di 659 pagine) che, insieme ad un articolo di V. Fano, L. V. Spencer e M. J. Berger intitolato « Penetration and Diffusion of X Rays », costituisce il volume XXXVIII/2 del « Handbuck der Physik » pubblicato da Springer.

L'articolo del Socio Amaldi inizia con un capitolo introduttivo in cui i varî argomenti vengono presentati in ordine storico; a questo fanno seguito un capitolo sulla produzione dei neutroni, un altro sul rallentamento dei neutroni fino a circa un voltelettrone di energia; un altro sul rallentamento attraverso la zona chimica. L'articolo si chiude con un capitolo sulla diffusione dei neutroni termici.

Il Socio Giovanni Sansone presenta all'Accademia il quarto e il quinto volume delle Opere di Ulisse Dini con le parole che seguono:

« Il materiale di questi volumi fu in gran parte estratto da una Memoria dello stesso Dini pubblicata nel 1880 a Pisa nel Volume XVII degli Annali delle Università Toscane e con questa Memoria nasce appunto la moderna teoria degli sviluppi in serie. Lo studio di tali sviluppi, siano o no i loro termini funzioni ortogonali, si consegue con la rappresentazione delle somme parziali mediante un integrale singolare, oppure, passando nel campo complesso, mediante un integrale di una funzione meromorfa esteso ad un certo contorno, essendo i termini delle funzioni integrande i termini dello sviluppo preso in esame.

« Il problema trattato prima in generale è applicato alle serie trigonometriche di Fourier, e successivamente alle serie di Fourier generalizzate, a quelle serie che nell'analisi moderna chiamansi "serie del Dini", e alle serie di Sturm–Liouville per le quali il Dini perviene a notevoli teoremi di equiconvergenza con le serie trigonometriche di Fourier.

« Sono trascorsi poco più di vent'anni prima di completare l'edizione delle Opere di Ulisse Dini. La felice riuscita dell'iniziativa che onora uno dei più grandi analisti italiani dell'ultimo secolo si deve alla collaborazione di M. Cipolla, E. Bortolotti, M. Picone, F. Cecioni, G. Scorza Dragoni e sopratutto agli aiuti morali e finanziari del Consiglio Nazionale delle Ricerche, all'Università di Pisa, e all'entusiasmo dell'Editore Cremonese ».

Il Socio Sansone presenta anche l'edizione inglese « Orthogonal Functions » della terza edizione italiana dei suoi « Sviluppi in serie di funzioni ortogonali ». La traduzione è stata curata dal dott. A. H. Diamond ed è presentata agli studiosi dell'U.S.A. con una prefazione di H. Hille la quale tratteggia il carattere dell'Opera, intesa a dare ai giovani un sicuro orientamento sui problemi fondamentali della rappresentazione delle funzioni in serie di Fourier, in serie di funzioni sferiche, di Laguerre e di Hermite, e a offrire ai cultori di matematica applicata l'ausilio di questo particolare ramo della analisi.

Il Socio Togliatti presenta il volume XI ed ultimo delle Opere di Luigi Bianchi, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il volume XI ed ultimo delle "Opere" di Luigi Bianchi, pubblicate a cura dell'Unione matematica italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Il primo volume era stato pubblicato circa sette anni fa, nel dicembre del 1952. Questo volume, dedicato al carteggio di Luigi Bianchi, contiene 160 lettere scritte a Lui da matematici suoi contemporanei, lettere che, dopo la sua morte, sono state trovate in un cassetto del suo tavolo di studio; ed inoltre 16 lettere scritte dal Bianchi a G. Darboux, e che son state riprodotte dagli originali conservati a Parigi nella biblioteca dell'Istituto di Francia. Sono in tutto 176 lettere, le cui date vanno dal 1880 al 1923. Pur non possedendo, tranne nel caso ora citato del Darboux, le lettere del Bianchi che si inseriscono tra quelle pubblicate, la corrispondenza che si può leggere in questo volume contribuisce assai bene a lumeggiare la figura di Luigi Bianchi e la posizione di primissimo piano che Egli aveva raggiunto nel mondo scientifico. Particolarmente interessanti sono le lettere tra il Bianchi ed il Darboux, che chiariscono bene questioni controverse di priorità; quelle di R. Fricke e di F. Klein, dense di contenuto matematico; quelle, assai numerose di J. Weingarten, attraverso le quali si può seguire il sorgere e lo svilupparsi di una salda amicizia tra due scienziati di paesi diversi; ed infine quelle di A. Hurwitz, nelle quali, a causa della giovanile colleganza tra il Bianchi e l'Hurwitz all'Università di Monaco, gli argomenti matematici si alternano piacevolmente con giudizi sulle persone e sulle cose di quei tempi. Gli 11 volumi delle "Opere" di L. Bianchi che vengono così conclusi tornano veramente ad onore dell'Unione Matematica Italiana e di tutte quelle persone, tra cui in particolare il prof. G. Sansone, che hanno lungamente e tenacemente operato per la realizzazione di questa pubblicazione ».

Il Socio Crocco presenta un fascicolo contenente la prolusione, dal titolo « Le determinanti dell'era astronautica », da lui pronunciata al VII Convegno Internazionale delle Comunicazioni, svoltosi a Genova dal 5 al 12 ottobre 1959.

Il Socio Montalenti presenta un volume dal titolo « L'Acquario di Napoli e il suo fondatore Anton Dohrn » che, con qualche riduzione e modifica, è la traduzione della biografia scritta in occasione del centenario della nascita del Dohrn, da un antico amico della famiglia Dohrn, Theodor Heuss, l'attuale Presidente della Repubblica Federale Tedesca.

Il Socio Montalenti ricorda le altissime benemerenze di Anton Dohrn, che fondò a Napoli la Stazione Zoologica, cioè il più grande laboratorio scientifico internazionale che allora si potesse concepire e che in esso creò quell'atmosfera d'indipendenza e di libera discussione e collaborazione fra studiosi di qualsiasi nazionalità e razza, che fu vanto dell'istituzione e che si è sempre mantenuta tale.

L'oratore conclude osservando che la biografia di Anton Dohrn, scritta da Theodor Heuss, non è soltanto un interessante racconto storico, ma anche, e soprattutto, una testimonianza di fede in uno dei supremi ideali dell'umanità: la scienza.

Il Presidente si associa alle parole del Collega Montalenti e ricorda l'importanza che la Stazione Zoologica ha avuto per le ricerche scientifiche in essa effettuate da moltissimi biologi di ogni parte del mondo, alcune delle quali hanno ottenuto risultati di grande importanza per lo sviluppo e il progresso della biologia.

Il Segretario Accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Dore, Segre, Caglioti, Picone, Cambi, Stefanelli, Vardabasso, Cotronei.

Il Socio Penta presenta una Memoria di Filippo Falini dal titolo: « Sulle condizioni di formazione dei giacimenti limnici di combustibili fossili ».

Per l'esame della suddetta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Penta e dai Colleghi G. B. Dal Piaz ed Evangelisti.

Viene letto l'elenco delle Note e delle Memorie pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

FICHERA G. – Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

GRAZIADEI P. – Contributo alla conoscenza della innervazione del canale alimentare di *Sepia officinalis* (pres. dal Socio A. PENSA).

GRAZIADEI P. – Nuovi dati sul corredo nervoso della ventosa di *Loligo vulgaris* (pres. dal Socio A. PENSA).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 novembre 1959

A.C.E.A. Anno cinquanta. Roma, Azienda Comunale Elettricità ed Acque, 1959. Pp. XXIX–403, in–4°, con tavv.

Acqua e luce per Roma. Roma, Azienda comunale Elettricità ed Acque, 1958. Pp. 189, in–4°, con figg. e tavv.

AMALDI Edoardo. — *The Production and Slowing Down of Neutrons.* Estr. da « Handbuch der Physik », vol. XXXVIII, 1959, n. 2.

BANNA Pietro. — *Interpretazioni nella gravitazione universale.* Estr. da « Tekne », 1958, nn. 3, 4, 5, 6; 1959, nn. 1, 2.

BERLINGUER Giovanni. — *Automazione e salute (Problemi medico-sociali del progresso tecnico).* Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1958. Pp. 146, in–8° (Collana di Studi sui Problemi Medico–Sociali, XLIV).

BIANCHI Luigi. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. XI: *Corrispondenza.* Roma, Edizioni Cremonese, 1959. Pp. 303, in–8°, con figg.

BOGORODICKIJ N. P., PASYNKOV V. V. a TEREJEV B. M. — *Elektrotechnické hmoty.* Bratislava, Vydavatel'stvo Slovenskij Akademie Vied, 1953. Pp. 377, in–8°, con figg.

CAMPBELL Th. — Vedi: HOEPPNER H., ISBELL B. S. and CAMPBELL Th.

Cancer: A worldwide menace. Some facts and figures on its occurence in the United States and abroad. Prepared for the Committee on Government Operations United States Senate and its Subcommittee on Reorganization and International Organizations (pursuant to S. Res. 347, 85th Congress and S. Res. 42, 86th Congress). Washington, United States Government Printing Office, 1959. Pp. XII–40, in–8°, con tavv.

CHIARUGI Emilio. — *Istituzioni di anatomia dell'uomo.* Nona ed. Voll. I–IV. Torino, Società Editrice Libraria, 1959. Voll. 4, in–8°, con figg.

COCKCROFT John D. e ROBSON Anthony E. — *Problemi dell'energia nucleare.* Varese, Soc. Tip. « Multa Paucis », 1959. Pp. 105, in–8°, con figg. e tavv. (Quaderni della Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell'E.N.I., n. 1).

CROCCO Arturo. — *Le determinazioni dell'era astronautica.* VII Convegno Internazionale delle Comunicazioni. Genova, 5–12 ottobre 1959. Genova, Pubblicazioni del Civico Istituto Colombiano, s.d. Pp. 29 in–8°.

CUBBE DE CHANTUZ Giovanni. — *Nuove concezioni sull'elettrone e sulle caratteristiche essenziali desunte da noti fenomeni fisici.* S.n.t. Pp. 58, in–4°, con figg. (In ciclostile).

CUERVO VALSECA Amador. — *El universo en espiral.* Barcelona, 1959. Pp. 161, in–8°.

DĂC–LỘC Nguyễn. — *Considérations sur le fondement de la théorie d'Einstein.* Conférence écrite. S.n.t. Pp. 132, in–4° (In ciclostile).

DESIRELLO N. — *La misteriosa energia che regge l'universo. (Energia atomica nucleare).* 2ª edizione ampliata: *Gli ultrasuoni.* Genova, Soc. Editrice Internazionale, 1959. Pp. 81, in–8°, con tavv.

DIAMOND Ainsley H. — Vedi: SANSONE Giovanni.

DINI Ulisse. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. IV: *Serie di Fourier*; vol. V: *Sviluppi in serie.* Roma, Edizioni Cremonese, 1959. Voll. 2, in–8°.

FERRARI Fabio. — *Parametri chimici e tipi di cemento silico–basico.* Estr. da « Il Cemento, il Cemento Armato », 1959, n. 1, 2/56°.

— *Sulla cottura dei crudi da cemento silico–basico.* Estr. da « Il Cemento, il Cemento Armato », 1958, 11/55°.

FIGUEREO J. — *Del átomo a la Nada. Hipótesis sobre la constitución del espacio.* Sín-

tesis popular. Segunda edición española. Valencia, A. G. Estilo, s.d. Pp. 23, in-8°.

FUJIMOTO H. — Vedi: *Jubilee publication in the commemoration*...

Galileo Galilei Linceo, 1564–1642. Estr. da « Europa nucleare », a. II, 1959, n. 3.

GONDA Ján. - Vedi: VODA Juraj, KŘIVÁNEK Vladimir a GONDA Ján.

GUNDOLF Cornelia. — Vedi: HEUSS Theodor.

HAWKINS R. R. — *Scientific, medical and technical books published in the United States of America. A selected list of titles in print with annotations*. Second edition. Books published to december 1956. Washington, National Academy of Sciences, National Research Council, 1958. Pp. XII–1491, in-4°.

HEUSS Theodor. — *L'« acquario » di Napoli e il suo fondatore Anton Dohrn*. Traduzione di Cornelia Gundolf. Roma, Edizioni Casini, 1959. Pp. 280, in-8°.

HOEPPNER H., ISBELL B. S. and CAMPBELL Th. — *Introduction of a « displacement energy ». Continuation of study about influence of the* ΔE *concept on physics*. S.n.t. Pagin. varia, in-4°, con figg.

International Medical Research. A compilation of background materials. Report of the Committee of Government Operations United States Senate and its Subcommittee on Reorganization and International Organizations pursuant to S. Res. 347, 85th Congress and S. Res. 42, 86th Congress. Washington, United States Government Printing Office, 1959. Pp. XIV–117, in-8° con tavv.

ISBELL B. S. — Vedi: HOEPPNER H., ISBELL B. S. and CAMPBELL Th.

Istituto di Fisica dell'Università di Bologna. Gruppo raggi cosmici. Rapporto sull'attività svolta dal 1° luglio 1957 al 30 giugno 1958. Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1959. Pp. 15, in-8°, con figg. (Commissione Nazionale Italiana per l'Anno Geofisico Internazionale, 1957–58).

JAPAN CONGRESS (THE FIRST) ON TESTING MATERIALS. — *Proceedings*. Presented at the Editorial Committee of Japan Congress on Testing Materials. Kyoto, The Japan Society for Testing Materials, 1958. Pp. VII–179 e 147 in « Appendice », in-4°, con figg.

Jubilee publication in the commemoration of Professor H. Fujimoto sixtieth birthday. Tokyo, 1958. Pp. 10 preliminari non num. - 493, in-8°, con figg. e tavv.

KNEPPO L'udovít. - *Striedavé prúdy*. Bratislava, Vydavatel'stvo Slovenskiej Akadémie Vied, 1954. Pp. 351, in-8°.

— *Základy teórie transduktorov*. Bratislava, Vydavatel'stvo Slovenskiej Akadémie Vied, 1954. Pp. 147, in-8° (In cilostile).

KŘIVÁNEK Vladimir. — Vedi: VODA Juraj, KŘIVÁNEK Vladimir a GONDA Ján.

LIMIDO Giovanni E. — *Principes de thermodynamique et cinétique chimiques appliquées*. Varese, Soc. Tip. « Multa Paucis », 1959. Pp. 136, in-8°, con figg. (Quaderni della Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell'E.N.I., n. 2).

MASOTTI Arnaldo. - Vedi: TARTAGLIA Niccolò.

MICHEL-LÉVY Christophe. — *Tableaux des mineraux des roches. Résumé des leurs propriété optiques, cristallographiques et chimiques... d'après les anciennes tables de Auguste Michel-Lévy et Alfred Lacroix*. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1959. Pp. 55, in-4°.

MOISIL Gr. C. — *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee*. București, Editura Academiei Republicii Popular Romîne, 1959. Pp. 205, in-4°, con figg. (In ciclostile) (Comisia de Automatizări. Institutul de Matematici. Monografii asupra Teoriei Algebrice e Mecanismelor Automate).

MONTEROSSO Bruno. — *Note Archeologiche*. XXXI: *Il nido-ricovero di* Menemerus semilimbatus (*Hahn*). Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania », s. 6a, vol. XII, 1959.

NAGIEV M. F. — *Učenie e recirkuljacionnyh processah y himičeskoj tehnologii*. Moskva, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1958. Pp. 244, con figg.

Omagiu lui Traian Săvulescu cu prilejul implimirii a 70 de ani. Bucarești, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1959. Pp. XXVII–1179, in-4°, con figg. e tavv.

PARHON C. I. — *Opere alese*. Vol. III: *Endocrinologie generală, glanda tiroidă, glandele paratiroide și timus*. București, Academia Republicii Populare Romîne, 1959. Pp. 538, in-8°, con tavv.

PASYNKOV V. V. — Vedi: BOGORODICKIJ N. P., PASYNKOV V. V. a TAREJEV B. M.

PENZIMONŽ I. I. — *Vosplamenenie sul'fidov tjaželuh metallov*. Alma-Ata, Akademija

Nauk Kazahskoj SSR, 1958. Pp. 95, in–8°, con figg.

POLACCO Giuseppe. — *Del moto e della relatività in generale in 5 libri.* Introduzione al libro IV: *Considerazioni sulla «Legge sulla Gravitazione Universale»*. Roma, 1959. Pp. 11, in–4° (In litografia).

POMINI Luigi. — *La Botanica del Riso ed appendice su le «Alghe della Risaia»*. Illustrate da n. 124 figure. Vercelli, 1958. Pp. 131, in–8°, con figg. (Collana Culturale Scientifica dell'Istituto Tecnico Agrario di Vercelli, 8).

PUGSLEY L. I. — *Contrôle des substances ajoutées aux aliments au Canada.* Rome, Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture, 1959. Pp. 40, in-8° (Collection F.A.O.: Contrôle des substances ajoutées aux aliments, n. 1).

RAMON Gaston. — *Quarante années de recherches et de travaux d'immunologie, de microbiologie, de prophylaxie des maladies infectieuses de l'homme et des animaux.* Toulouse, Presses de l'Imprimerie Régionale, 1957. Pp. XVII-911, in–8°, con figg.

Review of Geodetic and Mapping Possibilities. Frankfurt (Main), Cooperative Society for Geodesy and Cartography, 1957. Pp. 212, in–8°, con tavv.

ROBSON Anthony E. — Vedi: COCKCROFT John D. e ROBSON Anthony E.

ROGLIANO Giuseppe. — *Cenni sulla costituzione geologica dell'Altipiano Sileno e sui terreni agrari e vegetali che ne derivano.* Estr. da «Atti del Secondo Convegno Tecnico della Cassa del Mezzogiorno», 25–26 settembre 1954.

— *Ro.Mo.Co. Formula per combattere i tumori ed impedirne la formazione negli organismi vegetali ed in quelli animali.* Cosenza, Arti Grafiche Chiappetta, 1954. Pp. 34, in–8°.

ROSSINI Angelo. — *Spiegata l'origine delle forze nucleari.* Vetralla, 1959. Pp. 9, in–4° (Dattiloscritto).

SANSONE Giovanni. — *Orthogonal functions.* Revised English Edition. Translated from the Italian by Ainsley H. Diamond ... with a foreword by Einar Hille. New York, Interscience Publishers – London, Interscience Publishers, 1959. Pp. XII–411, in–8° (Pure and Applied Mathematics, vol. IX).

SANTORO Ornella. — *Elementi di igiene orale. Norme di profilassi delle malattie della bocca e dei denti nel bambino, nell'adulto e in particolari categorie di lavoratori.* Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1959. Pp. 62, in–8°, con tavv. (Manuali di divulgazione e di guida pratiche, 2).

SĂVULESCU Olga. — Vedi: SĂVULESCU Traian și SĂVULESCU Olga.

SĂVULESCU Traian. — Vedi: *Omagiu lui Traian Săvulescu.*

SĂVULESCU Traian și SĂVULESCU Olga. — *Tratatd e Patologie vegetală.* Vol. I. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1959. Pp. 725, in–8°, con figg.

SCHWARTZ Laurent. — *Matemática y física cuántica.* Notas tomadas en el curso dictado con el auspicio de la UNESCO durante los meses de julio a octubre. Buenos Aires, Universidad, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, 1958. Pp. 266, in–8° (In litografia.

STAMATIU Mihail. — *Problema dimensionării stîlpilor la minele de sare din R.P.R.* București, Editura Academiei Populare Romîne, 1959. Pp. 159, in–8°.

Status (The) of world health. In outline text and chart. Report of the Committee on Government Operations United States Senate and its Subcommitte on Reorganization and International Organizations (pursuant to S. Res. 347, 85th Congress and S. Res. 42, 86th Congress). Washington, United States Government Printing Office, 1959. Pp. XII–81, in–8°, con tavv.

STODOLA Aurel. — Vedi: VODA Juraj, KŘIVÁNEK Vladimir a GONDA Ján.

Structure of Yūbari coal as observed from properties of its bitumen and pseudobitumen. Estr. da «Nenryo Kyokai–Shi (Journal of the Fuel Society of Japan)», vol. XXXII, 1953.

Suggestions to Authors of Reports of the United States Geological Survey. Washington, United States Government Printing Office, 1958. Pp. XII–255, in–8°.

SYMPOSIUM ON THE FAILURE AND DEFECTS OF BRIDGES AND STRUCTURES. [SEPTEMBER 5th, 1957]. — *Proceedings.* Compiled by Japan Society of Civil Engineers and Architectural Institute of Japan Society

for Promotion of Science, 1958. Pp. 110, in-8°.

TAREJEV B. M. — Vedi: BOGORODICKIJ N.P., PASYNKOV V. V. a TAREJEV B.M.

TARTAGLIA Niccolò. — *Quesiti et inventioni diverse*. Riproduzione in facsimile della edizione del 1554 edita con parti introduttorie da Arnaldo Masotti. Pubblicazione celebrativa del quarto centenario della morte di Niccolò Tartaglia. Brescia, « La Nuova Cartografia », 1959. Pp. XIII-129, in-8°, con figg. (Supplemento ai Commentari dell'Ateneo di Brescia, 1959).

TIHOV G. A. — *Osnovnye trudy*. IV: *Astrobotanika i Astrofizika* (*1912-1957*). Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1959. Pp. 257, in-8°.

Trudy soveščanija po prikladnej gazevoj dinamiki g. Alma-Ata, 23-26 oktjabrja 1956 g. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1959. Pp. 235, in-8°.

VODA Juraj, KŘIVÁNEK Vladimir a GONDA Ján. — *Aurel Stodola 1859-1962*. Pamatke Storočnice Narodenia. Bratislava, Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, 1959. Pp. 155, in-8°.

ZANGHERI Pietro. — *Il naturalista esploratore, raccoglitore, preparatore*. Guida pratica elementare per la raccolta, preparazione, conservazione di tutti gli oggetti di storia naturale. (Animali e piante viventi e fossili. Minerali e rocce. . .) Seconda edizione riveduta ed ampliata. Milano, Ed. Ulrico Hoepli, 1959. Pp. XXIV-426, in-8°, con figg. e tavv.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 dicembre

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni e delle congruenze algebriche.* Nota II [*] del Socio BENIAMINO SEGRE.

Riprendo qui – da un punto di vista completamente diverso – il problema studiato nel § 3 della Nota I [1]. Ottengo così il risultato accennato alla fine di quella, come caso speciale di proprietà molto più late fornenti anche, fra l'altro, una semplicissima condizione sufficiente per la compabilità di un arbitrario sistema di equazioni algebriche, in un qualunque numero di variabili, sopra un corpo finito.

1. – SUI SISTEMI DI EQUAZIONI ALGEBRICHE SOPRA UN CORPO FINITO.

Dato un corpo finito, γ, di cui (come nel § 3 della Nota I) denotiamo l'ordine con $q = p^t$, consideriamo un qualsiasi sistema di $r\,(\geq 1)$ equazioni algebriche in $n\,(\geq 1)$ incognite:

$$f_h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, r), \tag{1}$$

a coefficienti a in γ; e sia $k\,(\geq 0)$ il numero delle soluzioni $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ distinte ch'esso ammette in γ. Dimosteremo anzitutto il

TEOREMA 1. – *Esiste un polinomio* P(a) *nelle* a, *a coefficienti interi, il quale – per ogni scelta delle* a *in* γ *– assume soltanto valori nel campo fonda-*

(*) Presentata all'Accademia il 12 dicembre 1959.

(1) Ved. questo volume dei « Rendiconti », pp. 155–161. La conoscenza di tale Nota non è però necessaria per la comprensione della presente.

mentale di γ, in guisa tale che risulti sempre precisamente

$$P(a) \equiv k \qquad (mod\ p), \tag{2}$$

ove k denoti il suddetto numero di soluzioni.

Onde stabilire questo teorema esplicitando anche l'espressione di $P(a)$, riescirà comodo convenire di dire che un intero $i \geq 0$ è *di tipo* ω per esprimere ch'esso è un multiplo positivo di $q - 1$, ossia quando valgano in pari tempo le

$$i > 0 \quad \text{ed} \quad i \equiv 0 \qquad (\text{mod}\,(q-1)).$$

Allora, in base ad una nota proprietà dei corpi finiti (cfr. per esempio Segre [9], n. 59) e con l'intesa che si debba porre $x^i = 1$ per ogni x se $i = 0$, si ha che

$$\sum_{x \varepsilon \gamma} x^i = \begin{cases} -1 & \text{se } i \text{ è di tipo } \omega \\ 0 & \text{se } i \text{ non è di tipo } \omega, \end{cases}$$

eppertanto:

$$\sum_{x_1 \varepsilon \gamma} \sum_{x_2 \varepsilon \gamma} \cdots \sum_{x_n \varepsilon \gamma} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} = \begin{cases} (-1)^n & \text{se ogni } i \text{ è di tipo } \omega \\ 0 & \text{se qualche } i \text{ non è di tipo } \omega. \end{cases}$$

Ne discende che, preso un qualunque polinomio nelle x a coefficienti c in γ:

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{(i)} c_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \tag{3}$$

sussiste in γ l'uguaglianza

$$\sum_{x_1 \varepsilon \gamma} \sum_{x_2 \varepsilon \gamma} \cdots \sum_{x_n \varepsilon \gamma} g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^n \sum_{(i)_\omega} c_{i_1 i_2 \cdots i_n}, \tag{4}$$

ove la somma a secondo membro si estenda a tutte e sole quelle n^{ple} $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ per le quali ogni i risulti di tipo ω.

Applichiamo ciò, in particolare, al polinomio (3) definito ponendo:

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{h=1}^{r} \{[f_h(x_1, x_2, \cdots, x_n)]^{q-1} - 1\}, \tag{5}$$

il che viene manifestamente a determinare le c quali polinomi, a coefficienti interi, di grado $\leq q - 1$ nei coefficienti a di ciascuna delle f. Attribuendo ad $x_1, x_2, \cdots, x_n$ valori arbitrariamente scelti in γ, anche $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ risulta un elemento di γ, il quale – avuto riguardo alla (5) e ad una nota proprietà dei corpi finiti (cfr. per esempio Segre [9], n. 54) – viene precisamente dato da:

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{se } (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ soddisfa alle (1)} \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ non soddisfa alle (1).} \end{cases} \tag{6}$$

Se ora definiamo $P(a)$ assumendo

$$P(a) = (-1)^{r+n} \sum_{(i)_\omega} c_{i_1 i_2 \cdots i_n}, \tag{7}$$

ove la somma a secondo membro venga limitata alle i tutte di tipo ω e coll'intesa che in luogo delle c si abbiano a porre i suddetti polinomi nelle a, talché $\mathrm{P}(a)$ *risulta di grado* *inferiore* *a* q *nei coefficienti di ciascuna delle* f, in forza della (4) si ottiene l'uguaglianza:

$$\mathrm{P}(a) = \sum_{x_1 \varepsilon \gamma} \sum_{x_2 \varepsilon \gamma} \cdots \sum_{x_n \varepsilon \gamma} [(-1)^r g(x_1, x_2, \cdots, x_n)] . \tag{8}$$

La (6) mostra allora che il secondo membro di questa è somma di (zeri e di) tante unità di γ quante sono le soluzioni distinte ammesse dal sistema (1) in γ, onde discende senz'altro il teorema 1.

Da esso si trae subito il

COROLLARIO 1. – *Affinché il sistema* (1) *sia compatibile in* γ, *è* *sufficiente* *che i coefficienti* a *delle sue equazioni soddisfino alla*

$$\mathrm{P}(a) \not\equiv 0 \qquad (mod\ p). \tag{9}$$

Questa condizione risulta pure *necessaria* *per sistemi* (1) *aventi un numero* k *di soluzioni distinte* *inferiore* *a* p, *od anche – più generalmente – per i quali si sappia che* k *non* *è un multiplo positivo di* p.

Il teorema 1 può in particolare venire applicato – con opportune varianti – a sistemi (1) omogenei, per i quali – al solito – si prescinda dalla soluzione banale $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, e si considerino come fra loro equivalenti soluzioni non banali che differiscano per un fattore non nullo di proporzionalità. Detto k^* il numero delle soluzioni così intese, risulta pertanto

$$k = 1 + (q - 1)\, k^*$$

e quindi $k + k^* \equiv 1$ tanto *mod* q che *mod* p. Dal teorema 1 segue dunque immediatamente il

COROLLARIO 2. – *Un sistema* (1) *omogeneo* *è compatibile in* γ (*ossia ammette ivi soluzioni non banali*) *se i coefficienti* a *delle sue equazioni soddisfano alla*

$$\mathrm{P}(a) \not\equiv 1 \qquad (mod\ p).$$

Questa condizione è pure *necessaria* *per la compatibilità di sistemi omogenei aventi un numero* k^* *di soluzioni distinte* *inferiore* *a* p, *od anche – più generalmente – per i quali si sappia che* k^* *non* *è un multiplo positivo di* p.

A complemento del teorema 1, proveremo ora il

TEOREMA 2. – *Il polinomio* $\mathrm{P}(a)$ *sopra* γ, *dianzi definito, risulta un* *invariante* *assoluto* (*affine nel caso non omogeneo, proiettivo nel caso omogeneo*) *del sistema* (1), *nel senso più oltre specificato. Esso rimane univocamente* *determinato* *dalle due condizioni*: 1ª *di essere di grado* *inferiore* *a* q *in ciascuna delle* a, 2ª *di soddisfare alla* (2) *per* *ogni* *scelta delle* a.

Stabiliamo dapprima la seconda parte del teorema 2. All'uopo consideriamo due polinomi $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}_1(a)$, ciascuno dei quali soddisfi alle condizioni ivi

specificate. In virtù della 2ª di queste, per ogni scelta delle a in γ il polinomio

$$P^*(a) = P(a) - P_1(a)$$

assume il valore zero. E poiché, in forza della condizione 1ª, $P^*(a)$ è di grado inferiore a q in ognuna delle a, la quale – dal canto suo – può liberamente assumere i q valori di γ, ne discende che $P^*(a)$ dev'essere il polinomio nullo (ciò si vede subito con un ragionamento per induzione rispetto al numero delle a, già in altra occasione utilizzato da K. Hensel; cfr. altresì Hurwitz [3], n. 2): sicché i polinomi $P(a)$ e $P_1(a)$ di fatto coincidono (ossia i coefficienti dell'uno sono elementi di γ identici agli omologhi coefficienti dell'altro).

Passiamo ora a dimostrare la prima parte del teorema 2, mediante un'argomentazione che varrà anche a meglio precisare il significato di quella.

Operiamo a tal fine, sui primi membri delle (1), in uno qualunque dei modi seguenti: 1° moltiplichiamo ciascuna delle $f_h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ per un qualsivoglia elemento non nullo di γ; 2° effettuiamo un'arbitraria sostituzione lineare invertibile sulle x, a coefficienti in γ [omogenea o no, secondoché il sistema (1) è o non è omogeneo]. Sia nell'un caso che nell'altro il sistema (1) si trasforma in un analogo sistema, (1'), con nuovi coefficienti, a', legati alle a da una sostituzione lineare omogenea invertibile a coefficienti in γ; e denotiamo con $P_1(a)$ il polinomio nelle a che si ricava da $P(a')$ in forza di quest'ultima, $P(a')$ essendo il polinomio precedentemente definito relativo al sistema (1').

È chiaro che, in entrambi i casi, le soluzioni del sistema (1') in γ vengono a corrispondere biunivocamente alle analoghe soluzioni del sistema (1); sicché il numero k' delle prime uguaglia il numero k delle seconde. Poiché, in base al teorema 1, per ogni scelta delle a oltre alla (2) sussiste l'analoga relazione

$$P(a') \equiv k' \pmod{p},$$

così – in forza della suddetta sostituzione lineare fra le a e le a' – $P(a)$ e $P(a')$ assumono sempre valori uguali, e si ha quindi $P(a) = P_1(a)$ per ogni scelta delle a in γ. La seconda parte del teorema 2 dà allora che i polinomi $P(a)$ e $P_1(a)$ coincidono; onde in virtù dell'effettuata trasformazione risulta identicamente

$$P(a) = P(a'),$$

ciò che mostra l'invarianza di $P(a)$.

2. – Casi particolari, osservazioni complementari e notizie storiche.

Con le notazioni del § 1, supponiamo ora in particolare $r = n = 1$, sicché il sistema (1) si riduce ad un'unica equazione in una sola variabile:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0. \tag{10}$$

Attualmente le (3), (5) forniscono

$$(11) \qquad g(x) = \sum_{h=0}^{m(q-1)} c_h x^h = [f(x)]^{q-1} - 1 \,,$$

e quindi (per $h > 0$):

$$(12) \qquad c_h = \sum_{(i)_h} \frac{(q-1)!}{i_0! \, i_1! \cdots i_m!} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_m^{i_m} \,,$$

coll'intesa di estendere questa somma agli interi $i\,(\geq 0)$ soddisfacenti alle

$$i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_m = q - 1 \quad , \quad i_1 + 2i_2 + \cdots + mi_m = h \,;$$

inoltre la (7) diventa

$$(13) \qquad P(a) = \sum_{j=1}^{m} c_{j(q-1)} \,,$$

onde risulta

$$(14) \qquad P(a) = (q-1)! \sum_{j=1}^{m} \sum_{(i)_{j(q-1)}} \frac{a_0^{i_0}}{i_0!} \frac{a_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{a_m^{i_m}}{i_m!} \,.$$

Nel presente caso speciale il teorema 1, con l'espressione (14) di $P(a)$, trovasi già stabilito (salvo un'imprecisione di cui diremo fra poco) in Mignosi [4], n. 3. L'ulteriore particolarizzazione che da qui si ha supponendo (con le notazioni del § 1) $t = 1$, ossia $q = p$, con che la (10) si riduce alla congruenza algebrica:

$$(15) \qquad a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \equiv 0 \pmod{p}$$

($a_0, a_1, \cdots, a_m$ interi; p primo), era stata data anteriormente da Hurwitz [3], n. 1. In quest'ultimo caso non è restrittivo supporre $m < p$, sicché – se le a non sono tutte nulle – la (15) ha un numero k di soluzioni distinte (ossia fra loro incongrue mod p) inferiore a p: è dunque lecito applicare il corollario 1, avendosi anzi che – nelle ipotesi attuali – la (2), dove $P(a)$ rimane definito dalla (14), *determina* univocamente il suddetto numero k.

Le cose possono andare altrimenti a tale riguardo se $t > 1$, ossia se $q > p$, contrariamente a ciò che trovasi asserito in Mignosi, loc. cit. Si scelga per esempio un campo γ avente $p = 3$, $t = 2$, e quindi $q = 9$, e si consideri in esso l'equazione

$$(16) \qquad f(x) = x^3 + x = 0 \,.$$

Attualmente si ha $g(x) = (x^3 + x)^8 - 1$, eppertanto

$$c_8 = 1 \quad , \quad c_{16} = \binom{8}{4} = 70 \quad , \quad c_{24} = 1 \,,$$

onde la (13) fornisce

$$P(a) = 1 + 70 + 1 = 72 \equiv 0 \pmod{q};$$

ma, ciò non ostante, la (16) ammette in γ $k = 3$ radici distinte.

A fortiori, il teorema 1 fornisce sì un'importante proprietà del *numero k dei punti giacenti su di una varietà algebrica arbitrariamente assegnata sopra un corpo finito*, ma generalmente non determina questo numero. Per valutazioni o limitazioni di esso in casi speciali, cfr. Weil [11], Lang e Weil [2], Nisnevich [6], Rosati [8], Segre [10] § 1.

L'applicazione del teorema 1 all'equazione (10) fornisce poi subito il seguente

COROLLARIO 3. – *Se* $m \leq p - 2$, *il che* (*Nota I*) *non è essenzialmente restrittivo quando* $q = p$, *e definito* $P(a)$ *in funzione delle* $a_0, a_1, \cdots, a_m$ *mediante la* (14), *per nessuna scelta delle a in* γ *si può soddisfare alla* (2) *ove si attribuisca a k uno qualunque dei valori* $m + 1, m + 2, \cdots, p - 1$; *ciò non risulta invece più vero per valori interi di k incongrui a questi ultimi mod p*.

Notiamo infine che, in conformità col teorema 2, il teorema 1 può venir applicato alla (10) in corrispondenza ad un polinomio $P(a)$ diverso da quello definito dalla (14), qualora si lasci cadere per esso la condizione 1ª del teorema 2. Un esempio al riguardo, che quindi conduce ad una formulazione un po' differente (ed in certi casi più semplice) del teorema 1, si ottiene osservando che la (11) fornisce

$$[f(x)]^{q-1} = \sum_{h=0}^{m(q-1)} c_h x^h , \tag{17}$$

ove – per comodità – abbiamo qui modificato la definizione di c_0, il che non ha influenza sull'espressione (13) di $P(a)$. D'altro canto, se moltiplichiamo fra loro a membro a membro le identità date dalle (10), (17), ed applichiamo un noto risultato (cfr. ad esempio Segre [9], n. 55), otteniamo l'identità

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{h=0}^{m(q-1)} c_h x^h\right) = \sum_{k=0}^{mq} b_k x^k ,$$

nella quale va posto:

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \not\equiv 0 \quad (\text{mod } q) \\ a_l & \text{se } k = lq . \end{cases} \tag{18}$$

Questa identità si traduce col sistema di equazioni

$$\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} c_j = b_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, mq) , \tag{19}$$

dove si conviene di assumere

$$a_i = 0 \quad \text{se } i > m \quad , \quad c_j = 0 \quad \text{se } j > m(q-1).$$

Dalle (19), nell'ipotesi non essenzialmente restrittiva che nella (10) si abbia

$$a_0 \neq 0 , \tag{20}$$

e tenuto conto delle (18), si traggono come vedremo le c in funzione delle a; onde sostituendo nella (13) si ricava l'espressione preannunciata di $P(a)$.

Fissato h soddisfacente alle $1 \leq h \leq m(q-1)$, si ottiene più precisamente c_h risolvendo – con la cosiddetta regola di Cramer – il sistema lineare non omogeneo nelle $c_0, c_1, \cdots, c_h$ fornito dalla (19) per $i = 0, 1, \cdots, h$, il cui determinate dei coefficienti (d'ordine $h+1$) vale $a_0^{h+1} \neq 0$. Denotando con k uno qualunque dei numeri $0, 1, \cdots, h$, consideriamo il minore complementare in tale determinante dell'elemento situato nella $(k+1)^{\text{ma}}$ riga e nella $(h+1)^{\text{ma}}$ colonna. Se si sviluppa questo minore secondo le sue prime k righe, si vede subito ch'esso vale

$$a_0^k \mathrm{A}_{h-k},$$

ove si assuma $\mathrm{A}_0 = 1$ e si denoti con A_r per $r > 0$ il determinante

$$\mathrm{A}_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_{-1} \cdots a_{-(r-2)} \\ a_2 & a_1 & a_0 \quad \cdots a_{-(r-3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} \cdots a_0 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} \cdots a_1 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

in cui ciascuna delle a con indice negativo va posta uguale allo zero.

Ne discende quindi, nel modo accennato, che è:

$$c_h = \sum_{k=0}^{h} (-1)^{h-k} a_0^{k-h-1} b_k \mathrm{A}_{h-k};$$

ed il raffronto con la (12) fornisce tosto delle uguaglianze fra le a, valide per ogni scelta di queste che tenga conto della (20). Sostituendo nella (13) alle $c_{j(q-1)}$ le espressioni che da qui in particolare si ricavano per $h = j(q-1)$, onde in base alla (20) risulta $a_0^h = 1$, e tenendo conto delle (18), si ottiene che *la forma* $\mathrm{P}(a)$ *uguaglia il seguente polinomio non omogeneo nelle* a:

$$\mathrm{P}(a) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{(j-l)q-j} a_0^{l-1} a_l \mathrm{A}_{(j-l)q-j}.$$

Lo sviluppo del suddetto determinante A_r, che in quest'ultima formula compare in corrispondenza a diversi valori di r, viene fornito dal seguente teorema, che si può ad esempio stabilire per induzione rispetto ad r e di cui omettiamo l'agevole dimostrazione.

TEOREMA 3. – *Se* $a_0, a_1, \cdots, a_r$ *denotano* $r+1$ *elementi qualsiansi di uno stesso anello, mentre ciascuna delle a con indice negativo sia lo zero di questo, il determinante* (21) *risulta una forma di grado r nelle a espressa da*

$$\mathrm{A}_r = \sum_{(i)} (-1)^{i_0} \frac{(r-i_0)!}{i_1!\, i_2! \cdots i_r!} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r},$$

dove la somma va estesa alle $i \geq 0$ *tali che*:

$$i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_r = r \quad , \quad i_1 + 2 i_2 + \cdots + r i_r = r.$$

3. – Un'applicazione.

Sul corpo finito γ (pel quale conserviamo le notazioni del § 1), consideriamo l'equazione binomia

$$f(x) = x^m - a = 0 \,. \tag{22}$$

Posto per abbreviare

$$d = (m, q-1) \quad , \quad r = (q-1)/d \,, \tag{23}$$

è ben noto (cfr. ad esempio Segre [9], n. 79) che vi sono esattamente r elementi a non nulli di γ, che denoteremo con

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_r \,, \tag{24}$$

per i quali la (22) ammette soluzioni in γ; e che, in corrispondenza a ciascuno di questi, il numero delle radici distinte dell'equazione (22) in γ vale precisamente $k = d$.

Ci proponiamo di dimostrare il

Teorema 4. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché un a di γ sia uno dei suddetti elementi* (24) *è che risulti $a^r = 1$, sicché fra quegli elementi* (24) *sussiste l'identità:*

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r) = x^r - 1 \,. \tag{25}$$

Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che – in base alla (22) – la (11) porge

$$g(x) = \sum_{h=0}^{m(q-1)} c_h x^h = \sum_{i=0}^{q-1} a^{q-1-i} x^{mi} - 1 \,,$$

onde – tenuto conto delle (23) – la (13) attualmente fornisce:

$$P(a) = \sum_{j=0}^{d-1} a^{jr} \,. \tag{26}$$

Inoltre, la prima delle (23) mostra che è

$$d \not\equiv 0 \pmod{p} \,;$$

sicché dal teorema 1 segue che – se a è uno degli elementi (24) – in γ risulta $P(a) \neq 0$. Ma siccome allora è $a \neq 0$, talché in base alle (23), (26) si ha

$$(a^r - 1) P(a) = a^{q-1} - 1 = 0 \,,$$

così dev'essere

$$a^r - 1 = 0 \,. \tag{27}$$

Viceversa, se a soddisfa alla (27), dalla (26) si ricava

$$P(a) = d \not\equiv 0 \pmod{p},$$

onde il teorema 1 assicura che attualmente la (22) ammette qualche radice in γ (essa ne ha allora precisamente d distinte, in virtù di ciò che precede).

Poiché dunque la (27) possiede in γ le r radici distinte (24), ne consegue senz'altro la (25) (cfr. ad esempio Segre [9], nn. 57, 58).

Nel caso particolare delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo (ossia per $t = 1$, $q = p$), la condizione necessaria e sufficiente espressa dalla (27) era stata conseguita da Gauss [1], Sect. III, a mezzo della teoria degli indici; e l'identità (25) – limitatamente a quel caso – fu poi ottenuta con argomentazioni dirette da Rados [7]. Infine l'estensione al caso generale $t \geq 1$, ma con la restrizione – in base a ciò che precede superflua – che m divida $q - 1$ (e sia quindi $d = m$), venne stabilita da Mignosi [5] in due modi diversi, uno dei quali, affine a quello qui seguito, è però soggetto ad obiezione analoga ad altra già accennata nel § 2 in relazione al lavoro [4].

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae* (Lipsiae, Fleischer, 1801).

[2] S. LANG and A. WEIL, *Number of points of varieties in finite fields*, « Amer. J. of Math. », *76*, 818–827 (1954).

[3] A. HURWITZ, *Ueber höhere Kongruenzen*, « Archiv der Math. u. Phys. » (3), *5*, 17–27 (1903) = *Mathematische Werke*, II (Basel, Birkhäuser, 1933, 374–384).

[4] G. MIGNOSI, *Risoluzione apiristica della equazione generale cubica in un corpo numerico finito*, « Rend. Circ. mat. Palermo », *53*, 411–427 (1929).

[5] G. MIGNOSI, *Estensione ai corpi finiti di una formula di Rados*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *7*, 216–219 e 284–289 $(1949)_2$.

[6] L. B. NISNEVICH, *Sul numero dei punti di una varietà algebrica in un campo finito primo* (in russo), « Doklady Ak. Nauk URSS », *99*, 17–20 (1954).

[7] G. RADOS, *Sur une identité remarquable de la théorie des congruences binomes*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », *46*, 308–314 (1922).

[8] L. A. ROSATI, *Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), *11*, 412–418 (1956).

[9] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, I (Bologna, Zanichelli, 1948).

[10] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4), *48*, 1–97 (1959).

[11] A. WEIL, *Number of solutions of equations in finite fields*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *55*, 497–508 (1949).

Elettrochimica. — *Sovratensione di idrogeno su monocristalli di nichel* [*]. Nota di ROBERTO PIONTELLI, LUISA PERALDO BICELLI e AURELIO LA VECCHIA, presentata [**] dal Corrisp. R. PIONTELLI.

In continuazione delle nostre precedenti ricerche sulla sovratensione di idrogeno su elettrodi monocristallini [1], abbiamo determinato le sovratensioni inerenti al nichel. Sono stati sperimentati elettrodi a superficie orientata secondo i piani (100), (110), (111) [2] in bagni: perclorico (0,1 a 0,15 N);

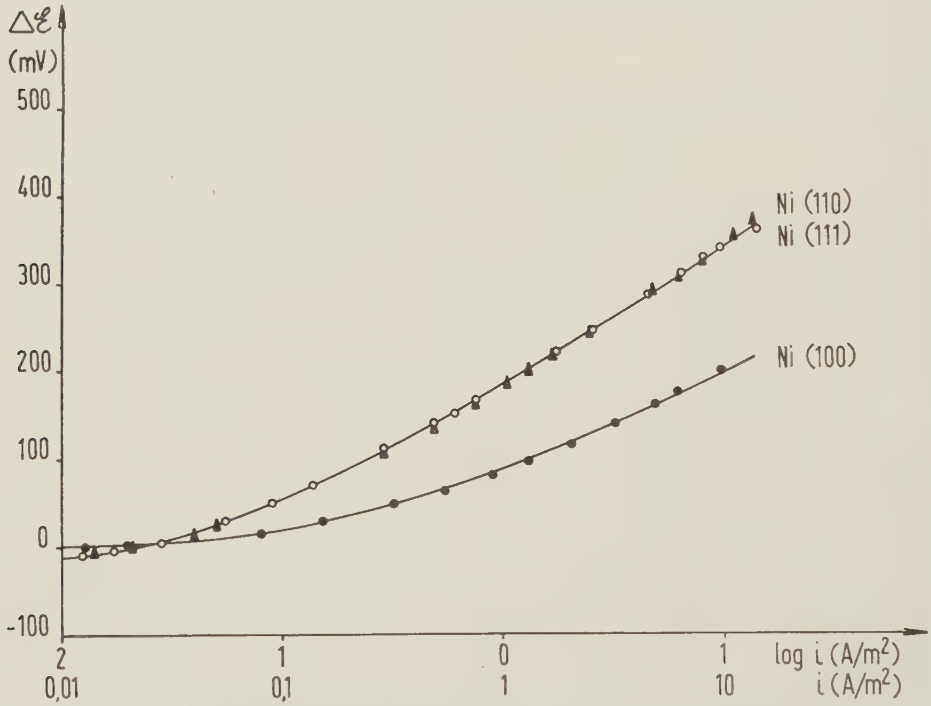


Fig. 1. – Sovratensione di idrogeno su elettrodi di Nichel: Ni (100) in $HClO_4$ 0,1 N, Ni (110) e Ni (111) in $HClO_4$ 0,15 N; $t = 25°$ C.

(*) La presente ricerca è stata finanziata in parte dall'Air Research Development Command USAF tramite l'ufficio europeo di Bruxelles. Parte delle apparecchiature è stata procurata con fondi del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) Cu: R. PIONTELLI, U. BERTOCCI e C. TAMPLENIZZA, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », (A) *91*, 378 (1957).

Ag: I. MARTIN TORDESILLAS, L. PERALDO BICELLI e B. RIVOLTA, « Ann. Chim. », *49*, 1585 (1959).

Pb: I. MARTIN TORDESILLAS e L. PERALDO BICELLI, « Z. f. Elektrochem. », in corso di stampa.

Sn: R. PIONTELLI e L. PERALDO BICELLI, questi « Rendiconti » in corso di stampa.

(2) Gli stessi per i quali sono state da noi effettuate determinazioni delle sovratensioni di scambio di ioni Ni^{2+} (ved. R. PIONTELLI, G. POLI e G. SERRAVALLE, Memoria presen-

cloridrico (0,003 N a 0,005 N) e solfammico (0,1 a 0,105 N), a 25, 45, 65°C, a densità di corrente fino a 50 A/m².

Per la tecnica sperimentale rimandiamo alle precedenti Note (3) e ricorderemo solo che le superficie elettrodiche sono state lucidate anodicamente in H_2SO_4 (70 °/o in volume).

TABELLA I.

Ni (100).

Soluzione	Temp. (°C)	*a* (in mV)	*b* (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,1 N . . .	25°	90	100	— 0,85	25	190	5
	45°	50	80	— 0,65	5	145	
	65°	35	75	— 0,45	— 5	110	
HCl 0,003 N . . .	25°	195	95	— 2,05	100	290	6
	45°	175	105	— 1,80	80	270	
	65°	165	95	— 1,70	70	225	
H_2N-SO_3H 0,105 N	25°	50	135	— 0,40	0	190	12
	35°	25	150	— 0,15	— 10	175	
	45°	— 20	155	0,15	— 15	125	

I principali risultati sono riassunti nelle Tabelle I–III e nelle figg. 1 e 3, e conducono alle seguenti conclusioni:

1° la sovratensione di idrogeno su elettrodi monocristallini di Ni, segue la legge di Tafel;

2° i valori dei parametri *a* e *b* sono indicati nelle Tabelle, insieme a log i_0, ed al valore di ΔH dedotto dalla legge di dipendenza dalla temperatura (4).

tata al Simposio di Elettrochimica teorica dell'Electrochemical Society, Philadelphia, aprile 1959, in corso di stampa).

(3) Ved. in particolare (1) Sn.

(4) Ci riserviamo di discutere nella Nota conclusiva di questa serie il significato teorico di queste grandezze, che si considerano espressioni: i_0 della densità di corrente di scambio di ioni H^+ tra elettrodo e soluzione in condizioni di equilibrio; ΔH della «entalpia di attivazione».

TABELLA II.

Ni (110).

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,15 N . .	25°	190	155	— 1,2	55	350	6
	45°	155	150	— 1,05	35	325	
	65°	120	160	— 0,74	30	280	
HCl 0,005 N . . .	25°	245	80	— 3,05	160	325	8
	45°	230	85	— 2,70	145	315	
	65°	205	85	— 2,40	120	290	
$H_2N–SO_3H$ 0,105 N	25°	110	130	— 0,85	30	250	12
	35°	105	135	— 0,75	15	240	
	45°	55	130	— 0,40	5	185	

TABELLA III.

Ni (111).

Soluzione	Temp. (°C)	a (in mV)	b (in mV)	log i_0 (i_0 in A/m²)	Sovratensione a 0,1 A/m² (in mV)	Sovratensione a 10 A/m² (in mV)	ΔH (in Kcal/mole)
$HClO_4$ 0,15 N . .	25°	180	150	— 1,20	60	335	10
	35°	160	145	— 1,10	35	305	
	45	120	145	– 0,85	20	265	
	65°	75	135	— 0,55	5	210	
HCl 0,005 N . . .	25°	160	90	— 1,80	75	250	10
	45°	115	105	— 1,15	30	220	
	65°	100	90	— 1,10	20	200	
$H_2N–SO_3H$ 0,1 N .	25°	40	90	— 0,45	10	130	4
	35°	35	80	— 0,45	5	115	
	45°	25	70	— 0,35	0	95	

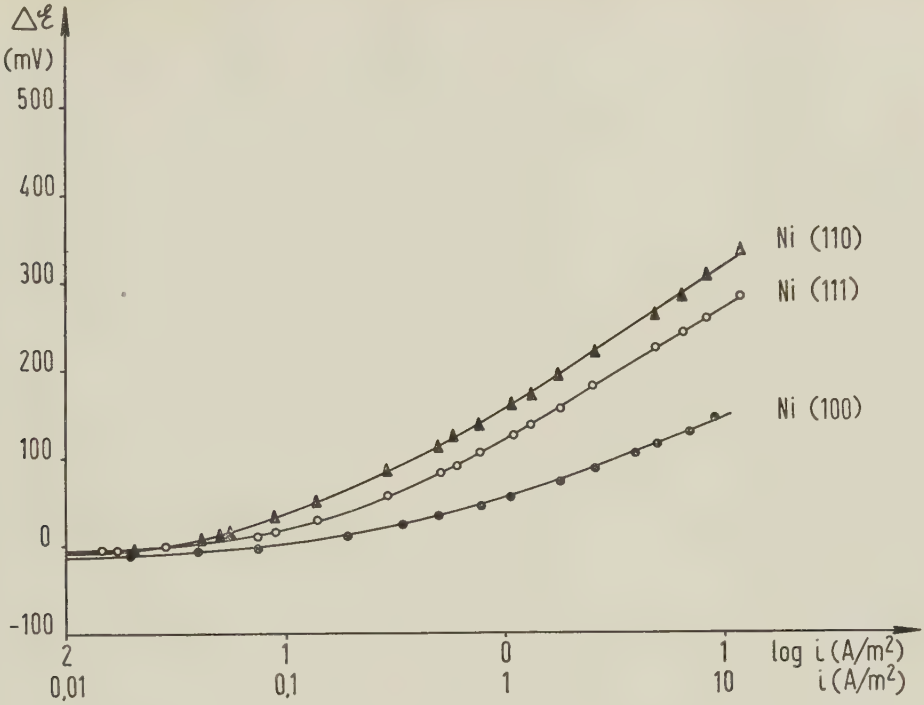


Fig. 2. – Sovratensione di idrogeno su elettrodi di Nichel: Ni (100) in $HClO_4$ 0,1 N, Ni (110) e Ni (111) in $HClO_4$ 0,15 N; $t = 45°C$.

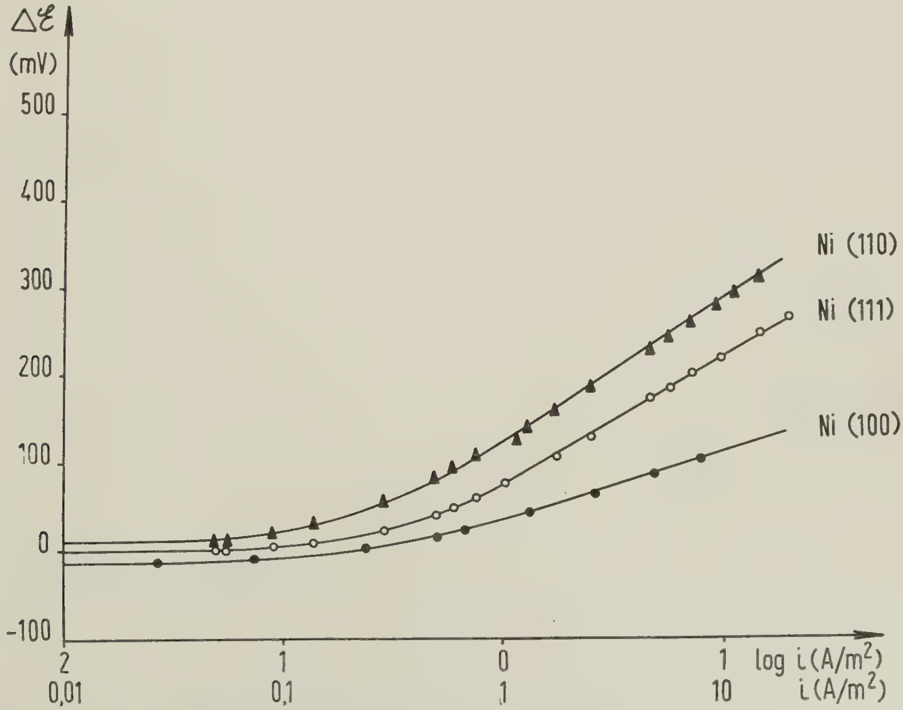


Fig. 3. – Sovratensione di idrogeno su elettrodi di Nichel: Ni (100) in $HClO_4$ 0,1 N, Ni (110) e Ni (111) in $HClO_4$ 0,15 N; $t = 65°C$.

Il campo di valori corrispondenti ai diversi orientamenti ed alle diverse condizioni da noi studiati include i valori ottenuti in recenti ricerche di altri autori (5), con elettrodi di nichel policristallino;

3° il valore assoluto $|\Delta E|$ delle sovratensioni (negative) misurate, dipende, a parità di ogni altra condizione, dall'orientamento, con legge influenzata, però, anche dalla natura del bagno. Così, in soluzione perclorica, $|\Delta E|$ cresce nell'ordine: $(100) < (111) \leq (110)$; mentre, nelle soluzioni cloridrica e solfammica, l'ordine è: $(111) < (100) < (110)$. Quindi, il piano di minor addensamento atomico ha sovratensione maggiore; e quello di maggior addensamento ha tendenzialmente sovratensioni più basse (6);

4° al crescere della temperatura, $|\Delta E|$ decresce;

5° alle concentrazioni esaminate (7): la soluzione solfammica ha sempre sovratensione minore. Inoltre, la soluzione cloridrica ha sovratensione: maggiore della perclorica, per il piano (100); mentre, per i piani (110) e (111), ciò avviene solo alle basse densità di corrente e per un intervallo tanto maggiore, quanto più elevata è la temperatura. Il piano (111), in soluzione solfammica, presenta un comportamento anomalo, poiché talora si trovano valori di sovratensione più alti, che diminuiscono lasciando l'elettrodo sotto corrente e tendono a dei valori limiti, che sono quelli riportati in Tabella.

(5) J. O' M. BOCKRIS e E. C. POTTER, « J. Chem. Phys. », *20*, 614 (1952); J. A. AMMAR e S. AWAD, « J. Phys. Chem. », *60*, 837 (1956).

(6) La dipendenza delle sovratensioni dall'orientamento, nel caso degli scambi di ioni Ni^{2+}, è piuttosto complessa (ancora, specie per quanto riguarda il piano (111) e per la grandissima sensibilità al grado di perfezione cristallografico ed allo stato di superficie); per cui non è attualmente possibile controllare, in modo conclusivo, se anche in questo caso vige la regola empirica, da noi stabilita, dell'anticorrelazione tendenziale tra le sovratensioni di scambio: degli ioni del metallo elettrodico, da un lato; e degli ioni idrogeno, dall'altro.

(7) Come indicato, nelle nostre esperienze, le soluzioni perclorica e solfammica, avevano concentrazioni poco discoste; mentre la cloridrica era assai più diluita.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati.* Nota II di GAETANO FICHERA, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

Avvertiamo che in questa Nota II la numerazione dei paragrafi, dei teoremi, delle formole e delle note a piè di pagina prosegue quella della Nota I dallo stesso titolo.

5. – ESTENSIONE DI UN TEOREMA DI F. E M. RIESZ AI DOMINÎ MOLTEPLICEMENTE CONNESSI.

Sia A un insieme aperto, connesso e limitato del piano, la cui frontiera Σ sia formata dalla $n+1$ curve di Jordan chiuse: Σ_0 (contorno esterno), $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ (contorni interni) $(n \geq 0)$. Supponiamo che Σ_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ abbia una curvatura continua e che Σ_i e Σ_j siano disgiunti per $i \neq j$. Si fissino i punti $z_1^0, z_2^0, \cdots, z_n^0$ scelti arbitrariamente nell'interno dei dominî limitati, rispettivamente, da $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$. Consideriamo le $n+1$ successioni di funzioni

$$\{\zeta^k\}\ (k=0, 1, \cdots), \{(\zeta - z_1^0)^{-h}\}, \{(\zeta - z_2^0)^{-h}\}, \cdots, \{(\zeta - z_n^0)^{-h}\}\ (h = 1, 2, \cdots).$$

Si supponga che tutte le funzioni delle $n+1$ successioni considerate siano ordinate in un'unica successione $\{\varphi_k(\zeta)\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$.

Indichiamo con C (Σ) lo spazio di Banach delle funzioni complesse continue su Σ con la usuale norma uniforme. Indicheremo con $C^*(\Sigma)$ lo spazio duale di C (Σ) (spazio dei funzionali lineari limitati su C (Σ)). Sia $\mathfrak{L}$ (A) lo spazio vettoriale delle funzioni complesse $u(z)$ definite su A, verificanti le seguenti condizioni:

1ª $u(z)$ è olomorfa in A; 2ª se Σ_ϱ denota la frontiera (insieme di curve chiuse disgiunte) definita da $z_\varrho = z + \rho \vec{\nu}(z)$ $(z \in \Sigma$, $\vec{\nu}(z)$ vettore unitario secondo la normale interna a Σ, $0 < \rho \leq \rho_0)$, allora $\int_{\Sigma_\varrho} |u| \, ds_{z_\varrho}$ è una funzione limitata di ρ.

Il seguente teorema estende al campo A un teorema dato da F. e M. Riesz per il cerchio [11] e ne fornisce ulteriori complementi.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

(11) Cfr. [9]; [12] p. 158; cfr. inoltre [1]. Le parentesi [ ] rimandano alla Bibliografia alla fine di questa Nota.

VII. *Sia* $C_0^*(\Sigma)$ *il sottospazio di tutti gli elementi* F *di* $C^*(\Sigma)$ *verificanti le seguenti condizioni*:

$$F[\varphi_k(z)] = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5.1}$$

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{L}(A)$ *è uno spazio linearmente isomorfo a* $C_0^*(\Sigma)$ *e tale isomorfismo è espresso dalle seguenti trasformazioni*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} F_\zeta\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] \qquad (z \in A, \zeta \in \Sigma) \tag{5.2}$$

$$F(p) = \lim_{\varrho \to 0} \int_{+\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\, u(z_\varrho)\, dz_\varrho, \tag{5.3}$$

(*p è un'arbitraria funzione continua in* $A \cup \Sigma$).

Se α *è la misura su* Σ *che rappresenta* F, *essendo* $F(p) = \int_\Sigma p\zeta'\, d\alpha$ (*in accordo al teorema di rappresentazione di Riesz*), *allora* α *è assolutamente continua e, indicata con* φ *la sua derivata, si ha* (*in ogni punto* z_0 *di Lebesgue per* α): $\lim u(z) = \varphi(z_0)$ *se* z *tende a* z_0, *rimanendo in qualsiasi angolo i cui lati sono interni ad* A *e non tangenti a* Σ.

Dimostriamo in primo luogo che la (5.2) è un isomorfismo di $C_0^*(\Sigma)$ in $\mathfrak{L}(A)$. La funzione

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} F_\zeta\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{\zeta'\, d\alpha_\zeta}{\zeta - z} = \tag{5.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_\zeta}\log|\zeta - z|\, d\alpha_\zeta - \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|\zeta - z|\, d\alpha_\zeta$$

ovviamente verifica la prima delle condizioni – cioè la 1ª – che definiscono $\mathfrak{L}(A)$. Siccome le condizioni (5.1) sono equivalenti a:

$$F_\zeta\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] = 0 \tag{5.5}$$

per ogni z esterno ad A, dai teoremi V e VI si deduce che la (5,3) è verificata.

Poniamo

$$F_\varrho(p) = \int_\Sigma p(z)\, u(z_\varrho)\, \frac{dz_\varrho}{ds_z}\, ds_z.$$

Prolunghiamo $p(z)$ assumendo $p(z_\varrho) = p(z)$. Allora

$$\lim_{\varrho \to 0} F_\varrho(p) = \lim_{\varrho \to 0}\int_{+\Sigma_\varrho} p(z_\varrho)\, u(z_\varrho)\, dz_\varrho = F(p).$$

Per il teorema di Banach–Steinhaus,

$$\int_\Sigma |u(z_\varrho)| \left|\frac{dz_\varrho}{ds_z}\right| ds_z$$

deve essere una funzione limitata di ρ. Ciò ovviamente significa che $u(z)$ soddisfa la condizione 2ª. Poiché (5.3) è soddisfatta per ogni $u(z)$ data da (5.2), $u(z) \equiv 0$ è possibile se e solo se $F = 0$.

Dimostriamo ora che l'isomorfismo (5.2) è « su ». Sia $u \in \mathfrak{L}(A)$. Si definisca $F_\rho(p)$ come in precedenza. La condizione 2ª significa che la famiglia di funzionali $\{F_\rho(p)\}$ è compatta nella topologia debole* [12]. Se F è un elemento di compattezza* di $\{F_{\rho_k}\}$ ($\lim \rho_k = 0$), allora si vede immediatamente che F verifica la (5.1) ed u è data dalla (5.2). Dalle (5.4), (5.5) e dai teoremi III, IV, segue che $\lim\limits_{z \to z_0} u(z) = \varphi(z_0)$ quando z tende a z_0. lungo ogni cammino non tangente a Σ (più precisamente se $z \to z_0$ rimanendo in un angolo interno a Σ i cui lati non toccano Σ).

Rimane ora da dimostrare solamente l'assoluta continuità di α. Dopo quanto abbiamo dimostrato, questo fatto è concettualmente non distinto dal caso di un campo circolare, considerato da F. e M. Riesz. È evidente nel caso $n = 0$, poiché la classe $\mathfrak{L}(A)$ è covariante rispetto ad una rappresentazione conforme di A sul cerchio unitario. Nel caso $n > 0$, sia A il campo limitato di frontiera Σ_h $(h = 0, 1, \cdots, n)$ e B_h il campo esterno. Poniamo

$$f_h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma_h} \frac{\zeta' \, d\alpha}{\zeta - z} \cdot$$

La funzione $f_0(z)$ appartiene a $\mathfrak{L}(A_0)$. Dalle (5.5), (4.1), (4.2), (4.4) segue facilmente che α è assolutamente continua su Σ_0. Sia $\rho_h > 0$ tale che il cerchio di centro z_h^0 e raggio ρ_h appartenga ad A_h. La funzione $f_h(\rho_h/z - z_h)$ appartiene a $\mathfrak{L}(\tilde{B}_h)$, $\tilde{B}_h$ essendo il codominio di $\rho_h/z - z_k$ quando z descrive B_h. Da ciò segue, come nel caso $h = 0$ che α è assolutamente continua su Σ_h.

Come corollario si ha il seguente ben noto [13] teorema di completezza:

VIII. *Sia* $\Omega(A)$ *lo spazio di Banach delle funzioni* $u(z)$ *olomorfe in* A *e continue in* $A \cup \Sigma$, *con la norma* $\|u\| = \max\limits_{\Sigma} |u|$. *La successione* $\{\varphi_k(\zeta)\}$ *dianzi considerata è completa in* $\Omega(A)$.

Un qualunque elemento F dello spazio duale $\Omega^*(A)$ ha la rappresentazione $F(u) = \int\limits_{\Sigma} uz' \, d\alpha$. Se la (5.1) è verificata, allora per la (5.3) $F(u) = 0$ per ogni $u \in \Omega(A)$. Cio significa che $\{\varphi_k\}$ è completa.

(12) Se C è uno spazio di Banach e C* il suo duale, si dice che la famiglia {F} di elementi di C* è compatta nella topologia debole* di C* se, data comunque una successione $\{F_k\}$ di elementi di {F}, essa contiene una sottosuccessione $\{F_{h_k}\}$ tale che esista un F_0 di C* per il quale $\lim\limits_{k \to \infty} F_{h_k}(u) = F_0(u)$ qualunque sia u in C. L'elemento F_0 dicesi un elemento di compattezza * per $\{F_k\}$.

(13) Cfr. [11].

6. – Completezza di successioni di funzioni razionali con poli semplici assegnati.

Vogliamo ora considerare il seguente problema. Sia $\{z_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ una successione di punti distinti tutti esterni ad $A \cup \Sigma$. Si richiede di trovare le condizioni necessarie e sufficienti che devono esser soddisfatte da $\{z_k\}$ in modo tale che la successione $\{1/\zeta - z_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ sia completa in $\Omega(A)$.

Il problema è risolto dal seguente teorema:

IX. *Sia* $\{z_h^{(0)}\}$ *l'insieme di tutti i punti distinti di* $\{z_k\}$ *che sono contenuti in* B_0 *e* $\{z_h^{(i)}\}$ *l'insieme dei punti distinti di* $\{z_k\}$ *contenuti in* A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Il sistema $\{(\zeta - z_k)^{-1}\}$ *è completo in* $\Omega(A)$ *se e solo se nessuno degli insiemi* $\{z_h^{(0)}\}, \cdots, \{z_h^{(n)}\}$ *è vuoto e tutte le serie* $\sum_h d(z_h^{(j)})$ $(j = 0, \cdots, n)$ ($d(z)$ è la distanza di z da Σ) *divergono.*

La dimostrazione è basata sul seguente lemma:

X. *Sia* Σ *una curva di Jordan chiusa con curvatura continua. Sia* A *il campo limitato di frontiera* Σ. *Sia* α *una misura definita su* Σ. *Si consideri in* A *la funzione olomorfa:*

$$a(z) = \int_{\Sigma} \frac{\zeta' \, d\alpha_\zeta}{\zeta - z},$$

che supponiamo non identicamente nulla.

Sia $\{z_k\}$ *la successione dei punti nei quali* a *s'annulla in* A, *ognuno considerato tante volte quant'è la sua molteplicità. La serie* $\sum_k d(z_k)$ *converge. Il medesimo risultato sussiste se* A *denota l'esterno di* Σ.

Basta solo dimostrare il teorema nel primo caso (A limitato): Sia $f(w)$ una funzione che rappresenta conformemente il cerchio unitario $|w| \leq 1$ su $A \cup \Sigma$. Sia β la misura su Γ $(|w| = 1)$ tale che per ogni insieme di Borel $B \subset \Sigma$, $\beta[f^{-1}(B)] = \alpha(B)$. Si consideri la funzione:

$$a[f(w)] = U(w) = \int_{\Gamma} \frac{f'(t) \, d\beta_t}{f(t) - f(w)} .$$

Si vede facilmente che $U(w) = U_0(w) + U_1(w)$, dove $U_1(w)$ è limitato,

$$U_0(w) = \int_{\Gamma} \frac{t' \, d\gamma_t}{t - w},$$

e γ è una misura su Γ. Possiamo inoltre supporre che $[\Re U_0]_{w=0} = 0$. Si ha:

$$U_0(w) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s_t} \log|t - w| \, d\gamma_t - i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_t} \log|t - w| \, d\gamma_t = -i(u + iv).$$

Per ogni $0 < \rho < 1$ ed ogni $0 < p < 1$ sussiste la disuguaglianza:

$$\int_0^{2\pi} |v(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \leq B_p \left(\int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})| d\theta\right)^p,$$

ove B_p è una costante che non dipende da ρ (14).

Poiché dalla (4.1) segue

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} p(\theta)\, u(\rho e^{i\theta})\, d\theta = -\pi \int_0^{2\pi} p(\theta)\, d\gamma - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta)\, d\theta$$

per ogni funzione continua $p(\theta)$, allora

$$\int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \leq L$$

con L indipendente da ρ. Abbiamo così provato che

$$\int_0^{2\pi} |U(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \leq K$$

con K indipendente da ρ.

Si indichi con $\{w_k\}$ l'insieme di tutti gli zeri di $U(w)$, ognuno contato in accordo alla sua molteplicità. La serie $\sum_k (1 - |w_k|)$ converge (15). Si ha $z_k = f(w_k)$. Proviamo che la serie $\sum_k (1 - |w_k|)$ converge se e solo se la serie $\sum_k d(z_k)$ converge. Infatti sia $z = f(w)$ un punto di A. Si consideri il sistema di coordinate curvilinee (s, ρ) dato da $z = \zeta(s) + \rho \vec{\nu}(s)$ $(0 \leq \rho < \rho_0)$ [$\zeta = \zeta(s)$ è l'equazione di Σ]. Il raggio passante per w del cerchio unitario è trasformato in un arco ortogonale a Σ in $\zeta_0 = \zeta(s_0)$. La parte di quest'arco che è contenuta nel sottoinsieme $A_{\varrho_0}: 0 \leq \rho \leq \rho_0$ di A può venir rappresentata dall'equazione $s = \psi(\rho)$ (purché si supponga ρ_0 abbastanza piccolo). Si supponga $z \in A_{\varrho_0}$. Si ha: $1 - |w| = |\zeta_0 - z| \geq d(z)$. D'altra parte, se (s, ρ) sono le coordinate curvilinee di z, si ha

$$\begin{aligned} 1 - |w| &= |\zeta[\psi(0)] - z[\psi(\rho)] - \rho\nu[\psi(\rho)]| \leq \\ &\leq 2|\psi(\rho) - \psi(0)| + \rho \leq (2M + 1)\rho = (2M + 1)\, d(z). \end{aligned}$$

M è un numero positivo che maggiora $|d\psi/d\rho|$ e – ovviamente – può esser scelto indipendente da z. Poiché l'asserto deve esser provato solo se defi-

(14) Cfr. [12], p. 150. Nel caso qui considerato, u e v sono ambedue reali, ma l'estensione al nostro caso è ovvia.

(15) Cfr. [12], p. 161.

nitivamente riesce $z_k \in A_\varrho$, ammesso ciò, si deduce, per k sufficientemente grande, che:

$$d(z_k) \leq 1 - |w_k| \leq (2M + 1)\, d(z_k),$$

con M indipendente da k.

Siamo ora in condizione di dimostrare il teorema IX. Dal teorema VII segue che lo spazio duale $\Omega^*(A)$ di $\Omega(A)$ è lo spazio fattoriale $C^*(\Sigma)/C_0^*(\Sigma)$.

Per dimostrare la sufficienza, dobbiamo provare che se $F \in C^*(\Sigma)$ e verifica l'equazione $F[(\zeta - z_k)^{-1}] = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, allora $F \in C_0^*(\Sigma)$.

La funzione $u(z) = F[(\zeta - z)^{-1}]$ soddisfa in B_0 ed in ogni A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ le condizioni del lemma X. Allora deve annullarsi ovunque in $B_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$; cioè le (5,1) sono verificate.

Si supponga ora che $\{(\zeta - z_k)^{-1}\}$ sia completa e che una delle serie $\sum_k d(z_k^{(i)})$ converga, per esempio $\sum_k d(z_k^{(1)})$. Servendosi di una rappresentazione conforme di A_1 sul cerchio unitario, si costruisce una funzione $G(z)$ limitata, olomorfa, non identicamente nulla, avente come zeri tutti gli $z_k^{(1)}$ (16). Poiché $G(z)$ è limitata, essa è definita quasi ovunque su Σ_1 e sussiste la formola di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\Sigma_1} \frac{G(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \begin{cases} = 0 & z \text{ esterno ad } A_1 \\ = G(z) & z \text{ interno ad } A_1 . \end{cases}$$

Assumendo $\alpha \equiv 0$ su ogni insieme di Borel

$$B \subset \Sigma_h \quad , \quad h \neq 1, \quad \text{e} \quad \alpha(B) = \int_B G(\zeta)\, ds_\zeta$$

per $B \subset \Sigma_1$ e ponendo

$$F(p) = \int_\Sigma \zeta'\, d\alpha ,$$

si ottiene un funzionale di $C^*(\Sigma)$ tale che

$$F[(\zeta - z_k)^{-1}] = 0 \qquad\qquad (k = 0, 1, \cdots)$$

e non appartenente a $C_0^*(\Sigma)$.

Bibliografia.

[1] E. Bishop, *On the structure of certain measures*, « Duke Math. Journ. », 1958.

[2] W. Blaschke, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analitischer Funktionen*, « Ber. ü. d. Ver. der Königlichen Sachsischen Gesell. der Wissen. », Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 1915.

[3] G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, « Ist. Matem. Univ. Trieste », 1954.

(16) Cfr. [2]; cfr. inoltre [12], p. 160.

[4] G. FICHERA, *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, « Rend. di Matem. e delle sue appl. », Roma 1958.

[5] G. C. EVANS, *Fundamental points of potential theory*, « The Rice Institute pamphlet », vol. VII, ottobre 1920, n. 4.

[6] G. C. EVANS–E. R. C. MILES, *Potentials of general masses in single and double layers*, « Journal of Math. », vol. 53 (1931).

[7] S. N. MERGELYAN, *Uniform approximation to functions of a complex variable*, « Amer. Math. Soc. translations », n. 101 (1952).

[8] P. PORCELLI, *Uniform completeness of sets of reciprocals of linear functions*, I and II, « Duke Math. Journal », 1953 and 1954.

[9] F. und M. RIESZ, *Ueber Randwerte einer analytischen Funktion*. Quatrieme Congrès des Math. Scandinaves, 1916.

[10] F. RIESZ–B. Sz. NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, « Acc. des Sciences de Hongrie », Budapest (1955).

[11] J. L. WALSH, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. XX (1935).

[12] A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*. Dover 1955.

Analisi matematica. — *Sur l'équation des télégraphistes avec un petit paramètre.* Nota di MILOŠ ZLÁMAL, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

§ 1. INTRODUCTION. – En [1] je me suis occupé du problème mixte pour l'équation hyperbolique

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{L}u = \mathrm{F}(x, t), \tag{1}$$

où ε était un petit paramètre positif, $\beta(t)$ une fonction positive continue pour $t \geq 0$, x le point $(x_1, \cdots, x_n)$ en E_n, $\mathrm{L}u$ un opérateur différentiel elliptique de la forme $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)u$ et $F(x, t)$ une fonction assez regulière pour $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq 0$. Ω représente un domaine en E_n dont la frontière a été désignée par S. Les conditions initiales et celles aux limites étaient de la forme

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad , \quad u|_{\mathrm{S}} = 0 .$$

Il s'agissait de faire voir quelle était la relation entre la solution de ce problème et celle du problème analogue pour l'équation abrégée que nous obtenons de (1) en posant $\varepsilon = 0$, c'est à dire pour l'équation parabolique

$$\beta(t) \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - \mathrm{LU} = \mathrm{F}(x, t).$$

Dans ce travail nous nous occupons de la même question avec la seule différence que nous allons traiter le problème de Cauchy. Tandis qu'au cas du problème mixte nous nous sommes servis de la méthode de Fourier, nous allons appliquer a présent la transformation de Fourier. Cela exige, naturellement, de se limiter aux équations à coefficients constants. Il suffit, par conséquent, de considérer le cas où l'opérateur L est l'opérateur Δ de Laplace. Par suite, nous allons traiter l'équation des télégraphistes

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mathrm{F}(x, t). \tag{2}$$

La solution est déterminée par les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x). \tag{3}$$

L'équation abrégée est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - \Delta \mathrm{U} = \mathrm{F}(x, t) \tag{4}$$

et, naturellement, il n'y a qu'une condition initiale:

$$\mathrm{U}(x, 0) = f(x). \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

Alors, on s'occupe d'une équation aux dérivées partielles avec un petit paramètre figurant dans les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé. C'est un problème fréquemment étudié a présent (voir p. ex. [2]). Il est vrai, que si ce petit paramètre égale zéro, l'ordre de l'équation, dans le cas qui nous occupe, ne diminue pas comme d'habitude, mais l'équation change de type et par conséquent, une condition initiale va être perdue. A cause de cela on ne peut pas espérer que la solution $u(x, t)$ sera une fonction holomorphe de ε au point $\varepsilon = 0$. Au contraire, la nature du problème laisse prévoir que la formule asymptotique pour $u(x, t)$ va contenir les termes de la couche frontière (voir [2], p. 7 et 8).

Nous allons résoudre séparément le cas homogène et le cas non-homogène, parce que dans le cas homogène les formules que nous déduirons seront valables pour $t \geq 0$, tandis que dans le cas nonhomegène seulement pour t d'un intervalle fini. Etant donné que dans les deux cas la méthode, que nous employons, est toujours la même, nos considérations dans le cas nonhomogène sont bien abréviées.

§ 2. LE CAS HOMOGÈNE. – L'équation non-abrégée est

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{6}$$

l'équation abrégée

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U. \tag{7}$$

Les conditions initiales restant les mêmes, on a les équation (3) et (5).

Supposons que $f(x) \in C^{(n+5)}(E_n)$ et $g(x) \in C^{(n+3)}(E_n)$ et que ces fonctions sont à support compact. Dans ces conditions nous allons démontrer que pour $x \in E_n$ et $t \in \langle 0, \infty)$ on a

$$\left\{\begin{aligned} u(x, t) &= U(x, t) + O(\varepsilon), \\ u_t(x, t) &= U_t(x, t) + k(x)\, e^{-t/\varepsilon} + O(\varepsilon), \\ u_{x_i}(x, t) &= U_{x_i}(x, t) + O(\varepsilon), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où $k(x) = g(x) - \Delta f(x)$.

Il s'ensuit des formules (8) que $u(x, t) \to U(x, t)$ et $u_{x_i}(x, t) \to U_{x_i}(x, t)$ uniformément pour $x \in E_n$ et $t \geq 0$ et de même $u_t(x, t) \to U_t(x, t)$ uniformément pour $x \in E_n$ et $t \in \langle \delta, \infty)$, δ étant un nombre positif arbitrairement petit.

Démonstration. – En procédant de la même manière comme en [1] nous posons

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon k(x)\,[1 - e^{-t/\varepsilon}] + \varepsilon z(x, t) \tag{9}$$

et nous allons estimer la fonction $z(x, t)$ et ses premières dérivées partielles. Il suffit de démontrer qu'on a $z(x, t) = O(1)$, $z_t(x, t) = O(1)$ et $z_{x_i}(x, t) = O(1)$ dans le domaine $E_n \times \langle 0, \infty)$.

En substituant (9) dans l'équation (6) on peut vérifier facilement que $z(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = \mathrm{K}(x, t, \varepsilon), \tag{10}$$

où

$$\mathrm{K}(x, t, \varepsilon) = -\mathrm{U}_{tt}(x, t) + \Delta k(x)[1 - e^{-t/\varepsilon}].$$

On a en outre

$$z(x, 0) = z_t(x, 0) = 0. \tag{11}$$

Désignons par $w(s, t)$ la transformée de Fourier de la fonction $z(x, t)$, de sorte que $w(s, t) \equiv \mathfrak{F}[z(x, t)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathrm{E}_n} z(x, t)\, e^{-i(x,s)}\, \mathrm{d}x$, où $s = (s_1, \cdots, s_n)$ et $(x, s) = x_1 s_1 + \cdots + x_n s_n$. Dans l'équation (10) nous passons maintenant aux transformées de Fourier. Il est naturel que nous avons à montrer que: 1° la transformée de Fourier de la fonction $z(x, t)$ existe, c'est ce qui veut dire que l'intégrale $\int\limits_{\mathrm{E}_n} z(x, t)\, e^{-i(x,s)}\, \mathrm{d}x$ est convergente; 2° cette intégrale peut être différentiée deux foix par rapport à t sous le signe d'intégration; 3° il existe $\mathfrak{F}[\Delta z(x, t)]$ et on a

$$\mathfrak{F}[\Delta z(x, t)] = -\rho^2 \mathfrak{F}[z(x, t)] \quad , \quad \text{où} \quad \rho^2 = s_1^2 + \cdots + s_n^2.$$

De (9) on voit qu'il suffit de montrer que les transformées de Fourier des fonctions $u(x, t)$, $\mathrm{U}(x, t)$ et $k(x)$ ont les trois propriétés en question. La solution $u(x, t)$ ainsi que $k(x)$ sont des fonctions à support compact. C'est pourquoi les transformées de Fourier de $u(x, t)$ et $k(x)$ ont les trois propriétés mentionnées ci-dessus. Quant à $\mathrm{U}(x, t)$ nous démontrerons les mêmes propriétés plus tard.

Pour déduire l'équation différentielle pour la transformée $w(s, t)$, introduisons les notations suivantes: $\mathfrak{F}[f(x)] = \varphi(s)$, $\mathfrak{F}[g(x)] = \psi(s)$. On a, évidemment, $\mathfrak{F}[\mathrm{U}(x, t)] = \varphi(s)\, e^{-\varrho^2 t}$. Comme il sera démontré plus tard, on a $\mathfrak{F}[\Delta^2 \mathrm{U}(x, t)] = \rho^4 \mathfrak{F}[\mathrm{U}(x, t)]$. Donc $\mathfrak{F}[\mathrm{U}_{tt}(x, t)] = \mathfrak{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathrm{U}(x, t)\right] = \mathfrak{F}[\Delta^2 \mathrm{U}(x, t)] = \rho^4 \varphi(s)\, e^{-\varrho^2 t}$, de sorte que $\mathrm{H}(s, t) \equiv \mathfrak{F}[\mathrm{K}(x, t, \varepsilon)] = -\rho^4 \varphi(s)\, e^{-\varrho^2 t} - [\rho^4 \varphi(s) + \rho^2 \psi(s)][1 - e^{-t/\varepsilon}]$ et l'on obient les équations

$$\varepsilon \ddot{w} + \dot{w} + \rho^2 w = \mathrm{H}(s, t), \tag{12}$$

$$w(s, 0) = \dot{w}(s, 0) = 0. \tag{13}$$

Pour estimer les fonctions $w(s, t)$ et $\dot{w}(s, t)$, écrivons $w(s, t) = w_1(s, t) - \rho^2[\rho^2 \varphi(s) + \psi(s)]\, w_2(s, t)$, où $w_1(s, t)$ et $w_2(s, t)$ satisfont aux équations

$$\varepsilon \ddot{w}_1 + \dot{w}_1 + \rho^2 w_1 = \mathrm{H}_1(s, t) \equiv -\rho^4 \varphi(s)\, e^{-\varrho^2 t} \tag{14}$$

et

$$\varepsilon \ddot{w}_2 + \dot{w}_2 + \rho^2 w_2 = 1 - e^{-t/\varepsilon} \tag{15}$$

et vérifient les conditions initiales $w_1(s,0) = \dot w_1(s,0) = w_2(s,0) = \dot w_2(s,0) = 0$. Multiplions (14) par $2\dot w_1$ et intégrons dans l'intervalle $\langle 0, t\rangle$. Nous obtenons

$$\varepsilon \dot w_1^2(s,t) + 2\int_0^t \dot w_1^2(s,\tau)\,d\tau + \rho^2 w_1^2(s,t) = 2\int_0^t \dot w_1(s,\tau)\,H_1(s,\tau)\,d\tau \le$$

$$\le 2\left\{\int_0^t \dot w_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2}\left\{\int_0^t H_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2}.$$

Il s'ensuit, au premier lieu, que $\int_0^t \dot w_1^2(s,\tau)\,d\tau \le \left\{\int_0^t \dot w_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_0^t H_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2}$ de sorte que $\left\{\int_0^t \dot w_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \le \left\{\int_0^t H_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2}$ et, au deuxième lieu, $\rho^2 w_1^2(s,t) \le 2\int_0^t H_1^2(s,\tau)\,d\tau$, de sorte que

$$|w_1(s,t)| \le \frac{\sqrt{2}}{\rho}\left\{\int_0^t H_1^2(s,\tau)\,d\tau\right\}^{1/2} \le \frac{\sqrt{2}}{\rho}\,|\varphi(s)|.$$

Quant à $w_2(s,t)$, on a $\ddot w_2(s,0) = 0$, $\dddot w_2(s,0) > 0$, d'où il résulte que $w_2(s,t)$ est positif dans un certain voisinage de zéro. Nous voulons démontrer $w_2(s,t) > 0$ pour tout $t > 0$. Multiplions (15) par $2\dot w_2$ et intégrons de la manière suivante:

$$\varepsilon \dot w_2^2(s,t) + 2\int_0^t \dot w_2^2(s,\tau)\,d\tau + \rho^2 w_2^2(s,t) = 2\,[1 - e^{-t/\varepsilon}]\,w_2(s,t) - \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\tau/\varepsilon}\,w_2(s,\tau)\,d\tau.$$

Si l'on suppose que t_1 est le premier zéro positif de $w_2(s,t)$, alors le second membre de l'équation précédente est négatif tandis que le premier membre résulte positif pour $t = t_1$. En conséquence, $w_2(s,t) > 0$ pour $t > 0$ et de l'équation précédente il suit l'inégalité $\rho^2 w_2^2(s,t) \le 2\,[1 - e^{-t/\varepsilon}]\,w_2(s,t)$, de sorte que $w_2(s,t) \le \frac{2}{\rho^2}$. Comme $w(s,t) = w_1(s,t) - \rho^2[\rho^2\varphi(s) + \psi(s)]\,w_2(s,t)$, on voit que

$$|w(s,t)| \le 3\rho^2|\varphi(s)| + |\psi(s)|. \tag{16}$$

Quant à $\dot w(s,t)$, $\max_{0\le\tau\le t}|\dot w(s,\tau)|$ se trouve ou bien à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, t\rangle$ ou bien à son extrémité droite. Dans le premier cas, $\ddot w$ s'annule au point du maximum et de (12) il suit que $\max_{0\le\tau\le t}|\dot w(s,\tau)| \le \le \rho^2 \max_{0\le\tau\le t}|w(s,\tau)| + \max_{0\le\tau\le t}|H(s,\tau)| < 5\rho^4|\varphi(s)| + 3\rho^2|\psi(s)|$. Dans

l'autre cas, on a au point de maximum ou bien $\dot{w} > 0$, $\ddot{w} \geq 0$ ou bien $\dot{w} < 0$, $\ddot{w} \leq 0$ et la même inégalité subsiste. C'est pourquoi

$$|\dot{w}(s,t)| < 5\rho^4|\varphi(s)| + 3\rho^2|\psi(s)|. \tag{17}$$

Maintenant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont à support compact et $f(x) \in C^{(n+5)}(E_n)$, $g(x) \in C^{(n+3)}(E_n)$. Comme $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_n^{q_n}}\right] = (-i)^k s_1^{q_1}\cdots s_n^{q_n}\mathfrak{F}[f]$ $(k = q_1 + \cdots + q_n)$, on a $|s_1^{q_1}\cdots s_n^{q_n}|\cdot|\varphi(s)| \leq \text{const}$ pour $q_1 + \cdots + q_n = n+5$, de sorte que $\rho^{n+5}|\varphi(s)| \leq \text{const}$. L'inégalité $|\varphi(s)| \leq \text{const}$ étant évidente, on a $|\varphi(s)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+5}}$. On a de même $|\psi(s)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}}$. Par suite, de (16) et (17) on tire

$$|w(s,t)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}} \quad , \quad |\dot{w}(s,t)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+1}}.$$

On a de plus $\mathfrak{F}[z_{x_i}(x,t)] = -is_i w(s,t)$ et $|\mathfrak{F}[z_{x_i}(x,t)]| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+2}}$. Les intégrales $\int_{E_n}\frac{ds}{1+\rho^{n+i}}$ $(i \geq 1)$ sont convergentes. Donc les transformées de Fourier de $z(x,t)$, $z_t(x,t)$ et $z_{x_i}(x,t)$ sont absolument intégrables en E_n. En conséquence, la formule inverse est valable (voir [3], p. 192, Théoreme 60) de sorte que, p. ex., $z(x,t) = \int_{E_n} w(s,t)\,e^{i(x,s)}\,ds$ et $|z(x,t)| \leq \int_{E_n}\frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}}\,ds = \text{const}$.

Il nous reste de démontrer: 1° l'existence de la transformée $\mathfrak{F}[U(x,t)]$; 2° qu'il existe les transformées $\mathfrak{F}[\Delta U(x,t)]$ et $\mathfrak{F}[\Delta^2 U(x,t)]$ et sont égales $-\rho^2\mathfrak{F}[U(x,t)]$ et $\rho^4\mathfrak{F}[U(x,t)]$; 3° que $\mathfrak{F}[U(x,t)]$ peut être differentiée deux fois par rapport à t sous le signe d'intégration. Soit A un nombre positif arbitrairement grand et soit a une constante telle que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq a$, où $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Nons montrerons que, pour $t \in \langle 0, A\rangle$, pour tous les x et pour $i = 0, 1, \cdots, n+5$ on a

$$|D^i U(x,t)| \leq C\exp\left(-\frac{[|x|-a]^2}{4A}\right), \tag{18}$$

D^i étant une dérivée partielle quelconque d'ordre i par rapport à $x_1, \cdots, x_n$. Les deux premières propositions sont alors évidemment correctes. Aussi la troisième est vraie, car

$$\int_{E_n} U_t(x,t)\,e^{-i(x,s)}\,dx = \int_{E_n}\Delta U(x,t)\,e^{-i(x,s)}\,dx \ ,$$

$$\int_{E_n} U_{tt}(x,t)\,e^{-i(x,s)}\,dx = \int_{E_n}\Delta^2 U(x,t)\,e^{-i(x,s)}\,dx$$

et en vertu de (18), toutes les deux intégrales convergent uniformément

pour $t \in \langle 0, A \rangle$, de sorte que $\int\limits_{E_n} U(x, t)\, e^{-i(x,s)}\, dx$ peut être différentiée deux fois par rapport à t sous le signe d'intégration.

On a $U(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{E_n} e^{-r^2/4t} f(\xi)\, d\xi$ où $r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$. En introduisant des nouvelles variables $\beta_1, \cdots, \beta_n$ par la substitution $x_i = \xi_i + 2\sqrt{t}\,\beta_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, nous obtenons

$$U(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{E_n} e^{-\sigma^2} f(x_1 - 2\sqrt{t}\,\beta_1, \cdots, x_n - 2\sqrt{t}\,\beta_n)\, d\beta \tag{19}$$

où $\sigma^2 = \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$. La derivée $D^i U(x, t)$ peut être trouvée par différentiation sous le signe d'intégration:

$$D^i U(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{E_n} e^{-\sigma^2} D^i f(x_1 - 2\sqrt{t}\,\beta_1, \cdots, x_n - 2\sqrt{t}\,\beta_n)\, d\beta\,. \tag{20}$$

En effet, l'intégrale (19) est uniformément convergente parce que, $f(x)$ étant à support compact, on a $|D^i f| \leq M$ et $|e^{-\sigma^2} f(x_1 - 2\sqrt{t}\,\beta_1, \cdots, x_n - 2\sqrt{t}\,\beta_n)| \leq M e^{-\sigma^2}$. Pour cette raison il suit de (20)

$$|D^i U(x, t)| \leq \frac{M}{\pi^{n/2}} \int\limits_{K_n} e^{-\sigma^2}\, d\beta\,, \tag{21}$$

où K_n désigne la sphère $\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i - \frac{x_i}{2\sqrt{t}}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4t}$. Si $\beta \in K_n$, on a $\sigma^2 \geq \frac{1}{4t} \cdot [\,|x| - a]^2$. Donc

$$|D^i U(x, t)| \leq \frac{M V_n}{\pi^{n/2}} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^n \exp\left(-\frac{[\,|x| - a]^2}{4t}\right),$$

où V_n désigne le volume de la sphère $\sigma^2 \leq 1$. La fonction

$$\omega(t) = \frac{1}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{[\,|x| - a]^2}{4t}\right) \text{ est positive pour } t > 0$$

et elle va en croissant jusqu'au point $t = \frac{[\,|x| - a]^2}{2n}$, où elle prend son maximum. Par suite on a pour les x satisfaisant à l'inégalité $\frac{[\,|x| - a]^2}{2n} \geq A$ l'inégalité

$$|D^i U(x, t)| \leq M V_n \left(\frac{a^2}{4\pi}\right)^{n/2} \omega(A) = M V_n \left(\frac{a^2}{4\pi A}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{[\,|x| - a]^2}{4A}\right).$$

On voit que l'inégalité (18) est vraie pour $|x| \geq a + \sqrt{2nA}$ avec la constante $C = M V_n \left(\frac{a^2}{4\pi A}\right)^{n/2}$. Comme les $D^i U(x, t)$ sont limitées $\Big[$de (21) il suit $|D^i U(x, t)| \leq \frac{M}{\pi^{n/2}} \int\limits_{E_n} e^{-\sigma^2}\, d\beta\Big]$, (18) est vraie pour tout x. Nous observons encore que la constante C ne dépend que de a, A, M.

§ 3. LE CAS NON-HOMOGÈNE. – L'équation non-abrégée est représentée par (2), l'équation abrégée par (4). En ce qui concerne les conditions initiales nous pouvons nous limiter aux conditions homogènes, c'est-à-dire

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \mathrm{U}(x, 0) = 0.$$

Il est facile de comprendre que les formules (8) ne peuvent maintenant avoir la validité que pour t compris dans un intervalle fini. *C'est pourquoi nous supposons que le second membre* $\mathrm{F}(x, t)$ *est défini et dérivable par rapport à* t *dans le domaine* $\mathrm{E}_n \times \langle 0, \mathrm{T} \rangle$. *En outre, nous supposons que le second membre en question est à support compact, ce qui veut dire qu'il existe* $a > 0$ *tel que* $\mathrm{F}(x, t) = 0$ *pour* $|x| \geq a$ *et chaque* $t \in \langle 0, \mathrm{T} \rangle$ *et que* $\mathrm{F}(x, t)$ *et* $\mathrm{F}_t(x, t)$ *sont* $(n+3)$*-fois dérivables par rapport à* $x_1, \cdots, x_n$. *Dans ces conditions nous démontrerons que les formules* (8) *sont valables, cette fois-ci pour* $x \in \mathrm{E}_n$ *et* $t \in \langle 0, \mathrm{T} \rangle$ *avec* $k(x) = -\mathrm{U}_t(x, 0) = -\mathrm{F}(x, 0)$.

Démonstration. – Nous définissons de nouveau la fonction $z(x, t)$ par (9) et nous voulons montrer $z(x, t) = \mathrm{O}(1)$, $z_t(x, t) = \mathrm{O}(1)$, $z_{x_i}(x, t) = \mathrm{O}(1)$ pour $x \in \mathrm{E}_n$ et $t \in \langle 0, \mathrm{T} \rangle$.

Les équations (10) et (11) sont encore valables. Nous passons à la transformée de Fourier $w(s, t)$ de la fonction $z(x, t)$. Cela est possible parce que $u(x, t)$ et $k(x)$ sont encore des fonctions à support compact et (18) reste vrai (cette fois naturellement seulement pour $i = 0, 1, \cdots, n+3$). Cette dernière proposition peut être reconnue de la manière suivante: On a $\mathrm{U}(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau$, où $\varphi(x, t; \tau)$ représente la solution de (7) satisfaisant à la condition initiale $\varphi(x, 0; \tau) = \mathrm{F}(x, \tau)$. Comme $\mathrm{F}(x, t) = 0$ pour $|x| \geq a$ et pour un arbitraire $t \in \langle 0, \mathrm{T} \rangle$ et étant donné que la constante C en (18) ne dépend que de a, T, M, l'inégalité (18) est vraie aussi pour $\varphi(x, t; \tau)$ et, en conséquence, pour la solution actuelle $\mathrm{U}(x, t)$.

Désignons $\mathfrak{F}[\mathrm{F}(x, t)]$ par $\Phi(s, t)$. Puis $\mathfrak{F}[\mathrm{F}_t(x, t)] = \Phi_t(s, t)$. Maintenant $\mathfrak{F}[\mathrm{U}(x, t)] = e^{-\varrho^2 t} \int_0^t e^{\varrho^2 \tau} \Phi(s, \tau)\, d\tau$ et $\mathfrak{F}[\mathrm{U}_{tt}(x, t)] = \mathfrak{F}[\Delta^2 \mathrm{U}(x, t) + \Delta \mathrm{F}(x, t) + \mathrm{F}_t(x, t)] = \rho^4 \mathfrak{F}[\mathrm{U}(x, t)] - \rho^2 \Phi(s, t) + \Phi_t(s, t)$. Par suite $\mathfrak{F}[\mathrm{K}(x, t, \varepsilon)] \equiv \mathrm{H}(s, t) = -\rho^4 e^{-\varrho^2 t} \int_0^t e^{\varrho^2 \tau} \Phi(s, \tau)\, d\tau + \rho^2 \Phi(s, t) - \Phi_t(s, t) + \rho^2 \Phi(s, 0)[1 - e^{-t/\varepsilon}] = -\rho^4 e^{-\varrho^2 t} \left\{ \frac{1}{\rho^2} [e^{\varrho^2 \tau} \Phi(s, \tau)]_0^t - \frac{1}{\rho^2} \int_0^t e^{\varrho^2 \tau} \Phi_t(s, \tau)\, d\tau \right\} + \rho^2 \Phi(s, t) - \Phi_t(s, t) + \rho^2 \Phi(s, 0)[1 - e^{-t/\varepsilon}]$ de sorte que $\mathrm{H}(s, t) = \rho^2 e^{-\varrho^2 t} \int_0^t e^{\varrho^2 \tau} \Phi_t(s, \tau)\, d\tau + \rho^2 e^{\varrho^2 t} \Phi(s, 0) - \Phi_t(s, t) + \rho^2 \Phi(s, 0)[1 - e^{-t/\varepsilon}]$.

Les équations (12) et (13) sont valables. On a $w(s,t) = w_3(s,t) - \rho^2 \Phi(s,0) w_2(s,t)$, où $w_3(s,t)$ vérifie l'équation

$$\varepsilon \ddot{w}_3 + \dot{w}_3 + \rho^2 w_3 = \mathrm{H}_1(s,t) \equiv \rho^2 e^{-\varrho^2 t} \int_0^t e^{\varrho^2 \tau} \Phi_t(s,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \rho^2 e^{-\varrho^2 t} \Phi(s,0) - \Phi_t(s,t),$$

ainsi que les conditions initiales $w_3(s,0) = \dot{w}_3(s,0) = 0$; la fonction $w_2(s,t)$ a le sens précédent de sorte que $0 \leq w_2(s,t) \leq \frac{2}{\rho^2}$. En outre, la même inégalité, qui subsiste pour $w_1(s,t)$, est vraie pour $w_3(s,t)$, savoir

$$|w_3(s,t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\rho} \left\{ \int_0^t \mathrm{H}_1^2(s,\tau)\, d\tau \right\}^{1/2}.$$

Maintenant

$$\int_0^t \mathrm{H}_1^2(s,\tau)\, d\tau \leq 3\rho^4 \int_0^t e^{-2\varrho^2 \tau} \left(\int_0^\tau e^{\varrho^2 \alpha} \Phi_t(s,\alpha)\, d\alpha \right)^2 d\tau +$$

$$+ \frac{3\rho^2}{2} \Phi^2(s,0) + 3 \int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau = 3\rho^4 \left\{ \left[-\frac{1}{2\rho^2}\, e^{-2\varrho^2 \tau} \left(\int_0^\tau e^{\varrho^2 \alpha} \Phi_t(s,\alpha)\, d\alpha \right)^2 \right]_0^t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t e^{-2\varrho^2 \tau} \left(\int_0^\tau e^{\varrho^2 \alpha} \Phi_t(s,\alpha)\, d\alpha \right) e^{\varrho^2 \tau} \Phi(s,\tau)\, d\tau \right\} + \frac{3}{2} \rho^2 \Phi^2(s,0) +$$

$$+ 3 \int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau \leq 3\rho^2 \int_0^t \Phi_t(s,\tau) \int_0^\tau \Phi_t(s,\alpha)\, d\alpha\, d\tau + \frac{3}{2} \rho^2 \Phi^2(s,0) +$$

$$+ 3 \int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau \leq 3\rho^2 \left(\int_0^t |\Phi_t(s,\tau)|\, d\tau \right)^2 + \frac{3}{2} \rho^2 \Phi^2(s,0) + 3 \int_0 \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau,$$

de sorte que

$$|w_3(s,t)| \leq 3 \int_0^t |\Phi_t(s,\tau)\, d\tau + 2\, |\Phi(s,0)| + \frac{3}{\rho} \left[\int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau \right]^{1/2}$$

et

$$(22) \quad |w(s,t)| \leq 4\, |\Phi(s,0)| + 3 \int_0^t |\Phi_t(s,\tau)|\, d\tau + \frac{3}{\rho} \left[\int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\, d\tau \right]^{1/2}.$$

En ce qui concerne la fonction $\dot{w}(s,t)$, on a encore

$$|\dot{w}(s,t)| \leq \max_{0 \leq \tau \leq t} |\mathrm{H}(s,\tau)| + \rho^2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |w(s,\tau)|,$$

de sorte que

$$(23)\quad |\dot{w}(s,t)| \leq 6\rho^2 |\Phi(s,0)| + 4\rho^2 \int_0^t |\Phi_t(s,\tau)|\,d\tau + 3\rho \left[\int_0^t \Phi_t^2(s,\tau)\,d\tau\right]^{1/2}.$$

Etant donné que le seconde membre $F(x,t)$ est à support compact et que $F(x,t), F_t(x,t) \in C^{(n+3)}(E_n)$, il suit $|\Phi(s,t)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}}$, $|\Phi_t(s,t)| \leq \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}}$. De (22) et (23) il s'ensuit $|w(s,t)| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+3}}$, $|\dot{w}(s,t)| \leq \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+1}}$ et $|\mathfrak{F}[z_{x_i}(x,t)]| \leq \frac{\text{const}}{1+\rho^{n+2}}$. Par conséquent, les transformées $\mathfrak{F}[z(x,t)]$, $\mathfrak{F}[z_t(x,t)]$ et $\mathfrak{F}[z_{x_i}(x,t)]$ sont absolument intégrables, ce qui signifie $z(x,t) = O(1)$, $z_t(x,t) = O(1)$, $z_{x_i}(x,t) = O(1)$.

Bibliographie.

[1] M. Zlámal, *Smešannaya zadača dlya giperboličeskih uravnenii s malym parametrom*, «Czechoslovak Math. Journ.», *10* (85), (1960).

[2] M. I. Višik, L. A. Lyusternik, *Regulyarnoe vyroždenie i pograničnyi sloi*, «Uspehi Mat. Nauk», XII, 3–122 (1957).

[3] S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig 1932.

Geometria. — *Spazi a connessione affine equivalenti al piano.* Nota di ADOLF HAIMOVICI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Il problema dell'equivalenza fra uno spazio bidimensionale a connessione affine ed il piano affine si traduce nel sistema di equazioni a derivate parziali $R^j_{ihk} = T^j_{hk} = 0$ $(i, j, h, k = 1, 2)$, cioè, in forma più esplicita:

$$\frac{\partial \Gamma^j_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial x^h} + \Gamma^j_{ah}\Gamma^a_{ik} - \Gamma^j_{ak}\Gamma^a_{ih} = 0 \quad , \quad \Gamma^i_{12} = \Gamma^i_{21} \tag{1}$$

$$(i, j, h, k, a = 1, 2).$$

Ci proponiamo di assegnare teoremi di esistenza per questo sistema, in un rettangolo o nel piano intero, ammettendo convenienti ipotesi sulle funzioni Γ^k_{ij}.

Casi particolari di questo problema sono stati precedentemente studiati da G. Vrănceanu [4–6], P. Mocanu [2] (Γ^k_{ij} costanti), T. Postelnicu [3] (Γ^k_{ij} lineari).

1. Sia Σ lo spazio delle quaterne Γ di funzioni $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}, \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}$, di classe C^1 nel rettangolo

$$\alpha \leq x^1 \leq \beta \quad , \quad \alpha' \leq x^2 \leq \beta' , \tag{Δ}$$

ed ivi soddisfacenti alle condizioni

$$|\Gamma^j_{ii} - \varphi^j_{ii}| \leq M^j_{ii} \qquad \text{(non sommare)}, \tag{2}$$

dove le $\varphi^j_{11}(x^1)$, $\varphi^j_{22}(x^2)$ sono funzioni date risp. di x^1, x^2, definite risp. su $\alpha \leq x^1 \leq \beta$, $\alpha' \leq x^2 \leq \beta'$, e le M^j_{ii} sono delle costanti. Se le Γ (Γ^j_{ii}), Γ' (Γ'^j_{ii}) sono due siffatte quaterne di funzioni, definiamo la metrica di Σ assumendo

$$\delta(\Gamma, \Gamma') = \sup_{(x^1, x^2) \in \Delta} \left\{ |\Gamma^j_{ii} - \Gamma'^j_{ii}| \, e^{-k(|x^1 - x^1_0| + |x^2 - x^2_0|)} \right\}, \qquad (x^1_0, x^2_0) \in \Delta, \tag{3}$$

k essendo una costante che sarà determinata in seguito.

Consideriamo in detto spazio l'operatore T tale che

$$\bar{\Gamma} = T(\Gamma), \tag{4}$$

definito dalle relazioni:

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}^1_{11} = \varphi^1_{11}(x^1) + \displaystyle\int_{x^2_0}^{x^2} (a_1 + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22})\, dx^2 \\ \bar{\Gamma}^2_{11} = \varphi^2_{11}(x^1) + \displaystyle\int_{x^2_0}^{x^2} (a_2 + b\Gamma^1_{11} - c\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22})\, dx^2 \end{cases} \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 12 novembre 1959.

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Gamma}^1_{22} &= \varphi^1_{22}(x^2) + \int_{x^1_0}^{x^1} (a_3 + c\Gamma^2_{22} - b\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22}\,\Gamma^1_{11})\,dx^1 \\ \overline{\Gamma}^2_{22} &= \varphi^2_{22}(x^2) + \int_{x^1_0}^{x^1} (a_4 + \Gamma^2_{11}\,\Gamma^1_{22})\,dx^1, \end{aligned} \right.$$

dove abbiamo posto:

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} & b = \Gamma^2_{12} \quad , \quad c = \Gamma^1_{12} \\ & a_1 = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^1} - \Gamma^1_{12}\,\Gamma^2_{12} \quad , \quad a_2 = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2} - (\Gamma^2_{12})^2 \\ & a_3 = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x^1} - (\Gamma^1_{12})^2 \quad , \quad a_4 = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2} - \Gamma^1_{12}\,\Gamma^2_{12} \end{aligned} \right.$$

e supponiamo che le Γ^i_{12} siano funzioni di classe C^1 in Δ. È allora evidente che il sistema (1), con le condizioni

$$(7)\qquad \Gamma^i_{11}(x^1, x^2_0) = \varphi^i_{11}(x^1) \quad , \quad \Gamma^i_{22}(x^1_0, x^2) = \varphi^i_{22}(x^2),$$

equivale all'equazione

$$(8)\qquad \Gamma = T(\Gamma).$$

Supponiamo per fissare le idee

$$x^1 \geq x^1_0 \quad , \quad x^2 \geq x^2_0,$$

ed inoltre:

$$|\varphi^j_{ii}| \leq C^j_{ii} \quad , \quad \int_{x^1_0}^{x^1} |\varphi^i_{11}(x^1)|\,dx^1 \leq \overline{C}^i_{11} \quad , \quad \int_{x^2_0}^{x^2} |\varphi^i_{22}(x^2)|\,dx^2 \leq \overline{C}^i_{22}$$

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_{x^2_0}^{x^2} |b|\,dx^1 \leq A_1 \quad , \quad \int_{x^1_0}^{x^1} |c|\,dx^2 \leq A_4 \quad , \quad \int_{x^2_0}^{x^2} |c - \varphi^2_{22}|\,dx^2 \leq A_2 \\ & \int_{x^1_0}^{x^1} |b - \varphi^1_{11}|\,dx^1 \leq A_3 \quad , \quad \left| \int_{x^2_0}^{x^2} (a_1 + \varphi^2_{11}\,\varphi^1_{22})\,dx^2 \right| \leq B_1 \\ & \left| \int_{x^1_0}^{x^1} (a_4 + \varphi^2_{11}\,\varphi^1_{22})\,dx^1 \right| \leq B_4 \quad , \quad \left| \int_{x^2_0}^{x^2} (a_2 + b\varphi^1_{11} - c\varphi^2_{11} + \varphi^2_{11}\,\varphi^2_{22})\,dx^2 \right| \leq B_2 \\ & \left| \int_{x^1_0}^{x^1} (a_3 + c\varphi^2_{22} - b\varphi^1_{22} + \varphi^1_{11}\,\varphi^1_{22})\,dx^1 \right| \leq B_3 \end{aligned} \right.$$

(i casi $x^1 \leq x_0^1$, $x^2 \geq x_0^2, \cdots$ si trattano in modo analogo). Le condizioni affinché T traformi lo spazio Σ in se stesso conducono quindi alle relazioni:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & B_1 + C_{11}^2 M_{22}^1 (\beta' - \alpha') + \bar{C}_{22}^1 M_{11}^2 + M_{11}^2 M_{22}^1 (\beta' - \alpha') \leq M_{11}^1 \\ & B_4 + C_{22}^1 M_{11}^2 (\beta - \alpha) + \bar{C}_{11}^2 M_{22}^1 + M_{11}^2 M_{22}^1 (\beta - \alpha) \leq M_{22}^2 \\ & B_2 + A_1 M_{11}^1 + A_2 M_{11}^2 + (C_{11}^2 + M_{11}^2) M_{22}^2 (\beta' - \alpha') \leq M_{11}^2 \\ & B_3 + A_3 M_{22}^1 + A_4 M_{22}^2 + (C_{22}^1 + M_{22}^1) M_{11}^1 (\beta - \alpha) \leq M_{22}^1 ; \end{aligned} \right.$$

e si noti che, se $\beta - \alpha$, $\beta' - \alpha'$ sono dati, le disuguaglianze (10) possono essere soddisfatte ove si impongano certe condizioni restrittive alle costanti A_i, B_i, C_{ii}^j, M_{ii}^j. Utilizzando poi la metrica (3), si può determinare convenientemente la costante k, in modo che l'operatore T abbia i voluti requisiti.

Risulta così stabilito il

TEOREMA. – *Date le funzioni* Γ_{12}^i, φ_{11}^i, φ_{22}^i, *rispettivamente delle classi* $C^1(\Delta)$, $C^1[\alpha, \beta]$, $C^1[\alpha', \beta']$ *e soddisfacenti alle* (9), *il sistema* (1) *ammette un integrale* Γ (Γ_{ii}^j) *nell'insieme di funzioni* $C^1(\Delta)$ *soddisfacenti alle* (2) *e* (7).

2. Per ottenere risultati sull'esistenza di un integrale nel piano intero, basterà supporre che le relazioni (10) valgano indipendentemente dai valori di $\beta - \alpha$ e $\beta' - \alpha'$. Questo avviene sotto diverse ipotesi sulle costanti $A_1, \cdots, M_{ii}^j$.

Un caso interessante è quello in cui

$$M_{22}^1 = M_{22}^2 = C_{22}^1 = B_3 = B_4 = 0 ,$$

$$M_{11}^1 \geq B_i ,$$

$$B_2 + A_1 M_{11}^1 + A_2 M_{11}^2 \leq M_{11}^2 ;$$

l'ultima disuguaglianza conduce alle

$$A_2 \leq 1 ,$$

$$M_{11}^2 = \frac{B_2}{1 - A_2} \rho \quad , \quad B_1 \leq M_{11}^1 \leq \frac{B_2 (\rho - 1)}{A_1} , \qquad \rho \geq 1 ,$$

onde, tenendo presenti le (9), si ricava:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Gamma_{22}^1 = \varphi_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 - \varphi_{22}^2 = 0 , \\ & \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^1} - (\Gamma_{12}^1)^2 + \varphi_{22}^2 \Gamma_{12}^1 = 0 . \end{aligned} \right.$$

Le ultime equazioni dànno:

$$(11') \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{P(x^1) + \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \exp \left\{ - \int\limits_{x_0^2}^{\xi} \varphi_{22}^2 (\eta) \, d\eta \right\} d\xi} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = Q(x^1) \exp \left\{ \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \Gamma_{12}^1 \, dx_2 \right\} ,$$

$P(x^1)$, $Q(x^2)$ essendo scelte in modo che Γ_{12}^1, Γ_{12}^2 soddisfino alle (9).

3. Sotto opportune ipotesi sulle φ^j_{ii}, Γ^j_{ik}, si può anche studiare il comportamento asintotico delle Γ^j_{ii}. A tal uopo, consideriamo la funzione $r(t)$, positiva e definita sulla retta, soddisfacente alla condizione

$$0 \leq \left| \int_p^t \frac{dt}{r(t)} \right| \leq a \leq +\infty ; \tag{12}$$

e poniamo:

$$\left\{ \begin{aligned} & r(x^1)(\Gamma^i_{11} - \varphi^i_{11}) = G^i_{11} \quad , \quad r(x^2)(\Gamma^i_{22} - \varphi^i_{22}) = G^i_{22} \\ & r(x^1)(\overline{\Gamma}^i_{11} - \varphi^i_{11}) = G^i_{11} \quad , \quad r(x^2)(\overline{\Gamma}^i_{22} - \varphi^i_{22}) = \overline{G}^i_{22} . \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Le (5) possono allora mettersi sotto la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{G}^1_{11} = & \int_{x^2_0}^{x^2} (a_1 + \varphi^2_{11}\varphi^1_{22})\, r(x^1)\, dx^2 + \int_{x^2_0}^{x^2} G^2_{11}\, \varphi^1_{22}(x^2)\, dx^2 + \\ & + \varphi^2_{11}(x^1)\, r(x^1) \int_{x^2_0}^{x^2} G^1_{22} \frac{dx^2}{r(x^2)} + \int_{x^2_0}^{x^2} G^2_{11}\, G^1_{22} \frac{dx^2}{r(x^2)} , \\ \overline{G}^2_{22} = & \int_{x^1_0}^{x^1} (a_4 + \varphi^2_{11}\varphi^1_{21})\, r(x^2)\, dx^1 + \varphi^1_{22}(x^2)\, r(x^2) \int_{x^1_0}^{x^1} G^2_{11} \frac{dx^1}{r(x^1)} + \\ & + \int_{x^1_0}^{x^1} G^1_{22}\, \varphi^2_{11}(x^1)\, dx^1 + \int_{x^1_0}^{x^1} G^2_{11}\, G^1_{22} \frac{dx^1}{r(x^1)} , \\ \overline{G}^2_{11} = & \int_{x^2_0}^{x^2} (a_2 + b\varphi^1_{11} - c\varphi^2_{11} + \varphi^2_{11}\varphi^2_{22})\, r(x^1)\, dx^2 + \int_{x^2_0}^{x^2} G^1_{11}\, b\, dx^2 - \\ & - \int_{x^2_0}^{x^2} G^2_{11}(c - \varphi^2_{22})\, dx^2 + \varphi^2_{11}(x^1)\, r(x^1) \int_{x^2_0}^{x^2} G^2_{22} \frac{dx^2}{r(x^2)} + \int_{x^2_0}^{x^2} G^2_{11}\, G^2_{22} \frac{dx^2}{r(x^2)} , \\ \overline{G}^1_{22} = & \int_{x^1_0}^{x^1} (a_3 + c\varphi^1_{11} - b\varphi^1_{22} + \varphi^1_{22}\varphi^1_{11})\, r(x^2)\, dx^2 + \int_{x^1_0}^{x_1} G^2_{22}\, c\, dx^2 - \\ & - \int_{x^1_0}^{x^1} G^1_{22}(b - \varphi^1_{11})\, dx^1 + \varphi^1_{22}(x^2)\, r(x^2) \int_{x^1_0}^{x^1} G^1_{11} \frac{dx^1}{r(x^1)} + \int_{x^1_0}^{x^1} G^1_{22}\, G^1_{11} \frac{dx^1}{r(x^1)} . \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Ammettiamo poi le ipotesi, analoghe alle (9),

$$|\varphi^j_{ii}\, r| \leq D^j_{ii} \quad , \quad \int_{x^i_0}^{x^i} |\varphi^j_{ii}|\, dx^i \leq \bar{C}^j_{11} , \qquad \text{(non sommare)}$$

$$(9')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x^2_0}^{x^2} |b|\, dx^2 \leq A'_1 \quad , \quad \int_{x^1_0}^{x^1} |c|\, dx^1 \leq A'_4 \quad , \quad \int_{x^2_0}^{x^2} |c - \varphi^2_{22}|\, dx^2 \leq A'_2 , \\ \displaystyle\int_{x^1_0}^{x^1} |b - \varphi^1_{11}|\, dx^1 \leq A'_3 \quad , \quad \left| \int_{x^2_0}^{x^2} (a_1 + \varphi^2_{11}\, \varphi^1_{22})\, r(x^1)\, dx^2 \right| \leq E_1 , \\ \displaystyle\left| \int_{x^1_0}^{x^1} (a_4 + \varphi^2_{11}\, \varphi^1_{22})\, r(x^1)\, dx^2 \right| \leq E_4 , \\ \displaystyle\left| \int_{x^2_0}^{x^2} (a_2 + b\varphi^1_{11} - c\varphi^2_{11} + \varphi^2_{11}\, \varphi^2_{22})\, r(x^1)\, dx^2 \right| \leq E_2 \quad , \quad \left| \int_{x^1_0}^{x^1} (a_3 - b\varphi^1_{22} + \right. \\ \displaystyle\qquad \left. + c\varphi^2_{22} + \varphi^1_{11}\, \varphi^1_{22})\, r(x^2)\, dx^1 \right| \leq E_4 , \end{cases}$$

e cerchiamo una soluzione delle (1) che soddisfi le (7) e le

$$(2')\qquad |\Gamma^j_{ii} - \varphi^j_{ii}|\, r(x^i) \leq p^j_{ii} \qquad \text{(non sommare)},$$

ove le p^j_{ii} denotano costanti. Le (10) ora divengono

$$(10')\quad \begin{cases} E_1 + p^2_{11}\, \bar{C}^1_{22} + p^1_{22}\, D^2_{11}\, a + p^2_{11}\, p^1_{22}\, a \leq p^1_{11} \\ E_4 + p^2_{11}\, D^1_{22}\, a + p^1_{22}\, \bar{C}^2_{11} + p^2_{11}\, p^1_{22}\, a \leq p^2_{22} \\ E_2 + p^1_{11}\, A'_1 + p^2_{11}\, A'_2 + p^2_{22}\, D^2_{11}\, a + p^2_{11}\, p^1_{22}\, a \leq p^2_{11} \\ E_3 + p^2_{22}\, A'_4 + p^1_{22}\, A'_3 + p^1_{11}\, D^1_{22}\, a + p^1_{22}\, p^1_{11}\, a \leq p^1_{22} , \end{cases}$$

e non dipendono quindi più dagli intervalli (α , β) , (α' , β').

Risulta così il

TEOREMA. – *Se le* Γ^i_{12} , φ^j_{ii} *soddisfano in tutto il piano alle* (9′), *dove* a_i , b, c *sono definite dalle* (6) *ed* $r(t)$ *è una funzione positiva, definita sulla retta, che soddisfa alla* (12), *allora – in ogni dominio limitato del piano* x^1 , x^2 – *il sistema* (1) *ammette un'unica soluzione* (Γ^j_{ii}) *nella classe di funzioni definite dalle* (7) *e* (2′), *le* p^j_{ii} *essendo costanti soddisfacenti alle* (10′).

Si possono scegliere la $r(t)$ e le costanti A_i in modo che le funzioni Γ^i_{12} , che soddisfano le ipotesi di questo teorema e le Γ^j_{ii} , verifichino altresì

le ulteriori, condizioni, stabilite in [1], occorrenti affinché la superficie a connessione affine, che li ammette quali coefficienti di connessione, risulti equivalente al piano affine.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. HAIMOVICI, *Sopra alcuni spazi a connessione affine globalmente equivalenti allo spazio affine*, « Rend. Acad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXVI, p. 363 (1959).

[2] P. MOCANU, *Espaces à connexion affine constante équivalents en grand avec l'espace euclidien*, « Comunicările Acad. R. P. R. », t. 2, p. 389 (1952).

[3] T. POSTELNICU, *Studiul spaţiilor* A_2 *cu conexiune afină liniară local euclidiene*, « Acad. R. P. R., Studii și Cercetări Matematice », t. VIII, p. 379 (1957).

[4] G. VRĂNCEANU, *Espaces à connexion affine constante localement euclidiens*, « Comunicările Acad. R. P. R. », t. 1, p. 29 (1951).

[5] G. VRĂNCEANU, *Sur les espaces à connexion affine localement euclidiens*, « Publicationes Mathematicae », t. 4, p. 359 (1956).

[6] G. VRĂNCEANU, *Les transformations crémoniennes entières et les espaces à connexion affine*, « C. R. Paris », t. 243, p. 1997 (1956).

Geometria. — *Su certe ipersuperficie, analoghe alle Jacobiane, legate ad una corrispondenza cremoniana.* Nota di CARMELO MAMMANA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Siano:

$$(T) \qquad x'_i = f_i(x_0, x_1 \cdots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r),$$

$$(T^{-1}) \qquad x_i = g_i(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r),$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T, fra due spazi S_r ed S'_r, e della sua inversa T^{-1}. Se consideriamo i prodotti TT^{-1} e $T^{-1}T$ otteniamo due forme, $K(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ ed $H(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)$, definite dalle identità:

$$g_i(f_0, f_1, \cdots, f_r) \equiv K(x_0, x_1, \cdots, x_r)\, x_i,$$

$$f_i(g_0, g_1, \cdots, g_r) \equiv H(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)\, x'_i.$$

Le ipersuperficie $K(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0$ ed $H(x'_0 x'_1, \cdots, x'_r) = 0$ hanno molte proprietà a comune con le ipersuperficie jacobiane $J(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0$ e $J'(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r) = 0$ della T e della T^{-1}, ma coincidono con esse soltanto in casi molto particolari (nn. 3, 9).

Nel n. 1 di questa Nota dimotriamo anzitutto alcune identità fra le forme $K(x)$, $J(x')$, $H(x')$, $J'(x')$ e le loro trasformate mediante le equazioni della T e della T^{-1}.

Nel n. 2 proviamo che le forme $K(x)$, $J(x)$, $H(f)$, $J'(f)$ hanno le stesse componenti irriducibili, e che ciò vale anche per le forme $H(x')$, $J'(x')$, $K(g)$, $J(g)$. Nel n. 4 dimostriamo che le otto forme suddette hanno lo stesso numero di componenti irriducibili distinte.

Detti μ_j $(j = 1, 2, \cdots, t)$ i gradi delle componenti irriducibili distinte di $K(x)$, ν_j e τ_j gli esponenti con cui le dette componenti compaiono in $K(x)$, e in $J(x)$, e indicati con μ'_j, ν'_j, τ'_j gli analoghi interi relativi ad $H(x')$ e $J'(x')$ dimostriamo (n. 5) che il M.C.D. dei numeri μ_j è uguale al M.C.D. dei numeri μ'_j e il M.C.D. dei numeri ν_j è uguale al M.C.D. dei numeri ν'_j, mentre il M.C.D. dei numeri τ_j può non essere uguale a quello dei numeri τ'_j (n. 8).

Infine (n. 9) proviamo che se l'ipersuperficie $K(x) = 0$ coincide con l'ipersuperficie jacobiana $J(x) = 0$ di T, allora l'ipersuperficie jacobiana $J'(x) = 0$ della T^{-1} coincide con l'ipersuperficie $H(x') = 0$ contata $r - m + 1 = \frac{r}{n} = \frac{m-1}{n-1}$ volte, essendo n ed m gli ordini di T e T^{-1}.

Tutte le suddette proprietà vengono dedotte, con ragionamenti algebrici molto semplici, dalle quattro identità (3_1), (3_2), (4_1), (4_2) stabilite nel n. 1. Da queste identità vengono anche dedotte (nn. 5, 6) alcune relazioni

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

fra gli interi μ_j, ν_j, τ_j, μ'_j, ν'_j, τ'_j, nelle quali compaiono due matrici quadrate P e Q, ad elementi interi non negativi, ed aventi come determinante, rispettivamente $\pm n$ e $\pm m$.

Le due proprietà che $J(x)$ e $J'(x')$ hanno lo stesso numero di componenti, e che il M.C.D. dei numeri μ_j è uguale al M.C.D. dei numeri μ'_j erano note [1] (O. H. Keller, 1939; B. Segre, 1957), ma qui vengono ritrovate per via diversa.

1. – Indichiamo con:

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, \cdots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r) \tag{1$_1$}$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T, di ordine n, fra due spazi ad r dimensioni S_r ed S'_r; le f_i sono quindi forme di grado n in $x_0, x_1, \cdots, x_r$ prive di fattori comuni. Analogamente indichiamo con:

$$x_i = g_i(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r) \tag{1$_2$}$$

le equazioni della corrispondenza cremoniana inversa T^{-1}, di ordine m. Segue subito:

$$f_i(g_0, g_1, \cdots, g_r) \equiv H(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)\, x'_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{2$_1$}$$

$$g_i(f_0, f_1, \cdots, f_r) \equiv K(x_0, x_1, \cdots, x_r)\, x_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{2$_2$}$$

essendo $H(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)$ e $K(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ forme di grado $nm - 1$.

Da queste identità, tenuto conto delle (1$_1$) e (1$_2$), si traggono le seguenti:

$$H(f_0, f_1, \cdots, f_r) \equiv K^n(x_0, x_1, \cdots, x_r), \tag{3$_1$}$$

$$K(g_0, g_1, \cdots, g_r) \equiv H^m(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r). \tag{3$_2$}$$

Consideriamo ora le due forme jacobiane:

$$J(x_0, x_1, \cdots, x_r) = \frac{\partial(f_0, f_1, \cdots, f_r)}{\partial(x_0, x_1, \cdots, x_r)},$$

$$J'(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r) = \frac{\partial(g_0, g_1, \cdots, g_r)}{\partial(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)}.$$

Si verifica subito che è:

$$J(g_0, g_1, \cdots, g_r)\, J'(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r) \equiv nm\, H^{r+1}(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r), \tag{4$_1$}$$

$$J'(f_0, f_1, \cdots, f_r)\, J(x_0, x_1, \cdots, x_r) \equiv nm\, K^{r+1}(x_0, x_1, \cdots, x_r); \tag{4$_2$}$$

(1) O. H. KELLER, *Ganze Cremona Transformationen*, «Monatsh. f. Math. u. Phs.», 47, 299–306 (1939). Il risultato di O. H. Keller è stato esteso alle corrispondenze birazionali fra varietà, da B. Segre il quale ha dimostrato proprietà molto più generali e che mettono in luce l'aspetto topologico della questione e i legami con la teoria della base. Vedi: B. SEGRE, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*, «Annali di Matematica», ser. IV, tomo XLIII, 1–23 (1957).

all'uopo, basta eseguire il prodotto dei determinanti e tener presenti le (2_1) e (2_2).

2. – Dimostriamo ora che le forme $J(x) = J(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ e $K(x) = K(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ hanno lo stesso numero di componenti irriducibili.

Infatti, per la (4_2), ogni componente irriducibile di $J(x)$ è una componente irriducibile di $K(x)$. Viceversa, sia $K_1(x)$ una componente irriducibile di $K(x)$, e sia $(\bar{x})$ un generico punto dell'ipersuperficie $K_1(x) = 0$. Le $f_i(\bar{x}_i)$ non sono tutte nulle, perché le forme $f_i(x)$ non hanno fattori a comune; inoltre, per le (2_2) si ha $g_i(f(\bar{x})) = 0$ per $i = 0, 1, \cdots, r$. Ciò vuol dire che a un generico punto $(\bar{x})$ dell'ipersuperficie $K_1(x) = 0$ corrisponde un punto della varietà base del sistema lineare $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i g_i = 0$; ne segue che $(\bar{x})$ sta sulla jacobiana $J(x) = 0$, e quindi la forma $J(x)$ è divisibile per $K_1(x)$.

Analogamente si dimostra che le forme $J'(x') = J'(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)$ e $H(x') = H(x'_0, x'_1, \cdots, x'_r)$ hanno le stesse componenti irriducibili.

Notiamo ancora che dalle (3_1) e (3_2) segue che le forme $K(x)$ e $H(f) = H(f_0, f_1, \cdots, f_r)$ hanno le stesse componenti irriducibili, e così pure le forme $H(x')$ e $K(g)$.

Infine, dalle:

$$\sum_{j=0}^{r} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x=g} g_j = n f_i(g) = n H x'_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, r)$$

applicando la regola di Cramer segue:

$$J(g) g_j = n H \sum_{i=0}^{r} J_{ij}(g) x'_i ,$$

dove J_{ij} denota il complemento algebrico dell'elemento di indici ij in J; da qui, essendo le g_j prime fra loro, si deduce che $J(g)$ è divisibile per $H(x')$. Da ciò e dalla (4_1) segue, in particolare, che $J(g)$ e $H(x')$ hanno gli stessi fattori irriducibili.

Analogamente si prova che $J'(f)$ è divisibile per $K(x)$ ed ha gli stessi fattori irriducibili di $K(x)$.

Abbiamo così dimostrato che:

Le quattro forme $K(x)$, $J(x)$, $H(f)$, $J'(f)$ *hanno le stesse componenti irriducibili, e lo stesso può dirsi delle quattro forme* $H(x')$, $J'(x')$, $K(g)$, $J(g)$. *La forma* $J'(f)$ *è divisibile per* $K(x)$ *e la forma* $J(g)$ *è divisibile per* $H(x')$.

3. – Se le ipersuperficie $K(x) = 0$ e $H(x') = 0$ coincidono rispettivamente con le $J(x) = 0$ e $J'(x') = 0$, allora – uguagliando gli ordini – si ha $nm - 1 = (r + 1)(n - 1)$ e $nm - 1 = (r + 1)(m - 1)$, eppertanto:

$$n = m = r .$$

Per $r=2$, cioè nel piano, le condizioni $n=m=r$ caratterizzano le corrispondenze cremoniane per le quali accade che $K(x)=0$ coincide con $J(x)=0$ e $H'(x')=0$ coincide con $J'(x')=0$; il che si verifica subito scrivendo le equazioni di ciascuno dei tre tipi di corrispondenze quadratiche piane, e calcolando per esse i polinomi K, J, H', J'.

Invece per $r \geq 3$ ciò non è più vero, come dimostra il seguente esempio:

$$(\mathrm{T}) \begin{cases} x'_i = x_i x_r^{r-2}(x_{r-1}+x_r) \\ x'_{r-1} = x_{r-1}^r \\ x'_r = x_r x_{r-1}^{r-1} \end{cases} \qquad (\mathrm{T}^{-1}) \begin{cases} x_i = x'_i x'^{\,r-1}_{r-1} \\ x_{r-1} = x'_{r-1} x'^{\,r-2}_r (x'_{r-1}+x'_r) \\ x_r = x'^{\,r-1}_r (x'_{r-1}+x'_r) \end{cases}$$

$$(i=0,1,\cdots,r-2).$$

In questo caso infatti si ha:

$$K(x) = x_{r-1}^{r(r-1)} x_r^{r-2}(x_{r-1}+x_r) \quad , \quad J(x) = r\, x_{r-1}^{2(r-1)} x_r^{(r-1)(r-2)} (x_{r-1}+x_r)^{r-1}$$

$$H(x') = x'^{\,r-1}_{r-1} x'^{\,r(r-2)}_r (x'_{r-1}+x'_r)^r \quad , \quad J'(x') = r\, x'^{\,(r-1)^2}_{r-1} x'^{\,2(r-2)}_r (x'_{r-1}+x'_r)^2 .$$

Tuttavia, per ogni $r \geq 2$ esistono corrispondenze cremoniane per le quali le suddette coincidenze hanno luogo, com'è provato dal seguente esempio:

$$(\mathrm{T}) \qquad x'_i = x_0 x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_r \qquad (\mathrm{T}^{-1}) \quad x_i = x'_0 x'_1 \cdots x'_{i-1} x'_{i+1} \cdots x'_r ;$$

In questo caso infatti si ha:

$$K(x) = x_0^{r-1} x_1^{r-1} \cdots x_r^{r-1} \quad , \quad J(x) = (-1)^r r\, K(x),$$

$$H(x') = x'^{\,r-1}_0 x'^{\,r-1}_1 \cdots x'^{\,r-1}_r \quad , \quad J'(x') = (-1)^r r\, H(x') .$$

4. – Poniamo:

$$K(x) = K_1^{\nu_1}(x) K_2^{\nu_2}(x) \cdots K_t^{\nu_t}(x) \quad , \quad H(x') = H_1^{\nu'_1}(x') H_2^{\nu'_2}(x') \cdots H_{t'}^{\nu'_{t'}}(x'),$$

dove abbiamo indicato con $K_1, K_2, \cdots, K_t$ le componenti irriducibili (distinte) di $K(x)$ e con $H_1, H_2, \cdots, H_{t'}$ le componenti irriducibili (distinte) di $H(x')$.

Per le (3_1) e (3_2) sarà:

$$(5_1) \quad H_i(f) = a_i K_1^{p_{1i}} K_2^{p_{2i}} \cdots K_t^{p_{ti}} \qquad (i=1,2,\cdots t') \qquad (a_i \text{ costanti} \neq 0),$$

$$(5_1) \quad K_j(g) = b_j H_1^{q_{1j}} H_2^{q_{2j}} \cdots H_{t'}^{q_{t'j}} \qquad (j=1,2,\cdots,t) \qquad (b_j \text{ costanti} \neq 0),$$

con p_{ji} e q_{ij} numeri interi positivi o nulli.

Consideriamo le matrici:

$$P = [p_{ji}] \quad , \quad Q = [q_{ij}],$$

rispettivamente dei tipi (t, t') e (t', t); e supponiamo – se possibile – che la prima di esse abbia caratteristica minore di t'. In quest'ipotesi esistono t'

interi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{t'}$, non tutti nulli, tali che

$$\sum_{i=1}^{t'} \lambda_i p_{ji} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, t),$$

fra cui ve ne saranno un certo numero h positivi e un certo numero k negativi, con $0 < h + k \leq t'$. Non è restrittivo supporre – per fissare le idee – che siano positivi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ e negativi $\lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, \cdots, \lambda_{h+k}$, onde converrà scrivere le precedenti equazioni nella forma:

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i p_{ji} = \sum_{s=h+1}^{h+k} (-\lambda_s) p_{js} \qquad (j = 1, 2, \cdots, t).$$

Da queste e dalle (5_1) segue l'identità:

$$H_1^{\lambda_1}(f) H_2^{\lambda_2}(f) \cdots H_h^{\lambda_h}(f) \equiv a H_{h+1}^{-\lambda_{h+1}}(f) H_{h+2}^{-\lambda_{h+2}}(f) \cdots H_{h+k}^{-\lambda_{h+k}}(f)$$
$$(a \text{ costante} \neq 0),$$

e quindi:

$$H_1^{\lambda_1}(x') H_2^{\lambda_2}(x') \cdots H_h^{\lambda_h}(x') \equiv a H_{h+1}^{-\lambda_{h+1}}(x') H_{h+2}^{-\lambda_{h+2}}(x') \cdots H_{h+k}^{-\lambda_{h+k}}(x');$$

ma ciò è assurdo, perché $h + k > 0$ e i due membri non possono avere fattori a comune. Con ciò risulta provato che la matrice P ha caratteristica t'.

Con ragionamento analogo si prova che la matrice Q ha caratteristica t, e quindi si ha $t = t'$. Concludendo:

Le matrici P e Q *sono quadrate* ($t' = t$) *e non degeneri.*

Dall'uguaglianza $t = t'$ e da quanto abbiamo visto nel n. 2 segue che:

Le forme $K(x)$, $J(x)$, $J'(f)$, $H(f)$, $H(x')$ $J'(x')$, $J(g)$, $K(g)$ *hanno lo stesso numero di componenti irriducibili distinte* (2).

5. – Indichiamo con μ_i il grado della forma $K_i(x)$, con μ'_i il grado della forma $H_i(x)$, e consideriamo le matrici:

$$\nu = [\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_t], \qquad \mu = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t],$$
$$\nu' = [\nu'_1, \nu'_2, \cdots, \nu'_t], \qquad \mu' = [\mu'_1, \mu'_2 \cdots, \mu'_t].$$

In base alle (5_1), (5_2), (3_1), (3_2) si ha:

$$(6_1) \quad n\nu_{-1} = P\nu'_{-1}, \qquad (7_1) \quad n\mu' = \mu P,$$
$$(6_2) \quad m\nu'_{-1} = Q\nu_{-1}, \qquad (7_2) \quad m\mu = \mu' Q.$$

Sia ρ il M.C.D. dei numeri ν_i e ρ' il M.C.D. dei numeri ν'_i. Poiché $K(x)$ ed $H(x')$ sono di grado $nm - 1$, si ha che

$$(8) \qquad nm - 1 = \sum_{i=1}^{t} \mu_i \nu_i = \sum_{i=1}^{t} \mu'_i \nu'_i$$

(2) Vedi l'Introduzione e la nota (1).

è divisibile per ρ e per ρ', quindi possiamo porre $nm - 1 = q\rho = q'\rho'$ con q e q' interi positivi. Ma per le (6_1) e (6_2) si ha che $n\rho$ è divisibile per ρ' ed $m\rho'$ è divisibile per ρ; e poiché:

$$\rho n \frac{m\rho'}{\rho} = \rho' nm = \rho' + q\rho\rho' \quad , \quad \rho' m \frac{n\rho}{\rho'} = \rho nm = \rho + q'\rho\rho'$$

segue che ρ' è divisibile per ρ e ρ è divisibile per ρ', e quindi $\rho = \rho'$.

In modo del tutto analogo, ragionando sulle (8), (7_1) e (7_2) si prova che il M.C.D. dei numeri μ_i è uguale al M.C.D. dei numeri μ'_i.

Abbiamo così dimostrato che:

Il M.C.D. dei numeri ν_i *è uguale al M.C.D. dei numeri* ν'_i, *e il M.C.D. dei numeri* μ_i è *uguale al M.C.D. dei numeri* μ'_i [(3)].

6. Per quanto abbiamo visto nel n. 2 si ha:

$$J(x) = c K_1^{\tau_1}(x) K_2^{\tau_2}(x) \cdots K_t^{\tau_t}(x) \quad , \quad J'(x) = c' H_1^{\tau'_1}(x') H_2^{\tau'_2}(x') \cdots H_t^{\tau'_t}(x'),$$

con c e c' costanti non nulle. Da queste e dalle (4_1), (4_2), (5_1) e (5_2) si traggono le

$$(9_1) \qquad (r+1)\nu'_{-1} = Q\tau_{-1} + \tau'_{-1},$$

$$(9_2) \qquad (r+1)\nu_{-1} = P\tau'_{-1} + \tau_{-1},$$

dalle quali per le (6_1) e (6_2) seguono le:

$$(10_1) \qquad (n-1)\tau'_{-1} = (Q - nP^{-1})\tau_{-1},$$

$$(10_2) \qquad (m-1)\tau_{-1} = (P - mQ^{-1})\tau'_{-1}.$$

Le matrici nP^{-1} ed mQ^{-1} sono ad elementi interi poiché, come vedremo nel n. 7, si ha $det\, P = \pm n$ e $det\, Q = \pm m$; proveremo anche che è $det\,(Q - nP^{-1}) = \pm (m-1)(1-n)^{t-1}$ e $det\,(P - mQ^{-1}) = \pm (n-1)(1-m)^{t-1}$ e quindi le matrici $Q - nP^{-1}$ e $P - mQ^{-1}$, che compaiono nelle (10_1) e (10_2), sono non degeneri e ad elementi interi.

7. – *a*) Ci proponiamo di mostrare che:

$$(11_1) \qquad PQ = \nu_{-1}\mu + I,$$

$$(11_2) \qquad QP = \nu'_{-1}\mu' + I,$$

dove I indica la matrice unitaria di ordine t. Valgono infatti le:

$$(12) \qquad K_i[g(f)] = K_i[Kx] = K^{\mu_i} K_i = K_i K_1^{\mu_i\nu_1} K_1^{\mu_i\nu_2} \cdots K_t^{\mu_i\nu_t},$$

$$(13) \qquad K_i[g(f)] = b_i H_1^{q_{1i}}(f) H_2^{q_{2i}}(f) \cdots H_t^{q_{ti}}(f),$$

$$(14) \qquad H_j^{q_{ji}}(f) = a_j K_1^{p_{1j}q_{ji}} K_2^{p_{2j}q_{ji}} \cdots K_t^{p_{tj}q_{ji}}.$$

Da queste, sostituendo le (14) nella (13) e confrontando con la (12), si ottiene la (11_1). Analogamente si prova la (11_2).

(3) Vedi l'Introduzione e la nota (1).

b) Dalle (11_1), (11_2), dalle (8) e dal fatto che le matrici $\nu_{-1}\,\mu$ e $\nu'_{-1}\,\mu'$ hanno caratteristica uno, segue:

$$\det PQ = \det QP = nm. \tag{15}$$

c) Poniamo:

$$(\det P)\,P^{-1} = \bar{P} \quad , \quad (\det Q)\,Q^{-1} = \bar{Q}\,.$$

Le matrici $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ sono quindi ad elementi interi. Dalle (6_1) e (6_2) segue:

$$(\det P)\,\nu'_{-1} = n\bar{P}\,\nu_{-1} \quad , \quad (\det Q)\,\nu_{-1} = m\bar{Q}\,\nu'_{-1}\,;$$

e da queste, tenendo presente che il M.C.D. dei numeri ν_i è uguale al M.C.D. dei numeri ν'_i, segue che *det* P è divisibile per n e *det* Q è divisibile per m. Da ciò e dalla (15) si traggono le:

$$\det P = \pm\, n \quad , \quad \det Q = \pm\, m\,,$$

dove i segni vanno presi in modo concorde, e dipendono dall'ordine in cui si considerano i fattori K_i e H_i.

Infine, si ha $(\det P)\,\det\,(Q - n\,P^{-1}) = \det\,(PQ - n\,I) = \det\,[\nu_{-1}\,\mu + (1-n)\,I] = n\,(m-1)\,(1-n)^{t-1}$, e quindi $\det\,(Q - nP^{-1}) = \pm\,(m-1)\,(1-m)^{t-1}$.

Analogamente si prova che è $\det(P - mQ^{-1}) = \pm\,(n-1)\,(1-m)^{t-1}$.

8. – Per quanto abbiamo visto nel n. 7, le (6), (7), (10) si possono scrivere nella seguente forma:

$$(16_1)\quad \nu'_{-1} = \pm\,\bar{P}\,\nu_{-1} \quad , \quad (16_2)\quad \nu_{-1} = \pm\bar{Q}\,\nu'_{-1}\,,$$

$$(17_1)\quad \mu = \pm\,\mu'\,\bar{P} \quad , \quad (17_2)\quad \mu' = \pm\,\mu\bar{Q}\,,$$

$$(18_1)\quad (n-1)\,\tau'_{-1} = (Q \mp \bar{P})\,\tau_{-1} \quad , \quad (18_2)\quad (m-1)\,\tau_{-1} = (P \mp \bar{Q})\,\tau'_{-1}\,.$$

Si noti che:

Il M.C.D. dei numeri τ_i *può non essere uguale a quello dei numeri* τ'_i, come dimostra il primo esempio del n. 3. Da ciò segue che per le τ_i e le τ'_i non esistono relazioni analoghe alle (16_1), (16_2) che legano le ν_i e ν'_i.

9. – Supponiamo ora che sia $\nu_i = \tau_i$ per $i = 1\,,2\,,\cdots,t$. In quest'ipotesi, per le (10_1), (9_1) e (6_1) si ha $n\tau'_{-1} = Q\tau_{-1} + \tau'_{-1} - nP^{-1}\,\tau_{-1} = (r+1)\,\nu'_{-1} - \nu'_{-1} = r\,\nu'_{-1}$, cioè:

$$n\,\tau'_{-1} = r\,\nu'_{-1}\,.$$

Ma da $\nu_i = \tau_i$ segue anche:

$$(r+1)\,(n-1) = nm - 1$$

da cui segue $r = n\,(r - m + 1) = n\,\dfrac{m-1}{n-1}$, $r + 1 = m + \dfrac{m-1}{n-1}$, quindi

$$\tau'_{-1} = (r - m + 1)\,\nu'_{-1}\,,$$

onde n è un divisore di r, $n - 1$ è un divisore di $m - 1$ ed $m \leq r$.

Pertanto risulta che:

Se le ipersuperficie $K(x) = 0$ *e* $J(x) = 0$ *coincidono, allora l'ipersuperficie* $J'(x') = 0$ *coincide con la* $H(x') = 0$ *contata* $r - m + 1 = \frac{r}{n} = \frac{m-1}{n-1}$ *volte*. In particolare, se r è primo si ha necessariamente $n = m = r$ ed $r - m + 1 = 1$.

Quindi in S_2 ed in S_3, se $K(x) = 0$ coincide con $J(x) = 0$, allora $H(x') = 0$ coincide con $J'(x')$; mentre in S_4 si presenta effettivamente il nuovo caso $J(x) = c\,H(x)$ e $J'(x') = c'\,H^2(x')$ per $n = 2, m = 3$, come dimostra il seguente esempio:

$$
(\mathrm{T}) \quad \begin{cases} x'_0 = x_0(x_1 - x_2) \\ x'_1 = x_1(x_0 - x_2) \\ x'_2 = x_3(x_1 - x_2) \\ x'_3 = x_3(x_0 - x_2) \\ x'_4 = x_3 x_4 , \end{cases} \qquad (\mathrm{T}^{-1}) \quad \begin{cases} x_0 = x'_0 x'_3 (x'_2 - x'_3) \\ x_1 = x'_1 x'_2 (x'_2 - x'_3) \\ x_2 = x'_2 x'_3 (x'_0 - x'_1) \\ x_3 = x'_2 x'_3 (x'_2 - x'_3) \\ x_4 = x'_4 (x'_1 x'_2 - x'_0 x'_3) . \end{cases}
$$

Attualmente infatti risulta:

$$
K(x) = x_3^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_1 - x_0) \quad , \quad J(x) = 2\,K(x)
$$

$$
H(x') = x'_2 x'_3 (x'_2 - x'_3)(x'_1 x'_2 - x'_0 x'_3) \quad , \quad J'(x') = 3\,H^2(x') .
$$

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite di un solido tubolare a direttrice curvilinea* (*). Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (**) dal Socio A. SIGNORINI.

1. INTRODUZIONE. – In una recente Nota [1] ho raggiunto alcuni semplici risultati esatti sulle deformazioni dei solidi tubolari atte a conservare le sezioni piane; risultati cui sono pervenuto anche col sussidio di una certa nuova forma delle condizioni di congruenza. Voglio alludere alle equazioni che, nella teoria delle deformazioni finite fanno riscontro alle classiche condizioni di De Saint-Venant.

Rimaneva però la restrizione che, nella configurazione di riferimento, la direttrice del solido tubolare [cioè il luogo dei baricentri delle sezioni normali pensate come omogenee] fosse rettilinea. Affrancandomi da tale ipotesi riprendo qui in esame lo stesso tipo di spostamento al fine di determinare le caratteristiche di deformazione complete, ma anche per mettere in evidenza che in ciascuna sezione normale *gli scorrimenti e il coefficiente di dilatazione cubica risultano esattamente dal quoziente di funzioni lineari* delle coordinate cartesiane.

2. PREMESSE DI CARATTERE GENERALE. – Siano:

S un sistema continuo tridimensionale; C_* una configurazione di riferimento scelta a piacere fra tutte quelle possibili per S; C la configurazione attuale; P_*, P due qualunque punti corrispondenti nello spostamento globale

$$\mathcal{S} \equiv C_* \to C$$

che suppongo regolare [2]; $\mathcal{T} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ una terna cartesiana trirettangola levogira prefissata una volta per tutte; y_1, y_2, y_3 e rispettivamente x_1, x_2, x_3 le coordinate di P_* e P rispetto a $\mathcal{T}$; y'_1, y'_2, y'_3 delle coordinate curvilinee qualsiasi di P_*, anche non ortogonali. Insieme a

$$OP_* = y_1\, \boldsymbol{c}_1 + y_2\, \boldsymbol{c}_2 + y_3\, \boldsymbol{c}_3$$

intenderò quindi

$$OP_* = OP_*(y'_1, y'_2, y'_3)$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) G. FERRARESE, *Le caratteristiche di deformazione complete per i solidi tubolari e una nuova forma delle condizioni di congruenza per spostamenti finiti*, in corso di stampa nei « Rendiconti di Matem. ». I risultati di questo lavoro sono stati comunicati al VI Congresso dell'U. M. I. (Napoli, 11–16 settembre 1959).

(2) Cfr. A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 1ª, « Ann. Matem. Pura e Appl. », ser. IV, tomo XXII (1943), cap. I, n. 1.

o se si vuole

$$y_r = y_r(y'_1, y'_2, y'_3) \qquad (r = 1, 2, 3),$$

con la tacita restrizione che lo Jacobiano

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(y'_1, y'_2, y'_3)}$$

risulti generalmente maggiore di zero.

Anche adoperando, senz'altro avviso, i coefficienti di una omografia vettoriale li intenderò riferiti alla $\mathcal{T}$.

Usando coordinate curvilinee conviene prendere sistematicamente in considerazione, accanto alla configurazione di riferimento C_* l'altra, C'_*, che da essa si deduce interpretando y'_1, y'_2, y'_3 come coordinate cartesiane ortogonali di punto rispetto alla terna prefissata $\mathcal{T}$. Indicherò con P'_* il corrispondente di P_* in C'_* e prenderò di mira anche lo spostamento

$$\Sigma \equiv C'_* \rightarrow C_*,$$

per il quale ammetto l'ipotesi di regolarità già supposta per $\mathcal{S}$.

Lo studio dello spostamento $C_* \rightarrow C$ in coordinate curvilinee si può in definitiva riportare a quello di $\mathcal{S}' \equiv C'_* \rightarrow C$ in coordinate cartesiane, in modo che riesce utile introdurre, accanto alle omografie di spostamento e di deformazione, α ed ε, relative ad $\mathcal{S}$, le analoghe, α' ed ε', per $\mathcal{S}'$, σ ed ε_σ per Σ.

Naturalmente sarà

$$(1) \qquad \alpha \equiv \left\| \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right\| \quad , \quad 1 + 2\varepsilon = K\alpha\alpha$$

insieme a

$$(1') \qquad \alpha' \equiv \left\| \frac{\partial x_r}{\partial y'_s} \right\| \quad , \quad 1 + 2\varepsilon' = K\alpha'\alpha',$$

nonché

$$(1'') \qquad \sigma \equiv \left\| \frac{\partial y_r}{\partial y'_s} \right\| \quad , \quad 1 + 2\varepsilon_\sigma = K\sigma\sigma \; .$$

D'altra parte $\mathcal{S}'$ coincide col prodotto dello spostamento Σ per $\mathcal{S}$, in modo che si deve intendere [3]

$$(2) \qquad \alpha' = \alpha\sigma$$

e quindi

$$(3) \qquad K\alpha'\alpha' = K\sigma(1 + 2\varepsilon)\sigma = K\sigma\sigma + 2K\sigma\varepsilon\sigma.$$

Introduco l'omografia $\gamma \equiv \| \gamma_{rs} \|$ definita con la posizione

$$(4) \qquad 2\gamma = K\alpha'\alpha' - K\sigma\sigma$$

cioè [cfr. (3)]

$$(5) \qquad \gamma = K\sigma\varepsilon\sigma:$$

(3) Cfr. la Memoria citata in nota (2), p. 50.

la proprietà d'essere in corrispondenza biunivoca con ε fa attribuire a γ la denominazione di omografia di deformazione [4] per lo spostamento $C_* \to C$, ma nel seguito tale attributo lo intenderò riservato alla omografia ε. Vale però la pena di notare che, se le y' si identificano con le y, cioè $\sigma \equiv 1$, γ non differisce da ε; identificando invece le y' con le x, ovvero σ con α^{-1}, γ viene a dare [cfr. (2) e (4)] l'omografia di deformazione dello spostamento inverso $C \to C_*$, cambiata di segno. In ogni caso, indicando con a_{rs}, b_{rs} rispettivamente i coefficienti delle omografie $K\sigma\,\sigma$, $K\alpha'\alpha'$, dalla (4) segue

$$2\,\gamma_{rs} = b_{rs} - a_{rs} \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,3).$$

Inoltre, essendo [cfr. (1'), (1'')]

$$\sigma\,\boldsymbol{c}_r = \frac{\partial OP_*}{\partial y'_r} \quad , \quad \alpha'\boldsymbol{c}_r = \frac{\partial OP}{\partial y'_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

si deduce, con una semplice applicazione del teorema di commutazione,

$$a_{rs} = \boldsymbol{c}_r \times K\sigma\,\sigma\,\boldsymbol{c}_s = \frac{\partial OP_*}{\partial y'_r} \times \frac{\partial OP_*}{\partial y'_s},$$

$$b_{rs} = \boldsymbol{c}_r \times K\alpha'\alpha'\,\boldsymbol{c}_s = \frac{\partial OP}{\partial y'_r} \times \frac{\partial OP}{\partial y'_s}$$

e quindi anche

$$2\,\gamma_{rs} = \frac{\partial OP}{\partial y'_r} \times \frac{\partial OP}{\partial y'_s} - \frac{\partial OP_*}{\partial y'_r} \times \frac{\partial OP_*}{\partial y'_s}$$

ovvero

$$2\,\gamma_{rs} = \frac{\partial OP_*}{\partial y'_r} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y'_s} + \frac{\partial OP_*}{\partial y'_s} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y'_r} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y'_r} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y'_s},$$

se si accenna con $\boldsymbol{s} = P_*\,P$ lo spostamento locale in $\mathcal{S}$.

Dalla (4) [cfr. $(1'_2)$, $(1''_2)$] segue anche

$$\gamma = \varepsilon' - \varepsilon_\sigma \tag{6}$$

in modo che, fra l'altro, dalle condizioni di congruenza per la ε' si ricavano le analoghe per γ. Come è noto tali condizioni sono sostanzialmente quelle necessarie e sufficienti perché la forma differenziale caratteristica dello spostamento $\mathcal{S}'$

$$\sum_{r,s}^{3}{}_{1}\, b_{rs}\, dy'_r\, dy'_s$$

effettivamente corrisponda a un ds^2 euclideo, cioè l'annullarsi in tutto C'_* dei simboli di Riemann. In forma diversa, ma forse più espressiva, ho potuto accertare [5] che l'omografia ε', assegnata in tutto C'_* può pensarsi come

(4) Cfr. A. E. GREEN & W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954, ma anche T. MANACORDA, *Relazioni fra deformazione e stato di tensione per un generico solido incomprimibile a trasformazioni reversibili*, «Bollett. Unione Matem. Ital.», ser. III (1957).

(5) Cfr. nota (1).

omografia di deformazione di uno spostamento regolare $C'_* \rightarrow C$ solo se risultano verificate le condizioni

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial y'_{r+1}} \operatorname{rot}_{P'_*} \varepsilon' \boldsymbol{c}_r - \frac{\partial}{\partial y'_r} \operatorname{rot}_{P'_*} \varepsilon' \boldsymbol{c}_{r+1} = \mathbf{V}\left[K\varphi_{r+1}(1 + 2\varepsilon')^{-1}\varphi_r\right]$$

essendo

$$\varphi_r(P'_*) = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y'_r} + \operatorname{rot}_{P'_*} \varepsilon' \boldsymbol{c}_r \wedge \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e $\mathbf{V}[\quad]$ il simbolo di vettore di una omografia. Facendo intervenire nelle (7), tramite la (6) l'omografia γ o se si vuole la ε, si avranno in definitiva le condizioni di congruenza per l'omografia di deformazione in coordinate curvilinee qualsiasi.

3. Le più semplici deformazioni di un solido tubolare. – Prendo ora in considerazione un generico solido tubolare S_t senza escludere che, nella sua configurazione di riferimento C_* la direttrice l_* possa essere anche non rettilinea.

Indicherò con

$$y_r = y_r(s_*) \qquad 0 \leq s_* \leq L_* \qquad (r = 1, 2, 3),$$

le equazioni parametriche della curva l_*, con $K_* \, \mathbf{T}_* \, \mathbf{N}_* \, \mathbf{B}_*$ il triedro principale relativo al suo punto generico K_*, con π_* le sezioni normali.

Siano poi, con le notazioni del n. 2: C la configurazione attuale di S_t; P_*, P due qualunque punti corrispondenti nello spostamento globale

$$\mathcal{S} \equiv C_* \rightarrow C\,;$$

l la trasformata di l_*; K il punto generico di l. Per lo spostamento $\mathcal{S}$, oltre alla ipotesi di regolarità, ammetto che:

a) le trasformate π delle singole π_* siano applicabili su π_*;

b) le π risultino piane e quindi proprio della stessa forma delle π_*, in modo che la curva l verrà a dare il luogo dei baricentri delle π pensate come omogenee;

c) le π siano ortogonali ad l.

Per i punti di C_* penso poi, oltre che a coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, a coordinate curvilinee y'_1, y'_2, y'_3 definite con la condizione che, per il punto generico P_*:

1° y'_3 sia l'ascissa curvilinea s_* della proiezione ortogonale K_* su l_*;

2° y'_1, y'_2 diano le coordinate cartesiane di P_* nel piano normale alla curva l_*; piano che intendo riferito a due assi ortogonali con origine in K_* scelti con l'unica restrizione che, detti $\boldsymbol{i}^*_1, \boldsymbol{i}^*_2$ i loro versori, la terna $K_* \, \boldsymbol{i}^*_1 \, \boldsymbol{i}^*_2 \, \mathbf{T}_*$ risulti levogira. Sarà pertanto

$$(8) \qquad OP_* = OK_*(y'_3) + y'_1 \boldsymbol{i}^*_1 + y'_2 \boldsymbol{i}^*_2$$

con

$$(8') \qquad \begin{cases} \boldsymbol{i}^*_1 = \cos\gamma_* \, \mathbf{N}_* - \sin\gamma_* \, \mathbf{B}_* \\ \boldsymbol{i}^*_2 = \sin\gamma_* \, \mathbf{N}_* + \cos\gamma_* \, \mathbf{B}_*, \end{cases}$$

se si indica con $\gamma_*(y'_3)$ l'anomalia di $\mathbf{N}_*$ contata a partire da $\boldsymbol{i}^*_1$, in verso antiorario rispetto a $\mathbf{T}_*$.

Le ipotesi fatte per lo spostamento $\mathcal{S}$ permettono di scrivere, in modo analogo,

$$\text{OP} = \text{OK} + y'_1\, \boldsymbol{i}_1 + y'_2\, \boldsymbol{i}_2 , \tag{9}$$

con

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_1 = \cos\gamma \mathbf{N} - \sin\gamma \mathbf{B} \\ \boldsymbol{i}_2 = \sin\gamma \mathbf{N} + \cos\gamma \mathbf{B} , \end{cases} \tag{9'}$$

essendo $\boldsymbol{i}_1 , \boldsymbol{i}_2$ i trasformati di $\boldsymbol{i}^*_1 , \boldsymbol{i}^*_2$; $\mathbf{N} , \mathbf{B}$ i versori della normale principale e della binormale alla linea l in K; γ l'anomalia di $\mathbf{N}$ rispetto ad $\boldsymbol{i}_1$, contata positivamente in verso antiorario rispetto al versore $\mathbf{T}$ della tangente.

Sia ormai C'_* la configurazione del solido tubolare, a direttrice rettilinea, dedotta da C_* pensando ai punti P'_* le cui coordinate rispetto a $\mathcal{T}$ coincidono ordinatamente con y'_1 , y'_2 , y'_3. Naturalmente supporrò che lo spostamento $\Sigma \equiv C'_* \rightarrow C_*$ sia regolare e quindi che le singole π_* risultino interne al cerchio combaricentrico di raggio uguale al parametro tubolare (6) della curva l_*. Tale parametro è un primo esempio di elemento metrico in grande della curva l_*, capace di assicurare una corrispondenza tra P_* e P'_* incondizionatamente biunivoca; ma si estende, con notevole profitto, ad una varietà regolare qualunque dello spazio euclideo (7).

In ogni modo $\mathcal{S}'$ [e lo stesso dicasi per Σ] rientra in un tipo di spostamento già preso in esame (8) onde l'omografia di deformazione ε' [e insieme ε_σ] risulta completamente determinata.

Qui la si ritrova con considerazioni dirette sulle (9), (9') che in sostanza definiscono lo spostamento in questione. Precisamente da esse si trae

$$\frac{\partial \text{OP}}{\partial y'_1} = \boldsymbol{i}_1 \quad , \quad \frac{\partial \text{OP}}{\partial y'_2} = \boldsymbol{i}_2 \tag{10}$$

nonché, indicando con $\delta = \dfrac{ds}{dy'_3} - 1$ il coefficiente di dilatazione lineare nel punto generico dell'asse di indice 3 nella direzione dell'asse stesso; con c e τ la curvatura e la torsione di l in K,

$$\frac{\partial \text{OP}}{\partial y'_3} = (1 + \delta)\, \mathbf{T} - y'_1 \frac{d\gamma}{dy'_3} \boldsymbol{i}_2 + y'_2 \frac{d\gamma}{dy'_3} \boldsymbol{i}_1 + \tag{11}$$

$$- \left[(y'_1 \cos\gamma + y'_2 \sin\gamma)(c\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + (y'_1 \sin\gamma - y'_2 \cos\gamma)\, \tau\mathbf{N} \right] (1 + \delta).$$

(6) Cfr. PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II, pp. 489–508. Ed. Tumminelli (Roma 1955) ed anche M. PICONE, *Sul parametro tubolare delle curve nello spazio e sui teoremi volumetrico e areometrico di Guldino*. Conferenza del Seminario di Matematica di Bari (1955).

(7) Cfr. M. PICONE, *Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo*, « Rendiconti Lincei », ser. VIII, vol. XX, fasc. 6, giugno 1956.

(8) Cfr. nota (1).

Esprimendo nelle (11) **N** e **B** mediante $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ si trova in definitiva

$$\frac{\partial OP}{\partial y_3'} = \mathfrak{D}' \mathbf{T} + \gamma_2' \boldsymbol{i}_1 + \gamma_1' \boldsymbol{i}_2 , \tag{11'}$$

avendo posto, per semplicità di scrittura

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}' &= 1 + \delta_c' = (1 + \delta)(1 - c \cdot \mathrm{KP} \times \mathbf{N}) \\ \gamma_1' &= -y_1' \left[\frac{d\gamma}{dy_3'} + \tau(1 + \delta)\right] \\ \gamma_2' &= y_2' \left[\frac{d\gamma}{dy_3'} + \tau(1 + \delta)\right], \end{aligned}\right. \tag{12}$$

δ_c' essendo il coefficiente di dilatazione cubica relativo al passaggio da C_*' a C.

Nelle coordinate curvilinee prescelte, y_1', y_2', y_3', in generale non ortogonali [9] l'elemento d'arco di C risulta quindi espresso da

$$\begin{aligned} ds^2 = dy_1'^2 + dy_2'^2 + (\mathfrak{D}'^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2)\, dy_3'^2 + \\ + 2\,\gamma_2'\, dy_1'\, dy_3' + 2\,\gamma_1'\, dy_2'\, dy_3' \end{aligned} \tag{13}$$

e analoga forma avrà ds_*^2, salvo a sostituire nelle (12) c, τ, γ con i corrispondenti in C_* e intendere $\delta = 0$.

Per la (4) sarà quindi

$$2\,\gamma \equiv \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 2\,p_3 \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= y_2' \left[\frac{d(\gamma - \gamma_*)}{dy_3} + \tau(1 + \delta) - \tau_*\right] \\ p_2 &= -y_1' \left[\frac{d(\gamma - \gamma_*)}{dy_3'} + \tau(1 + \delta) - \tau_*\right] \\ 2\,p_3 &= (1 + \delta)^2 (1 - c \cdot \mathrm{KP} \times \mathbf{N})^2 - (1 - c_* \cdot \mathrm{K}_* \mathrm{P}_* \times \mathbf{N}_*)^2 + \\ &\quad + (y_1'^2 + y_2'^2) \left[\left(\frac{d\gamma}{dy_3'} + \tau(1 + \delta)\right)^2 - \left(\frac{d\gamma_*}{dy_3} + \tau_*\right)^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{14'}$$

4. L'OMOGRAFIA DI DEFORMAZIONE ε. – Conviene ormai osservare che, in base alla (5), risulta

$$\gamma_{rs} = \boldsymbol{c}_r \times \mathrm{K}\sigma\, \varepsilon\, \sigma\, \boldsymbol{c}_s = \sigma\, \boldsymbol{c}_r \times \varepsilon\, \sigma\, \boldsymbol{c}_s , \tag{15}$$

così che i coefficienti di γ rispetto a $\mathfrak{T}$ non differiscono da quelli di ε rispetto alla terna definita dai vettori $\sigma \boldsymbol{c}_r = \dfrac{\partial OP_*}{\partial y_r'}$ $(r = 1, 2, 3)$, in generale non ortogonale.

(9) Lo saranno se $\boldsymbol{i}_1$ ed $\boldsymbol{i}_2$ corrispondono a due assi di torsione della linea l, perché allora $\gamma = -\tau s + \text{cost}$ e quindi $\gamma_1' = \gamma_2' = 0$.

Risulta quindi agevole nel nostro caso determinare il quadro di ε con referenza alla terna $\mathcal{T}^* \equiv K_* \boldsymbol{i}_1^* \boldsymbol{i}_2^* \mathbf{T}_*$. Precisamente le (8) (8′), ovvero le (10), (11′), (12) per $C \equiv C_*$ permettono di scrivere

$$\sigma \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{i}_1^* \quad , \quad \sigma \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{i}_2^* \quad , \quad \sigma \boldsymbol{c}_3 = \mathfrak{D}_* \mathbf{T}_* + \gamma_2^* \boldsymbol{i}_1^* + \gamma_1^* \boldsymbol{i}_2^* ,$$

avendo posto

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_* = 1 - c_* \cdot K_* P_* \times \mathbf{N}_* \\ \gamma_1^* = -y_1' \left(\dfrac{d\gamma_*}{dy_3'} + \tau_* \right) \\ \gamma_2^* = y_2' \left(\dfrac{d\gamma_*}{dy_3'} + \tau_* \right) . \end{cases}$$

Sarà pertanto [cfr. (14) e (15)]

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_1^* \times \varepsilon \boldsymbol{i}_1^* = \boldsymbol{i}_2^* \times \varepsilon \boldsymbol{i}_2^* = \boldsymbol{i}_2^* \times \varepsilon \boldsymbol{i}_1^* = 0 \\ \mathbf{T}_* \times \varepsilon \boldsymbol{i}_1^* = \dfrac{p_1}{2\,\mathfrak{D}_*} \quad , \quad \mathbf{T}_* \times \varepsilon \boldsymbol{i}_2^* = \dfrac{p_2}{2\,\mathfrak{D}_*} \\ \mathbf{T}_* \times \varepsilon \mathbf{T}_* = \dfrac{1}{\mathfrak{D}_*^2} (p_3 - p_1 \gamma_2^* - p_2 \gamma_1^*) = \dfrac{1}{2\,\mathfrak{D}_*^2} (\mathfrak{D}'^2 - \mathfrak{D}_*^2 + p_1^2 + p_2^2) , \end{cases}$$

in modo che, rispetto alla terna $\mathcal{T}^*$ l'omografia di deformazione ε viene ad essere rappresentata da

$$2\,\varepsilon \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 2\,\varepsilon_3 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

con

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{p_2}{\mathfrak{D}_*} \quad , \quad \gamma_2 = \dfrac{p_1}{\mathfrak{D}_*} \\ 2\,\varepsilon_3 = \mathfrak{D}^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1 \\ \mathfrak{D} = 1 + \delta_c = \dfrac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}_*} , \end{cases} \tag{16′}$$

δ_c rappresentando il coefficiente di dilatazione cubica relativo al passaggio da C_* a C.

Sulla (16) si riconosce senza alcuna difficoltà che:

1° le caratteristiche principali di deformazione per il generico P_* sono date da

$$E_1 = 0 \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2} G h \quad , \quad E_3 = \varepsilon_3 - E_2$$

essendo

$$G = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad , \quad h = \frac{\varepsilon_3}{G} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_3^2}{G^2}} ;$$

2° come terna principale di deformazione si può assumere quella di versori

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = \frac{1}{G} (\gamma_1 \boldsymbol{i}_1^* - \gamma_2 \boldsymbol{i}_2^*) \\ \mathbf{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} (\mathbf{T}_* \wedge \mathbf{J}_1 + h\mathbf{T}_*) \\ \mathbf{J}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} (-h\mathbf{T}_* \wedge \mathbf{J}_1 + \mathbf{T}_*) . \end{cases}$$

Osservazione. – Se il sistema S_t è incomprimibile, cioè $\mathfrak{D} \equiv 1$, dovrà essere, in tutto C_*,

$$(1 + \delta) [1 - c (y_1' \cos\gamma + y_2' \sin\gamma)] = 1 - c_* (y_1' \cos\gamma_* + y_2' \sin\gamma_*)$$

ovvero

$$\delta = 0 \quad , \quad c = c_* \quad , \quad \gamma = \gamma_* \cdots l_* .$$

Le (14)′ si riducono allora a

$$\begin{cases} p_1 = y_2' (\tau - \tau_*) \\ p_2 = - y_1' (\tau - \tau_*) \\ 2\, p_3 = (y_1'^2 + y_2'^2)(\tau - \tau_*) \left(\tau + \tau_* + 2 \frac{d\gamma_*}{dy_3'}\right) \end{cases}$$

e nella (16) si deve intendere

$$2\, \varepsilon_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 .$$

5. Linearizzazione. – L'omografia di deformazione ε si annulla identicamente in C_* se e solo se risulta

$$\gamma = \gamma_* \quad , \quad c = c_* \quad , \quad \tau = \tau_* \quad , \quad \delta = 0 \cdots l_* .$$

Introducendo quindi le differenze

$$\bar\gamma = \gamma - \gamma_* \quad , \quad \bar\tau = \tau - \tau_* \quad , \quad \bar c = c - c_*$$

si riconosce facilmente che le (16′) implicano

$$(16'') \quad \begin{cases} \gamma_1 = - \frac{y_1'}{\mathfrak{D}_*} \left(\frac{d\bar\gamma}{dy_3'} + \bar\tau + \tau_* \delta\right) + [2] \\ \gamma_2 = \frac{y_2'}{\mathfrak{D}_*} \left(\frac{d\bar\gamma}{dy_3'} + \bar\tau + \tau_* \delta\right) + [2] \\ \varepsilon_3 = \delta_c + \frac{1}{2} (\delta_c^2 + G^2) = \delta - \frac{1}{\mathfrak{D}_*} K_* P_* \times (c_* \bar\gamma \mathbf{B}_* + \bar c \mathbf{N}_*) + [2] \end{cases}$$

ove con [2] si intendono termini di secondo grado almeno in δ, $\bar\gamma$, $\bar\tau$, $\bar c$.

Per uno spostamento infinitesimo, cioè quando si abbia a far tendere a zero le quantità $\delta, \bar{\gamma}, \bar{\tau}, \bar{c}$, le (16″) possono semplificarsi in

$$
(16''') \qquad \begin{cases} \gamma_1 = -\dfrac{y'_1}{\mathfrak{D}_*}\left(\dfrac{d\bar{\gamma}}{dy'_3} + \bar{\tau} + \tau_* \,\delta\right) \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{y'_2}{\mathfrak{D}_*}\left(\dfrac{d\bar{\gamma}}{dy'_3} + \bar{\tau} + \tau_* \,\delta\right) \\[2ex] \varepsilon_3 = \delta_c = \delta - \dfrac{1}{\mathfrak{D}_*} \mathrm{K}_* \, \mathrm{P}_* \times (c_* \,\bar{\gamma} \mathbf{B}_* + \bar{c} \mathbf{N}_*) \,. \end{cases}
$$

Si ottengono così le caratteristiche di deformazione linearizzate e naturalmente si ritrovano, nel caso rettilineo, cioè per $c_* = \tau_* = \gamma_* = 0$, formule ben note [10].

(10) Cfr. ad esempio A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, IV ed., p. 392.

Meccanica. — *Sulla stabilità in regime visco-elastico a comportamento lineare.* Nota II di José Néstor Distéfano, presentata [*] dal Socio G. Colonnetti.

In una recente Nota [1] abbiamo esaminato il comportamento nel tempo delle deformazioni di una trave di materiale visco–elastico caricata di punta e sollecitata lateralmente con forze che possono anche variare nel tempo in maniera limitata. Siamo giunti allora a dare una soluzione della equazione integro–differenziale delle deformazioni

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \frac{P}{EI} y(x,t) + \frac{P}{I}\int_0^t y(x,\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau = \tag{1}$$

$$= -\frac{\mathcal{H}(x,t)}{EI} - \frac{1}{I}\int_0^t \mathcal{H}(x,\tau)\cdot f(t,\tau)\,dt$$

dove

$$\mathcal{H}(x,t) = Py_0(x) + \mathfrak{M}(x,t),$$

nella forma

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t)\cdot\varphi_i(x) \tag{2}$$

dove $\varphi_i(x)$ sono le funzioni caratteristiche della equazione differenziale

$$\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + k_i\varphi_i = 0 \tag{3}$$

e i coefficienti $b_i(t)$ sono le soluzioni delle equazioni integrali

$$b_i(t) - \lambda\int_0^t b_i(\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{EI\,k_i - P}\left[a_i(t) + E\int_0^t a_i(\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{4}$$

dove

$$a_i(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{H}(x,t)\cdot\varphi_i(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{PE}{EI\,k_i - P}\,.$$

Lo studio delle funzioni $b_i(t)$ e perciò delle deformazioni $y(x,t)$ nel tempo, è stato limitato ai materiali che noi abbiamo chiamato della prima classe, cioè quelli che non presentano invecchiamento, concludendo fra l'altro, che le deformazioni $y(x,t)$ si stabilizzano nel tempo se, e solo se, il carico P

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, vol. XXVII, pp. 205–211 (1959).

appartiene all'intervallo

$$O \leq P < \frac{P_k}{1 + E\gamma} \tag{5}$$

dove P_k è il carico critico d'Eulero e γ il valore finale del fluage del materiale.

Nella prima parte della presente ricerca, noi ci proponiamo di esaminare la stabilità delle deformazioni nel tempo, quando il materiale presenta invecchiamento, cioè quando il fluage tende a diminuire con la sua età. Per fare delle considerazioni analitiche, adotteremo come rappresentativa delle curve di fluage $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$ di questo tipo di materiale, la funzione

$$\bar{\varepsilon}_0(t, \tau) = \psi(\tau) \cdot F(t - \tau) \tag{6}$$

proposta dall'Aroutiounian [1], dove $\psi(\tau)$ è una funzione positiva che decresce monotonamente verso il limite $\psi(\infty) = \gamma_0$, rappresentando lo smorzamento del fluage dovuto all'invecchiamento. La funzione $F(t - \tau)$ è anche positiva e monotonamente crescente verso un limite superiore uguale alla unità, per valori grandi del parametro $t - \tau$.

Adottando:

$$\begin{cases} \psi(\tau) = \gamma_0 + \dfrac{A}{\tau + \tau_0} \\ F(t - \tau) = 1 - e^{-\delta(t-\tau)} \end{cases} \tag{7}$$

e scegliendo opportunamente le costanti γ_0, A, δ, si possono seguire con ottima approssimazione le curve di fluage di questi tipi di materiali, e in particolare del calcestruzzo [2]. Il coefficiente di fluage $f(t, \tau)$ che noi abbiamo definito nella Nota citata, come la derivata rispetto a τ della funzione di fluage $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$ cambiata di segno, vale in questo caso

$$f(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\psi(\tau) \cdot \left(1 - e^{-\delta(t-\tau)}\right)\right]. \tag{8}$$

Sostituendo questa funzione nella (4), si ottiene, dopo qualche calcolo

$$b_i(t) + \lambda \int_0^t b_i(\tau)\left[\psi'(\tau) - (\psi'(\tau) + \delta\psi(\tau))\, e^{-\delta(t-\tau)}\right] d\tau = h_i(t) \tag{9}$$

dove $h_i(t)$ e il secondo membro della (4).

Derivando la precedente rispetto a t, si ha:

$$b_i'(t) - \lambda\delta\psi(t) \cdot b_i(t) + \lambda\delta \int_0^t b_i(\tau)\,(\psi'(\tau) + \delta\psi(\tau))\, e^{-\delta(t-\tau)}\, d\tau = h_i'(t); \tag{10}$$

eliminando l'integrale

$$\int_0^t b_i(\tau)\,(\psi'(\tau) + \delta\psi(\tau))\, e^{-\delta(t-\tau)}\, d\tau$$

tra la (9) e la (10) e derivando ancora una volta rispetto a t, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$b_i''(t) + \delta[1 - \lambda\psi(t)]\, b_i'(t) = h_i''(t) + \delta h_i'(t) \tag{11}$$

dove

$$h_i''(t) + \delta h_i'(t) = a_i''(t) + \delta[1 - \lambda\psi(t)]\, a_i'(t)$$

con le seguenti condizioni di bordo

a) $$b_i(0) = b_{io} \quad \text{tale che} \quad \sum_1^\infty b_{io}\, \varphi_i(x) = y(x, 0)$$

b) $$b_i'(0) = h_i'(0) + \lambda\delta\psi(0)\cdot b_{io}.$$

Quando le forze laterali che agiscono sulla trave non variano nel tempo, ciò che equivale a supporre $a_i = \text{cost.}$, il secondo membro della (11) diventa nullo. Lo studio della soluzione in questo caso [2] permette di assicurare che le funzioni $b_i(t)$ avranno un limite finito per $t \to \infty$ se l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\delta\int_0^t [1-\lambda\psi(\tau)]\,d\tau}\, dt$$

è convergente. Sostituendo il valore della funzione $\psi(\tau)$ riportato dalla (7),

$$\psi(\tau) = \gamma_0 + \frac{A}{\tau + \tau_0},$$

la condizione di convergenza si può esprimere con

$$\int_0^\infty t^{\lambda A}\cdot e^{-\delta(1-\lambda\gamma_0)t}\, dt < \infty,$$

che si verifica se

$$1 - \lambda\gamma_0 > 0$$
$$1 + \lambda A > 0.$$

La seconda disuguaglianza si verifica sempre, dato che λ e A sono positivi,

(2) La soluzione generale della (11) si può esprimere con

$$b_i(t) = \int_0^t e^{-\mathfrak{I}(t)}\, dt \int_0^\xi H_i(\xi)\cdot e^{\mathfrak{I}(\xi)}\, d\xi + b_i'(0)\int_0^t e^{-\mathfrak{I}(t)}\, dt + b_{io}$$

dove

$$\mathfrak{I}(t) = \delta\int_0^t [1 - \lambda\psi(\tau)]\, d\tau \qquad \text{e} \quad H_i(t) = a_i''(t) + \delta[1 - \lambda\psi(t)]\, a_i'(t)$$

Quando le forze laterali non variano nel tempo, le funzioni $H_i(t)$ sono identicamente nulle. Nel caso contrario, la stabilità delle funzioni $b_i(t)$ dipenderà della convergenza del primo integrale, che dipende dà $H_i(t)$, cioè della maniera in cui le forze laterali si stabilizzano quando $t \to \infty$.

mentre la prima si verifica quando $\lambda\gamma_0 < 1$, cioè quando

$$P < \frac{EI\,k_i}{1 + E\gamma_0},$$

ma siccome sappiamo che il minore k_i è eguale al carico critico di Eulero diviso per EI, il carico P dovrà ancora verificare

$$P < \frac{P_k}{1 + E\gamma_0}, \tag{12}$$

ciò che è un risultato simile a quello ottenuto nella Nota precedentemente citata, per i materiali che non hanno invecchiamento. Bisogna distinguere in questo caso, che il valore limite del fluage γ_0, è il corrispondente al materiale invecchiato.

Il calcolo effettivo delle deformazioni si può effettuare integrando la (11). Ma è importante osservare che è possibile stabilire un intervallo dove si trovano le deformazioni limiti. Infatti, le deformazioni saranno sempre più piccole di quelle corrispondenti a un materiale della prima classe che abbia il flauge del materiale giovane, cioè $\bar{\varepsilon}_0(t-\tau) = \psi(0)\cdot F(t-\tau)$; e più grandi di quelle corrispondenti ad un materiale della prima classe che abbia il fluage del materiale invecchiato, cioè $\bar{\varepsilon}_0(t-\tau) = \psi(\infty)\cdot F(t-\tau)$.

Usando i risultati trovati nella nostra Nota I citata, l'osservazione precedente si può esprimere con

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\dfrac{EI\,k_i}{1+E\psi(\infty)} - P}\, a_i\,\varphi_i(x) \le y(x,\infty) \le \sum_1^\infty \frac{1}{\dfrac{EI\,k_i}{1+E\psi(0)} - P}\, a_i\,\varphi_i(x).$$

Generalizzazione.

Nelle precedenti ricerche, noi abbiamo considerato il caso della trave articolata alle sue estremità, e con il momento d'inerzia I costante. Si presenta naturale adesso, l'esaminare il caso in cui la trave possa avere diverse condizioni di incastro nelle sue estremità, e anche una possibile variazione del momento d'inerzia.

Esprimendo questa variazione nella forma

$$I(x) = \alpha(x)\cdot I_0 \tag{13}$$

la nostra equazione integro-differenziale delle deformazioni (1) si può scrivere

$$\alpha(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \frac{P}{EI_0}\,y(x,t) + \frac{P}{I_0}\int_0^t y(x,\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau = \tag{14}$$

$$-\frac{\mathcal{H}(x,t)}{EI_0} - \frac{1}{I_0}\int_0^t \mathcal{H}(x,\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau.$$

Immaginiamo che le funzioni $y(x, t)$ e $\mathcal{H}(x, t)$ siano sviluppabili in serie di funzioni $\varphi_i^*(x)$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x, t) &= \sum_1^\infty a_i^*(t) \cdot \varphi_i^*(x) \\
y(x, t) &= \sum_1^\infty b_i^*(t) \cdot \varphi_i^*(x)
\end{aligned}
\right.
\tag{15}
$$

tali che $\varphi_i^*(x)$ siano le funzioni caratteristiche della equazione differenziale

$$
\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2\varphi_i^*}{dx^2} + k_i^*\,\varphi_i^*\right] = 0. \tag{16}
$$

Si può provare facilmente che le funzioni $\varphi_i^*(x)$ verificano le seguenti

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^l \frac{d\varphi_i^*}{dx}\cdot\frac{d\varphi_j^*}{dx}\,dx \\
&\int_0^l \alpha(x)\frac{d^2\varphi_i^*}{dx^2}\cdot\frac{d^2\varphi_j^*}{dx^2}\,dx
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&= 0 \quad \text{se } i \neq j \\
&\neq 0 \quad \text{se } i = j
\end{aligned}
\tag{17}
$$

per qualunque combinazione delle seguenti condizioni di bordo

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
a) & \varphi_i^* = 0 \;; & \varphi_i^{*\prime\prime} = 0 & \text{estremità articolata} \\
b) & \varphi_i^* = 0 \;, & \varphi_i^{*\prime} = 0 & \text{estremità incastrata} \\
c) & \varphi_i^{*\prime\prime} = 0 \;; & [\alpha(x)\,\varphi_i^{*\prime\prime} + k_i^*\,\varphi_i^*]' = 0 & \text{estremità libera.}
\end{array}
\right.
\tag{18}
$$

Questo permette di calcolare immediatamente i coefficienti $a_i^*(t)$ della (15) a mezzo di

$$
a_i^*(t) = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi_i^*}{dx}\,dx}{\displaystyle\int_0^l \left(\frac{d\varphi_i^*}{dx}\right)^2 dx}.
$$

Ricordando che $\mathcal{H}(x, t)$ è il momento flettente delle forze laterali, più il momento flettente del carico P rispetto alla eccentricità iniziale $y_0(x)$, la derivata prima della funzione $\mathcal{H}(x, t)$ rispetto a x, non sarà altro che il valore dello sforzo di taglio dovuto a quelle forze.

Sostituendo i valori delle funzioni $\mathcal{H}(x, t)$ e $y(x, t)$ dati dalla (15), nella (14), derivando l'equazione che risulta, due volte rispetto a x, e tenendo conto che dalla (16) deve essere

$$
\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2\varphi_i^*}{dx^2}\right] = -k_i^*\,\frac{d^2\varphi_i^*}{dx^2},
$$

si trova la seguente equazione di condizione per i coefficienti $b_i^*(t)$

$$(19) \qquad b_i^*(t) - \lambda \int_0^t b_i^*(\tau) \cdot f(t, \tau)\, d\tau = \frac{1}{EI_0 k_i^* - P} \left[a_i^*(t) + E \int_0^t a_i^*(\tau) \cdot f(t, \tau)\, d\tau \right]$$

che è una equazione integrale della stessa forma che si è ottenuta per la trave articolata e con momento d'inerzia costante.

Questo vuol dire che qualsiasi sia la variazione del momento d'inerzia $I(x)$ o le condizioni d'incastro delle estremità, l'equazione che permette, di esprimere i coefficienti $b_i(t)$ sarà sempre della stessa forma. Si può quindi ripetere punto per punto lo sviluppo delle ricerche precedenti, sostituendo $a_i(t)$, I, k_i con i suoi corrispondenti $a_i^*(t)$, I_0, k_i^* della teoria generale, ottenendosi in questa maniera l'espressione generale delle deformazioni, per i diversi tipi di fluage studiati nelle precedenti ricerche.

In ciò che riguarda la stabilità delle deformazioni nel tempo, lo sviluppo condurrà a stabilire l'intervallo

$$0 < P < \frac{EI_0 k_i^*}{1 + E\gamma}$$

entro il quale si devono trovare i carichi P che permettono la stabilizzazione delle funzioni $b_i^*(t)$. Ma siccome anche in questo caso il minore valore caratteristico k_i^* della (16), è il carico critico di Eulero P_k^*, della struttura considerata, diviso per EI_0, tutte le funzioni $b_i^*(t)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ e con ciò le deformazioni, se il carico si trova nell'intervallo (20), si stabilizzeranno.

$$(20) \qquad 0 \leq P < \frac{P_k^*}{1 + E\gamma}$$

dove γ dovrà essere sostituito con γ_0 della formula (7), se si considera il caso dei materiali che hanno invecchiamento.

Questo prova che *il criterio di stabilità prima enunciato* (3), *vale anche per tutti i casi possibili di incastramento, qualunque sia la variazione del momento d'inerzia nella lunghezza della trave.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] N. KH. AROUTIOUNIAN, *Applications de la theorie du fluage*, Ed. Eyrolles, 1957.
[2] N. KH. AROUTIOUNIAN, loc. cit., p. 44.

(3) *Sulla stabilità in regime visco-elastico a comportamento lineare.* Nota I di J. N. DISTÉFANO, «Rend. Acc. Naz. Lincei».

Meccanica. — *Massa di un corpuscolo elettrizzato nella seconda approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana.* Nota di CARLO VENINI, presentata [*] dal Socio B. FINZI.

È noto che, in relatività ristretta, la massa M di una particella non risulta costante, come avviene in meccanica classica, ma cresce con la velocità v dal valore m corrispondente allo stato di quiete sino all'infinito, a cui tende asintoticamente quando la velocità si approssima a quella c della luce nel vuoto, misurata con un orologio normale da un osservatore inerziale.

Nella teoria della gravitazione il problema della variabilità della massa è stato risolto in via approssimata da Einstein e Infeld [1]. La massa di una particella in moto, sottoposta all'azione del campo gravitazionale di una seconda particella, risulta costante in prima approssimazione; in seconda approssimazione si presenta come somma di un addendo coincidente con i primi due termini $m\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$ dello sviluppo in serie della nota formula $M=m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-(1/2)}$ che fornisce la massa in relatività ristretta e di un secondo addendo proporzionale alle masse di prima approssimazione delle due particelle ed inversamente proporzionale alla loro distanza.

In questa Nota, utilizzando le equazioni del campo unitario einsteiniano formulate nel 1953, ritrovo che risulta invariabile la massa di prima approssimazione di un corpuscolo materiale elettrizzato [2], sottoposto al campo gravitazionale ed elettromagnetico di un secondo corpuscolo.

Trovo poi, come nuovo risultato, che in seconda approssimazione la teoria unitaria fornisce per la massa un'espressione che risulta somma degli addendi dati da Einstein e Infeld nel caso puramente gravitazionale e di un ulteriore addendo, che si annulla in assenza di campo elettromagnetico. Questo addendo risulta proporzionale alle cariche delle due particelle ed inversamente proporzionale alla loro distanza. La massa da esso fornita è la terza parte di quella che la teoria della relatività ristretta attribuirebbe all'energia elettrostatica. L'espressione trovata per la massa di seconda approssimazione di una particella elettrizzata in presenza di un solo corpuscolo elettrizzato si estende immediatamente alla massa di una particella in presenza di un qualsivoglia numero di corpuscoli.

1. PREMESSE. – Le equazioni di campo dell'ultima teoria unitaria einsteiniana (1953) sono le seguenti:

$$R_{\underline{\alpha\beta}}=0 \tag{1}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1959.

$$\Gamma_\alpha \equiv \Gamma^{\nu}_{\underset{\vee}{\alpha\nu}} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0 \tag{3}$$

$$g_{\underset{+-}{\alpha\beta}\,;\,\gamma} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\sigma}\,\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} - g_{\sigma\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} = 0\,, \tag{4}$$

essendo $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ il generico coefficiente di connessione, $R_{\alpha\beta}$ il tensore contratto di curvatura, $g_{\alpha\beta}$ il tensore fondamentale (non simmetrico) (1).

Imponiamo ai fenomeni del campo di essere quasi–stazionari [1] (si suppone quindi piccola la velocità delle particelle rispetto alla velocità della luce nel vuoto, misurata da un osservatore inerziale, e le derivate rispetto alla coordinata temporale $x_0 \equiv \lambda^{-1}\,t$ di ordine più elevato delle derivate rispetto alle coordinate spaziali). Applichiamo alle componenti del tensore fondamentale, che riteniamo puri numeri, il seguente sviluppo in serie di potenze del parametro λ positivo, a priori arbitrario e dimensionato come il reciproco di una velocità [2]:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} g_{00} = 1 + \lambda^2\,\alpha^2\,\underset{2}{g_{00}} + \lambda^4\,\alpha^4\,\underset{4}{g_{00}} + \cdots; \\[6pt] g_{\underline{mn}} = -\,\delta_{mn} + \lambda^2\,\alpha^2\,\underset{2}{g_{\underline{mn}}} + \lambda^4\,\alpha^4\,\underset{4}{g_{\underline{mn}}} + \cdots; \\[6pt] g_{\underline{on}} = \lambda^3\,\alpha^3\,\underset{3}{g_{\underline{on}}} + \lambda^5\,\alpha^5\,\underset{5}{g_{on}} + \cdots; \\[6pt] g_{\underset{\vee}{mn}} = \lambda^2\,\beta^2\,\underset{2}{g_{\underset{\vee}{mn}}} + \lambda^4\,\beta^4\,\underset{4}{g_{\underset{\vee}{mn}}} + \cdots; \\[6pt] g_{\underset{\vee}{on}} = \lambda^3\,\beta^3\,\underset{3}{g_{\underset{\vee}{on}}} + \lambda^5\,\beta^5\,\underset{5}{g_{\underset{\vee}{on}}} + \cdots. \end{cases}$$

Nelle (I) δ_{mn} è l'ordinario simbolo di Kronecker, α e β sono costanti aventi le dimensioni di una velocità. La parte simmetrica del precedente sviluppo corrisponde al seguente sviluppo in serie di λ [1]:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \gamma_{00} = \lambda^2\,\underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4\,\underset{4}{\gamma_{00}} + \cdots; \\[6pt] \gamma_{on} = \lambda^3\,\underset{3}{\gamma_{on}} + \lambda^5\,\underset{5}{\gamma_{on}} + \cdots; \\[6pt] \gamma_{mn} = \lambda^4\,\underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6\,\underset{6}{\gamma_{mn}} + \cdots, \end{cases}$$

riguardante le seguenti combinazioni lineari del tensore fondamentale:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv (g_{\underline{\alpha\beta}} - \eta_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\sigma\varrho}\,(g_{\underline{\sigma\varrho}} - \eta_{\sigma\varrho})\,,$$

essendo $\eta_{00} = 1$, $\eta_{mn} = -\,\delta_{mn}$, $\eta_{on} = 0$.

(1) Gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, quelli latini i valori 1, 2, 3. La virgola è simbolo di derivazione ordinaria, il punto e virgola di derivazione tensoriale. Si sottintende il segno di sommatoria per quegli indici (anche non tensoriali) che vengono ripetuti.

Grazie agli sviluppi (I), le equazioni (1), (2), (3) risultano espresse in serie di potenze di λ e si spezzano quindi in equazioni di un sistema ricorrente, dette equazioni ridotte di campo [1].

In prima approssimazione l'equazione (1) assume la forma $\Delta\underset{2}{\gamma}_{00} = 0$, e viene soddisfatta ponendo [2]:

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = -4\,h\,m r^{-1}. \tag{5}$$

Nella (5) h rappresenta la costante d'attrazione universale, r la distanza della particella dal generico punto dello spazio euclideo tridimensionale, m la massa costante di prima approssimazione; $\underset{2}{\gamma}_{00}$ si identifica quindi, a meno del fattore -4, con il classico potenziale gravitazionale per unità di massa.

Ancora in prima approssimazione, le equazioni (2) e (3) portano alla biarmonicità del potenziale elettrostatico V. Escludendo l'esistenza di direzioni privilegiate uscenti dalla particella, poniamo [(2)] [2]:

$$V = A r^{-1} + C r, \tag{6}$$

con A e C costanti a priori arbitrarie. Nelle equazioni di moto di prima approssimazione di un corpuscolo materiale elettrizzato si ritrova la forza elettrostatica coulombiana assumendo [2]:

$$A = -e \quad ; \quad C = -h\beta^{-4} K^{-2} e, \tag{7}$$

essendo e la carica del corpuscolo e K una costante introdotta a scopo dimensionale.

2. Massa di una particella in seconda approssimazione. – In una recente Nota [3] ho integrato le equazioni di campo di seconda approssimazione della relatività unitaria, stabilendo l'espressione esplicita del tensore fondamentale di seconda approssimazione. Considerando un sistema di due particelle $\overset{1}{P}$ e $\overset{2}{P}$, integrando la (1) per $\alpha = \beta = 0$, ho ottenuto:

$$\underset{4}{\gamma}_{00} = -\frac{3}{16}\underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00} + \beta^4 K^2\left(V_{,s}V_{,s} + \frac{1}{2}V\Delta V\right) + \overset{1}{\alpha}_{00}\overset{1}{r}{}^{-1} + \overset{2}{\alpha}_{00}\overset{2}{r}{}^{-1}, \tag{8}$$

essendo $\overset{1}{r}$ e $\overset{2}{r}$ la distanza del generico punto dello spazio da $\overset{1}{P}$ e $\overset{2}{P}$, $\overset{1}{\alpha}_{00}$, $\overset{2}{\alpha}_{00}$ funzioni del tempo, a priori arbitrarie.

(2) La (6) differisce dalla più generale soluzione dipendente dalla sola coordinata raggio r dell'equazione $\Delta\Delta V = 0$ per un addendo Br^2 (con B costante arbitraria) che viene soppresso perché nelle equazioni di moto di prima approssimazione implica non una forza correttiva, ma una forza che durante il moto può divenire preponderante rispetto alle classiche forze newtoniana e coulombiana [2].

Per il movimento di particelle ammettenti un asse privilegiato, cfr. C. Venini, *Moto di dipoli elettrici nell'ultima teoria unitaria einsteniana*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXVI, pp. 490–497 (1959).

Usufruendo della condizione di integrabilità:

$$(9)\qquad \int_{\overset{1}{\sigma}} \left(\Delta \underset{5}{\gamma}_{0k} - \underset{4}{\gamma}_{00,4k}\right) n^k \, d\overset{1}{\sigma} = 0 \ ^{(3)} \ [4],$$

ho ricavato:

$$(10)\qquad \overset{1}{\alpha}_{00} = -2h\overset{1}{m}\overset{1}{v}{}^2 + 2h\overset{1}{m}\overset{2}{m}d^{-1} + \frac{1}{3}\beta^4 K^2 \overset{1}{A}\overset{2}{C} d^{-1} - \beta^4 K^2 \overset{1}{C}\overset{2}{A} d^{-1} - \beta^4 K^2 \overset{1}{C}\overset{2}{C} d,$$

dove d rappresenta la distanza, in un generico istante, fra i due corpuscoli. L'espressione di $\overset{2}{\alpha}_{00}$ si ottiene scambiando nella (10) gli indici sovrapposti 1 e 2. Nell'approssimazione considerata il potenziale gravitazionale γ_{00} assume la seguente forma:

$$(11)\qquad \gamma_{00} = \lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma}_{00} = \lambda^2 \left[-4h\left(\overset{1}{m} - \frac{\lambda^2}{4}h^{-1}\overset{1}{\alpha}_{00}\right)\overset{1}{r}{}^{-1} - 4h\left(\overset{2}{m} - \frac{\lambda^2}{4}h^{-1}\overset{2}{\alpha}_{00}\right)\overset{2}{r}{}^{-1} - \frac{3}{16}\lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00} + \beta^4 K^2 \lambda^2 \left(V_{,s}V_{,s} + \frac{1}{2}V\Delta V\right)\right].$$

Sostituendo nella (11) il valore (10) di $\overset{1}{\alpha}_{00}$ e l'analogo valore di $\overset{2}{\alpha}_{00}$, si ha:

$$(12)\qquad \gamma_{00} = \lambda^2 \left[-4h\left(\overset{1}{m} + \frac{1}{2}\overset{1}{m}\lambda^2\overset{1}{v}{}^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 h\overset{1}{m}\overset{2}{m}d^{-1} - \frac{1}{12}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{1}{A}\overset{2}{C}d^{-1} + \frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{1}{C}\overset{2}{A}d^{-1} + \frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{1}{C}\overset{2}{C}d\right)\overset{1}{r}{}^{-1} - 4h\left(\overset{2}{m} + \frac{1}{2}\overset{2}{m}\lambda^2\overset{2}{v}{}^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 h\overset{2}{m}\overset{1}{m}d^{-1} - \frac{1}{12}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{2}{A}\overset{1}{C}d^{-1} + \frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{2}{C}\overset{1}{A}d^{-1} + \frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4 K^2 \overset{2}{C}\overset{1}{C}d\right)\overset{2}{r}{}^{-1} - \frac{3}{16}\lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00} + \beta^4 K^2 \lambda^2\left(V_{,s}V_{,s} + \frac{1}{2}V\Delta V\right)\right].$$

In assenza di campo elettromagnetico, la (12) si riduce alla relazione trovata da Einstein ed Infeld nella teoria gravitazionale, ossia a:

$$(12')\qquad \gamma_{00} = \lambda^2 \left[-4h\left(\overset{1}{m} + \frac{1}{2}\overset{1}{m}\lambda^2\overset{1}{v}{}^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 h\overset{1}{m}\overset{2}{m}d^{-1}\right)\overset{1}{r}{}^{-1} - 4h\left(\overset{2}{m} + \frac{1}{2}\overset{2}{m}\lambda^2\overset{2}{v}{}^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 h\overset{2}{m}\overset{1}{m}d^{-1}\right)\overset{2}{r}{}^{-1} - \frac{3}{16}\lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00}\right].$$

Come in prima approssimazione, anche in seconda approssimazione Einstein ed Infeld assumono quale massa di $\overset{1}{P}$ il coefficiente di $-4h\lambda^2\overset{1}{r}{}^{-1}$

(3) Nella (9) $\overset{1}{\sigma}$ è una superficie dell'ordinario spazio tridimensionale euclideo che racchiude $\overset{1}{P}$ e non passa per $\overset{2}{P}$, n^k il coseno direttore del versore normale a $\overset{1}{\sigma}$; l'indice 4 indica la derivata parziale rispetto al tempo.

nell'espressione del potenziale gravitazionale γ_{00}, cioè:

$$\overset{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\overset{1}{v}{}^2\right)-\frac{1}{2}\lambda^2 h\,\overset{1}{m}\,\overset{2}{m}\,d^{-1}, \tag{13}$$

e come massa di $\overset{2}{\mathrm{P}}$ il coefficiente di $-4h\lambda^2\overset{2}{r}{}^{-1}$.

Il primo addendo della (13) non dipende dalla distanza fra le due particelle, il secondo addendo diventa infinitamente grande quando tale distanza tende ad annullarsi.

In teoria unitaria assumeremo ancora come massa $\overset{1}{\mathrm{M}}$ di $\overset{1}{\mathrm{P}}$ il coefficiente di $-4h\lambda^2 r^{-1}$ nell'espressione di γ_{00}, prescindendo dall'addendo $\frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4\mathrm{K}^2\overset{1}{\mathrm{C}}\,\overset{2}{\mathrm{C}}\,d$, proporzionale alla distanza fra i due corpuscoli e che quindi svanisce con il loro avvicinarsi [4].

Risulta allora:

$$\overset{1}{\mathrm{M}}=\overset{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\overset{1}{v}{}^2\right)-\frac{1}{2}\lambda^2 h\,\overset{1}{m}\,\overset{2}{m}\,d^{-1}-\frac{1}{12}\lambda^2 h^{-1}\beta^4\mathrm{K}^2\overset{1}{\mathrm{A}}\,\overset{2}{\mathrm{C}}\,d^{-1}+ \tag{14}$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^2 h^{-1}\beta^4\mathrm{K}^2\overset{1}{\mathrm{C}}\,\overset{2}{\mathrm{A}}\,d^{-1}.$$

Tenendo conto delle (7), la (14) assume la seguente forma:

$$\overset{1}{\mathrm{M}}=\overset{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\overset{1}{v}{}^2\right)-\frac{1}{2}\lambda^2 h\,\overset{1}{m}\,\overset{2}{m}\,d^{-1}+\frac{1}{6}\lambda^2\overset{1}{e}\,\overset{2}{e}\,d^{-1}. \tag{15}$$

Il primo addendo al secondo membro della (15) coincide, qualora si interpreti $\overset{1}{m}$ come massa a riposo e si identifichi il parametro λ con il reciproco della velocità c della luce nel vuoto, con i primi due termini dello sviluppo in serie della nota formula $\overset{1}{\mathrm{M}}=\overset{1}{m}(-1\,\overset{1}{v}{}^2c^{-2})^{-(1/2)}$ della relatività ristretta. La somma del primo addendo e del successivo, al secondo membro della (15), coincide con l'espressione einsteiniana della massa di seconda approssimazione della teoria gravitazionale.

Il terzo addendo mette in risalto l'influenza delle cariche elettriche di entrambe le particelle sulla massa di seconda approssimazione di $\overset{1}{\mathrm{P}}$. Questo addendo risulta proporzionale al prodotto delle cariche ed inversamente proporzionale alla distanza fra i due corpuscoli.

La massa da esso fornita non coincide con la massa $\frac{1}{2}\lambda^2\overset{1}{e}\,\overset{2}{e}\,d^{-1}$ che, secondo la teoria della relatività ristretta, corrisponde all'energia elettrostatica $\frac{1}{2}\overset{1}{e}\,\overset{2}{e}\,d^{-1}$, ma ne è la terza parte.

(4) Si tenga presente che, per le (5) e (6), il termine

$$\frac{3}{16}\lambda^2\underset{2}{\gamma_{00}}\,\underset{2}{\gamma_{00}}+\beta^4\mathrm{K}^2\lambda^2\left(\mathrm{V}_{,s}\mathrm{V}_{,s}+\frac{1}{2}\mathrm{V}\Delta\mathrm{V}\right)$$

non contiene in alcun addendo il fattore r^{-1}.

La relazione (15) si estende immediatamente a sistemi costituiti da un numero qualsiasi di particelle, grazie alla struttura della (9) ed al fatto che le equazioni ridotte di campo in prima approssimazione sono lineari (5).

Considerato un sistema di N corpuscoli materiali elettrizzati

$$\overset{1}{\mathrm{P}}, \overset{2}{\mathrm{P}}, \overset{3}{\mathrm{P}}, \cdots, \overset{\mathrm{N}}{\mathrm{P}},$$

detta d_{1s} la distanza di $\overset{1}{\mathrm{P}}$ dal generico corpuscolo $\overset{s}{\mathrm{P}}$, risulta quindi:

$$\overset{1}{\mathrm{M}} = \overset{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \overset{1}{v}{}^2\right) - \frac{1}{2}\lambda^2 h \overset{1}{m} \sum_{s=2}^{\mathrm{N}} \overset{s}{m}\, d_{1s}^{-1} + \frac{1}{6}\lambda^2 \overset{1}{e} \sum_{s=2}^{\mathrm{N}} \overset{s}{e}\, d_{1s}^{-1}. \tag{16}$$

L'influenza delle cariche elettriche sulla massa viene meno se si pone nella (6) C = 0, ossia se si assume come potenziale elettrostatico di prima approssimazione la classica funzione armonica elementare. La (10) perde infatti in tal caso tutti gli addendi elettrostatici, e la (15) si riduce alla relazione di Einstein. Questo si verifica senz'altro qualora si faccia capo, anziché alle equazioni di campo formulate nel 1953, a quelle del 1950, che, in prima approssimazione, impongono l'armonicità al potenziale elettrostatico.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

[1] A. EINSTEIN, L. INFELD, *On the motion of particles in general relativity theory*, «Can. Journal of Math.», vol. I, p. 209 (1949).

[2] E. CLAUSER, *Legge di moto nell'ultima teoria unitaria einsteiniana*, «Il Nuovo Cimento», vol. VII, p. 764 (1958).

[3] C. VENINI, *Integrazione delle equazioni di campo di seconda approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana*, «Rend. Ist. Lomb.» (1959), in corso di stampa.

[4] E. CLAUSER, *Condizioni di integrabilità e moto di particelle nell'ultima teoria unitaria einsteniana*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXVI, p. 498 (1959).

(5) La funzione integranda in (9) è somma di termini ciascuno dei quali è prodotto di due soli fattori noti di prima approssimazione. Poiché all'integrale (9) recano contributo solo quei termini che contengono almeno un fattore relativo a $\overset{1}{\mathrm{P}}$, la funzione integranda si decompone nella somma di prodotti, di tipo ricorrente, relativi a coppie di corpuscoli di cui uno è $\overset{1}{\mathrm{P}}$. Il calcolo eseguito per la coppia $\overset{1}{\mathrm{P}}\,\overset{2}{\mathrm{P}}$ vale per ogni altra coppia $\overset{1}{\mathrm{P}}\,\overset{s}{\mathrm{P}}$ $(s = 3, \cdots, \mathrm{N})$.

Fisica matematica. — *Sul fronte di un'onda elettromagnetica in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico.* Nota di MARIALUISA DE SOCIO, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. In due Note precedenti (1) ho studiato la propagazione, in una direzione qualsiasi, di un'onda elettromagnetica piana non sinusoidale in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico costante $\mathbf{H}_0$. Servendomi delle trasformazioni di Laplace ho determinato l'espressione del campo elettromagnetico mettendone in evidenza varie proprietà, in particolare ho studiato il campo in prossimità del fronte d'onda ed ho ottenuto fra l'altro i seguenti risultati (2).

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z coincidente con la direzione di propagazione e l'asse y così orientato che il vettore $\mathbf{H}_0$ giaccia nel piano yz, ho trovato conveniente decomporre l'onda in due, una con il campo magnetico (che è in ogni caso trasversale) nel piano $z = 0$ parallelo all'asse x, l'altra con il campo magnetico, nello stesso piano $z = 0$, parallelo all'asse y. Ho supposto continuo il campo elettromagnetico per $z \geq 0$ in ogni istante t e nullo per $t < 0$; per $t = 0$ e nel piano $z = 0$ ho ammesso discontinue le derivate prime del campo. In base a queste ipotesi ho dimostrato come sul fronte d'onda, che si propaga nel senso delle z crescenti, la direzione delle derivate prime e seconde rispetto a t del campo magnetico rimane sempre parallela all'asse x, mentre nelle derivate terze appare una componente normale all'asse x e alla direzione di propagazione; analoghe considerazioni valgono per la seconda onda. Le stesse proprietà si ritrovano per il campo elettrico, per questo inoltre ho dimostrato che, sempre sul fronte, nella derivata quarta compare un termine longitudinale diverso da zero (3).

Si presenta però naturale chiedersi se agli stessi risultati relativi al comportamento del campo sul fronte d'onda si poteva giungere direttamente dalle equazioni che reggono il fenomeno, con considerazioni analoghe cioè a quelle seguite quando si applica la teoria delle caratteristiche. Scopo di questa Nota sarà di ritrovare i risultati sopra indicati col metodo ora accennato, sebbene con procedimento un pò diverso da quello usato nella teoria

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) M. DE SOCIO, *Sulla propagazione di onde non sinusoidali in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. 92, pp. 243–255 (1957–58); *Sulla propagazione obliqua di onde non sinusoidali in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. 92, pp. 383–394 (1957–58).

(2) Mi riferisco per maggiore generalità ad una direzione di propagazione che forma un angolo α diverso da 0 e $\pi/2$ con $\mathbf{H}_0$.

(3) Per valore del campo e delle sue derivate sul fronte si intende il limite a cui tendono queste grandezze, provenendo dalla regione già invasa dal campo stesso.

delle caratteristiche. Osserviamo però che, per evitare lunghi calcoli, ora supporremo che sul fronte d'onda sia diverso da zero il campo elettromagnetico e non le sue derivate prime; allora, come del resto si è osservato nella Nota citata, sarà diversa da zero sul fronte non la derivata quarta, ma la derivata terza della componente longitudinale del campo elettrico, inoltre il campo magnetico presenterà sul fronte, già nella derivata seconda, una componente trasversale e normale alla direzione del campo al tempo $t = 0$ sul piano $z = 0$.

Nel presente lavoro dimostrerò anzitutto che il campo e le sue derivate parziali prime non varieranno sul fronte d'onde durante la propagazione. Invece la derivata totale rispetto al tempo t della derivata parziale seconda, sempre rispetto a t, del campo risulterà diversa da zero, sicché, integrando rispetto alla t stessa, si avrà che sul fronte d'onda questa derivata parziale risulterà diversa da zero, anche se è nulla in ogni istante sul piano $z = 0$, e si otterrà per essa un valore analogo a quello ottenuto nella Nota precedente.

È da notare che agli stessi risultati si giunge anche se il mezzo è eterogeneo, purché le sue proprietà siano funzioni della sola z; più precisamente se varia in funzione di z il numero dei corpuscoli per unità di volume e il numero degli urti fra questi per unità di tempo. Sicché il metodo qui usato appare, a differenza di quello della Nota precedente, applicabile anche ai mezzi eterogenei.

2. Il vettore elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{H}$ dell'onda piana non sinusoidale propagantesi nel gas ionizzato soddisfano alle equazioni di Maxwell che, poiché $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ dipendono solo da z, possono scriversi nella forma cartesiana con ovvio significato dei simboli che rappresentano le componenti di un vettore:

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + Nev_x \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + Nev_y \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + Nev_z = 0 \end{cases} \qquad (1')\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial H_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = 0 , \end{cases}$$

dove ε_0 e μ_0 sono la costante dielettrica e la permeabilità del gas non ionizzato, grandezze praticamente uguali alle stesse grandezze nel vuoto, N il numero degli elettroni [4] per unità di volume, e la loro carica, v_x , v_y , v_z le componenti della loro velocità media $\boldsymbol{v}$. Queste ultime soddisfano le relazioni:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \nu v_x + \omega_0 v_z \operatorname{sen} \alpha - \omega_0 v_y \cos \alpha = \dfrac{e}{m} E_x \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \nu v_y + \omega_0 v_x \cos \alpha = \dfrac{e}{m} E_y \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + \nu v_z - \omega_0 v_x \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{e}{m} E_z , \end{cases}$$

(4) Supponiamo che solo gli elettroni contribuiscano sensibilmente alla corrente di convezione.

dove m e ν indicano la massa di un elettrone e il numero degli urti fra gli elettroni nell'unità di tempo, $\boldsymbol{h}$ il versore del campo magnetico influente, α l'angolo fra $\boldsymbol{h}$ e il semiasse positivo delle z, ω_0 l'espressione $(e\mu_0 H_0)/m$.

Riferendoci alla prima onda supponiamo che sul piano $z = 0$ risultino in ogni istante nulle le componenti E_x ed H_y e siano invece diverse da zero E_y ed H_x. Sul fronte d'onda saranno poi soddisfatte le condizioni di Love [5]:

$$(3) \qquad \begin{cases} H_x = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_y \\ H_y = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_x . \end{cases}$$

Sul fronte d'onda si può inoltre supporre $\boldsymbol{v} = 0$, perché gli elettroni negli istanti che precedono l'arrivo del fronte d'onda non sono stati soggetti ad alcun campo elettrico e la loro velocità media è nulla. Le equazioni di Maxwell sul fronte sono perciò date dalle (1) in cui però si deve porre $v_x = v_y = v_z = 0$.

Calcoliamo ora la derivata totale di E_x sul fronte. Si ha, ricordando, com'è ben noto, che dalle condizioni di Love risulta la velocità del fronte $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$:

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z} -$$

$$- \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{dH_y}{dt} .$$

Dalla 2ª equazione di (3) si ottiene invece:

$$\frac{dE_x}{dt} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{dH_y}{dt} ,$$

che insieme all'equazione precedente ci fornisce la soluzione: $\dfrac{dE_x}{dt} = \dfrac{dH_y}{dt} = 0$. Poiché sul piano $z = 0$ al tempo $t = 0$ le componenti E_x ed H_y sono nulle, tali rimarranno quindi sempre sul fronte per ogni $t > 0$.

Con analogo procedimento si dimostra che E_y ed H_x sono sempre costanti e non nulli sul fronte.

Deriviamo ora rispetto a t la prima di (1) e rispetto a z e a t la seconda di (1'). Si ha:

$$(4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial t\, \partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + Ne\dfrac{\partial v_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \dfrac{\partial^2 H_y}{\partial t\, \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z\, \partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} . \end{cases}$$

(5) TORALDO DI FRANCIA, *Onde elettromagnetiche*, Zanichelli, 1953, p. 150.

Calcoliamo la derivata totale di $\partial H_y/\partial t$ sul fronte; si ha, per le (4):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\left(-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - Ne\frac{\partial v_x}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) -$$

$$-\frac{Ne}{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{d^2 E_x}{dt^2} - \frac{Nec}{2}\frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Sul fronte d'onda per la prima equazione di (2) si ha $\partial v_x/\partial t = 0$, ma è anche $d^2 E_x/dt^2 = 0$ essendo E_x costante, segue $d/dt\,(\partial H_y/\partial t) = 0$, cioè la derivata parziale di H_y rispetto a t risulta costantemente nulla sul fronte. Si ha poi ancora sul fronte:

$$\frac{d^2 H_y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) + c\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = 0,$$

da cui si ottiene subito:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = 0.$$

Ma dalle (1) valide sul fronte d'onda per $v_x = 0$ si ha:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right) = 0,$$

ovvero anche $\dfrac{\partial H_y}{\partial z}$, $\dfrac{\partial E_x}{\partial z}$, $\dfrac{\partial E_x}{\partial t}$ sono costanti sul fronte.

Deriviamo ancora rispetto a t le (4); si ha:

$$(5) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^3 H_y}{\partial z \partial t^2} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial^3 E_x}{\partial t^3} + Ne\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^3 E_x}{\partial z^2 \partial t} = -\mu_0\dfrac{\partial^3 H_y}{\partial t^2 \partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^3 E_x}{\partial z \partial t^2} = -\mu_0\dfrac{\partial^3 H_y}{\partial t^3}. \end{cases}$$

Sul fronte d'onda, in base alle nostre ipotesi e alle (2), risulta [6]:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{e}{m}E_y \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

(6) Il campo elettrico è sempre trasversale sul fronte d'onda; da $E_z = 0$ segue per le (2) $\partial v_z/\partial t = 0$.

Derivando la prima equazione di (2) si ha quindi, sempre sul fronte:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -\nu \frac{\partial v_x}{\partial t} - \omega_o \frac{\partial v_z}{\partial t} \operatorname{sen} \alpha + \frac{e}{m} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \omega_o \frac{\partial v_y}{\partial t} \cos \alpha =$$

$$= \omega_o \frac{\partial v_y}{\partial t} \cos \alpha = \frac{\omega_o e}{m} E_y \cos \alpha \neq 0 .$$

Calcoliamo ora la derivata totale della derivata parziale seconda rispetto a t di H_y sul fronte. Si ha per le (5) e la (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^3 H_y}{\partial t^3} + c \frac{\partial^3 H_y}{\partial t^2 \partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial^3 E_x}{\partial z \partial t^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \left(\varepsilon_o \frac{\partial^3 E_x}{\partial t^3} + N e \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial^3 E_x}{\partial z^2 \partial t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial t^3} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \frac{\partial^3 E_x}{\partial z \partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_o \mu_o} \frac{\partial^3 E_x}{\partial z^2 \partial t}\right) - \frac{N e}{2\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right) - \frac{N e^2 \omega_o \cos \alpha}{2 m \sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} E_y = -\frac{N e^2 \omega_o \cos \alpha}{2 m \sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} E_y \neq 0 .$$

Infatti essendo, come dimostrato, $\partial E_x / \partial t$ costante sul fronte, è nulla ivi la sua derivata totale seconda.

Posto poi $k = N e^2 / m \varepsilon_o$ e ricordando il significato di c, risulta:

$$\left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}\right)_{t=z/c} = -\int_0^{z/c} \frac{\varepsilon_o K c \omega_o \cos \alpha}{2} E_y \, dt = -\frac{K \varepsilon_o \omega_o z \cos \alpha}{2} E_y .$$

Tale valore non nullo della derivata seconda di H_y ha espressione analoga al risultato ottenuto nel secondo lavoro citato nella nota [1]. Si ha infatti usando le notazioni del lavoro citato: $\operatorname{sen} \alpha \, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{h}_n$, $-\operatorname{sen} \alpha \, \boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{h}_n$ $\psi(t) \operatorname{sen} \alpha = -H_x$, e quindi sul fronte, per la relazione di Love:

$$\psi(0) \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_y .$$

Derivando allora la formula (7) della Nota citata due volte rispetto a t e considerando le proiezioni lungo $\boldsymbol{j}$, si ha sul fronte, supposto $H_x \neq 0$, e osservando che $g_2'(0) = \omega_o K z \cos \alpha / 2c$:

$$\left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}\right)_{t=z/c} = -g_2'(0) \, \psi(0) \, \boldsymbol{h}_n \times \boldsymbol{j} = -g_2'(0) \, \psi(0) \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\omega_o K z \varepsilon_o \cos \alpha}{2} E_y$$

conforme la (7).

3. Considerando la seconda onda supponiamo che al tempo $t = 0$ risultino sul fronte diverse da zero E_x ed H_y e nulle invece E_y ed H_x. Ripetendo considerazioni analoghe [7] si dimostra ancora che E_y ed H_x sono sempre nulle

(7) Basta scambiare E_y con E_x, H_x con $-H_y$, v_x con v_y.

sul fronte insieme alle loro derivate prime, mentre le derivate parziali seconde rispetto a t sono diverse da zero. Si ricava inoltre sul fronte:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = -\frac{K\varepsilon_0 \omega_0 z \cos\alpha}{2} E_x .$$

Anche dalla equazione (6) della seconda Nota citata in [1], si ottiene, derivando due volte rispetto a t, considerando la proiezione lungo $\boldsymbol{j}$, tenendo presente $H_y = \varphi(0) \operatorname{sen} \alpha$ e le condizioni di Love:

$$\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}\right)_{t=z/c} = g_2'(0)\,\varphi(0)\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{h}_n \times \boldsymbol{i} = -g_2'(0)\,H_y = -\frac{K\varepsilon_0 \omega_0 z \cos\alpha}{2} E_x ,$$

conforme alla (8).

Per l'onda ora in esame consideriamo anche la componente longitudinale del campo elettrico sul fronte per ogni $t > 0$.

Derivando rispetto a t due volte la terza equazione del sistema (1), ricordando che il campo elettrico è sul fronte sempre trasversale e che ivi è sempre $\boldsymbol{v} = 0$, si ha per la terza equazione di (2):

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{Ne}{\varepsilon_0} v_z = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\frac{Ne}{\varepsilon_0}\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^3 E_z}{\partial t^3} = -\frac{Ne}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = -\frac{Ne}{\varepsilon_0}\left(\frac{e}{m}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \nu\frac{\partial v_z}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} \operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= -\omega_0 K E_x \operatorname{sen}\alpha \neq 0 ,$$

ovvero per l'onda in esame compare sul fronte una componente longitudinale del campo elettrico infinitesima del terzo ordine.

4. Supponiamo infine che il mezzo in cui si propaga l'onda sia non omogeneo, più precisamente supponiamo N e ν funzioni di z.

Riferiamoci alla 1ª onda considerata, sia cioè sul piano $z = 0$ al tempo $t = 0$ E_y ed H_x diversi da zero, nulli invece E_x ed H_y.

Si noti intanto che le (4) e (5) restano valide perché ottenute o derivando rispetto a t, e N non dipende da t, oppure derivando rispetto a z equazioni che non contengono N.

Si osserva poi che anche le derivate seconde delle componenti di $\boldsymbol{v}$ conservano sul fronte nel mezzo eterogeneo lo stesso valore calcolato per la propagazione nel mezzo omogeneo. Infatti nella loro espressione i termini ove appaiono le derivate prime di ν contengono i fattori $v_x = v_y = v_z = 0$ sul fronte stesso. Anche le (9) restano valide perché le derivate di N e di ν sono moltiplicate per quantità nulle sul fronte.

Allora, poiché le proprietà per il campo sul fronte d'onda sono state ricavate da considerazioni sulle equazioni dei sistemi (4) e (5), sul valore delle derivate seconde di $\boldsymbol{v}$ e sulle (9), è ovvio che tali proprietà restino valide anche se il mezzo è eterogeneo.

Il caso, di minor interesse fisico, ma forse di qualche interesse matematico, in cui ε_0 varia con z sarà eventualmente trattato in altra Nota.

Chimica fisica. — *Proprietà viscosimetriche e configurazionali del polibutilene atattico* (*). Nota di GIOVANNI MORAGLIO e GIUSEPPE GIANOTTI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

In una precedente Nota [1] si era descritto il frazionamento di un campione di polibutilene atattico e la caratterizzazione mediante misure osmotiche e viscosimetriche di numerose frazioni ottenute. Nella presente Nota saranno in particolare descritte misure viscosimetriche su soluzioni delle frazioni più ristrette in vari solventi. Per ognuno di questi è stata così determinata la relazione tra viscosità intrinseca $[\eta]$ e peso molecolare M; inoltre, poiché uno dei solventi è stato scelto per il suo carattere pseudoideale nei confronti del polibutilene, è stato possibile il calcolo delle dimensioni statistiche medie delle macromolecole, sia con configurazione non perturbata, sia con configurazione dilatata per interazione positiva col solvente.

Le determinazioni sono state effettuate sulle frazioni ristrette precedentemente preparate [1] e denominate in ordine crescente di peso molecolare: R 83, R 82, R 63, R 52, R 4222, R 322, RR 4222. Per le misure si sono impiegati viscosimetri sostanzialmente del tipo Desreux–Bischoff [2], e per le diluizioni pipette tarate per ognuno dei solventi esaminati. Le determinazioni sono state effettuate in decalina, toluolo e benzolo a 30°, impiegando un viscosimetro a tre bolle [3] allo scopo di rilevare eventuali influenze da velocità di efflusso.

Dopo aver applicato ai dati ottenuti le opportune correzioni per energia cinetica, si è potuto concludere che nel caso di frazioni di polibutilene atattico fino a peso molecolare di $5 \cdot 10^5$ circa, le viscosità non vengono influenzate da velocità di efflusso, qualora vengano impiegati apparecchi aventi gradienti, per il toluolo a 30°, non superiori a 1100 sec^{-1}. In Tabella I sono stati quindi riportati, previa correzione per energia cinetica, i valori medi di η_{sp}/c per ciascuna concentrazione e per ciascuna delle frazioni esaminate nei tre solventi sopracitati. Le misure in acetato di isoamile sono state eseguite invece alla temperatura di 23° C (alla quale si ha un sistema pseudoideale), con un viscosimetro a una sola bolla, avente un gradiente di efflusso di 250 sec^{-1} in toluolo a 30°: i corrispondenti valori delle viscosità ridotte, per i quali sono risultate trascurabili le correzioni per energia cinetica, sono pure riportati in Tabella I.

I solventi erano prodotti puri del commercio, disidratati e distillati: in particolare la decalina è risultata una miscela cis–trans avente a 30° una densità di 0,877 g cm^{-3}. L'acetato di isoamile è stato invece rettificato in colonna di Todd con alti riflussi: l'analisi cromatografica in fase vapore lo ha rivelato sostanzialmente esente da ogni componente estraneo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

TABELLA I.

Viscosità ridotte e concentrazioni di frazioni ristrette di polibutilene atattico in vari solventi (η_{sp}/c in $cm^3 g^{-1} \times 100$; c in $g/100 cm^3$).

RR 4222		R 322		R 4222		R 52		R 63		R 82		R 83	
η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c
a) isoamil acetato a 23° C													
0,968	0,579	0,790	0,883	0,587	0,865	0,474	0,822	0,325	0,837	0,249	0,882	0,232	0,843
0,861	0,289	0,688	0,442	0,527	0,433	0,435	0,411	0,310	0,418	0,241	0,441	0,222	0,421
0,831	0,193	0,656	0,294	0,507	0,288	0,420	0,274	0,307	0,279	0,238	0,294	0,221	0,281
0,805	0,145	0,638	0,221	0,495	0,216	0,414	0,205	0,304	0,209	0,236	0,220	0,216	0,211
b) benzolo a 30° C													
2,087	0,528	1,471	0,695	1,008	0,713	0,811	0,848	0,515	1,336	0,362	1,651	0,330	1,890
1,835	0,264	1,315	0,347	0,922	0,356	0,744	0,424	0,475	0,668	0,333	0,825	0,306	0,945
1,751	0,176	1,254	0,232	0,894	0,238	0,721	0,283	0,459	0,445	0,322	0,550	0,298	0,630
1,713	0,132	1,226	0,174	0,876	0,178	0,709	0,212	0,451	0,334	0,319	0,413	0,293	0,472
c) toluolo a 30° C													
2,532	0,464	1,653	0,573	1,160	0,647	0,917	0,793	0,573	1,209	0,391	1,466	0,356	1,655
2,246	0,232	1,493	0,286	1,069	0,324	0,846	0,396	0,530	0,605	0,363	0,733	0,332	0,827
2,150	0,155	1,438	0,191	1,036	0,216	0,823	0,264	0,516	0,403	0,356	0,489	0,323	0,552
2,103	0,116	1,414	0,143	1,025	0,162	0,809	0,198	0,509	0,302	0,351	0,367	0,318	0,414

d) decalina (miscela cis–trans) a 30° C

RR 4222		R 4222		R 52		R 63		R 83	
η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c	η_{sp}/c	c
2,869	0,269	1,368	0,328	1,096	0,428	0,657	0,641	0,407	0,985
2,703	0,179	1,295	0,164	1,033	0,214	0,625	0,320	0,388	0,492
2,615	0,134	1,271	0,109	1,012	0,142	0,611	0,214	0,381	0,328
2,560	0,107	1,257	0,082	1,000	0,107	0,606	0,160	0,378	0,246

I diagrammi $\eta_{sp}/c - c$, costruiti con i dati riportati in Tabella I, sono risultati in ogni caso con andamento rettilineo, in accordo con la nota relazione di Huggins:

$$\eta_{sp}/c = [\eta] + k' [\eta]^2 c . \tag{1}$$

I valori di $[\eta]$ e k', dedotti dai diagrammi secondo la (1) per ciascuna frazione, sono stati riportati in Tabella II, nella quale si sono pure indicati i pesi molecolari corrispondenti [1]. Si nota come i valori di k' sono sensibilmente costanti per i solventi decalina, toluolo e benzolo, mentre essi sono piuttosto variabili, con tendenza ad un regolare aumento col peso molecolare, nel caso dell'acetato di isoamile. Ciò è risultato anche in un analogo studio del polipropilene atattico [4] e trova riscontro in una maggior sensibilità del potere solvente al peso molecolare in vicinanza di condizioni critiche.

TABELLA II.

Viscosità intrinseche e k' di Huggins di frazioni ristrette di polibutilene atattico in vari solventi ($[\eta]$ in 100 $cm^3 g^{-1}$).

Frazioni	$M \cdot 10^{-3}$	Isoamilacetato a 23°		Benzolo a 30°		Toluolo a 30°		Decalina a 30°	
		$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'	$[\eta]$	k'
RR 4222	450	0,752	0,65	1,583	0,38	1,960	0,33	2,370	0,32
R 322	265	0,588	0,66	1,146	0,36	1,336	0,31	—	—
R 4222	175	0,467	0,64	0,836	0,35	0,976	0,30	1,226	0,29
R 52	128	0,397	0,60	0,675	0,35	0,775	0,30	0,970	0,31
R 63	68,5	0,297	0,37	0,430	0,35	0,487	0,30	0,589	0,30
R 82	39,5	0,232	0,36	0,304	0,38	0,338	0,32	—	—
R 83	35	0,213	(0,5)	0,281	0,33	0,306	0,32	0,368	0,29

I dati di $[\eta]$ e di M per ciascun solvente, riportati su diagramma logaritmico, obbediscono alla nota relazione

$$[\eta] = K' \cdot M^a \tag{2}$$

in cui K' ed a sono costanti caratteristiche della coppia polimero-solvente e della temperatura. In fig. 1 sono stati riportati i valori di log $[\eta]$ in funzione di log M e sono state tracciate le rette più probabili calcolate col metodo dei minimi quadrati: i valori risultanti di K' ed a della (2) sono riportati in Tabella III.

Particolarmente interessanti dal punto di vista pratico, per le determinazioni di M dai valori di $[\eta]$, risultano i valori delle costanti relative ai

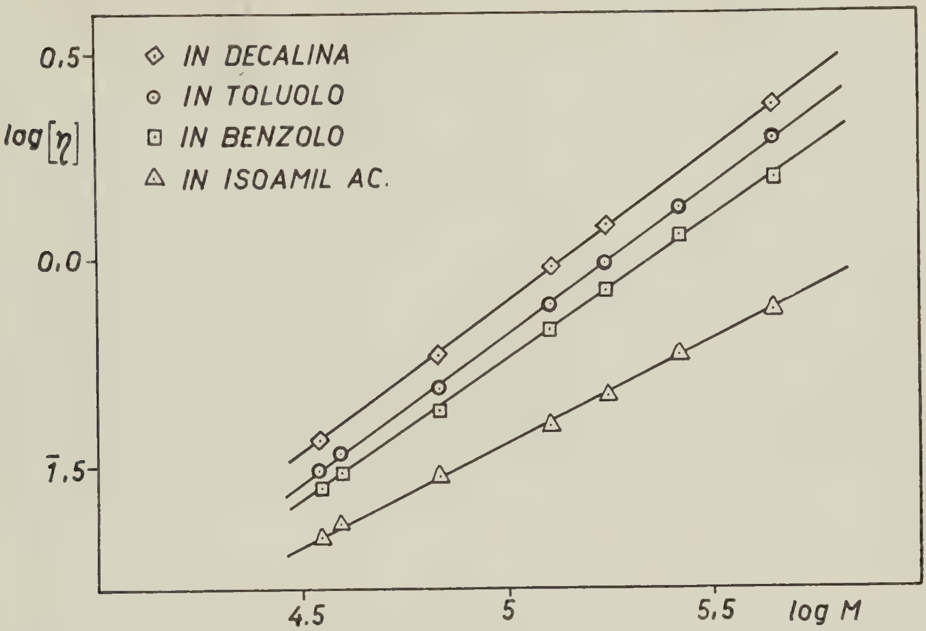


Fig. 1. – Diagramma log [η]–log M per frazioni di polibutilene atattico in vari solventi.

solventi: benzolo, toluolo e decalina. Per mezzo di essi infatti risultano facilmente preparabili le soluzioni su cui determinare le viscosità, ed inoltre le [η] che ne derivano sono meno facilmente affette dalle impurezze del solvente usato e dalla temperatura a cui si effettuano le misure.

TABELLA III.

Costanti K′ *ed* a *della* (2) *per frazioni di polibutilene atattico in vari solventi.*

Solvente	t (°C)	$K' \cdot 10^4$	a
Decalina	30	1,68	0,735
Toluolo	30	1,55	0,725
Benzolo	30	2,15	0,685
Isoamilacetato . . .	23	11,33	0,500

Nel caso dell'acetato di isoamile invece, le [η] sono notevolmente influenzate, oltreché dalla temperatura e dall'eventuale presenza di isomeri od omologhi contenuti nel prodotto commerciale, dal contenuto in acqua che il prodotto distillato assorbe facilmente dall'umidità ambiente, per cui è bene che il prodotto sia conservato ed usato in ambiente anidro.

Tuttavia i dati di K′ ed a in acetato di isoamile riportati in Tabella III sono particolarmente importanti per le possibili deduzioni teoriche in base alla teoria di Fox–Flory [5]. Da essa si ha infatti che:

$$[\eta] = \Phi \left(\frac{\bar{r}^2}{M}\right)^{3/2} \cdot M^{0,5} \tag{3}$$

in cui Φ è una costante universale ed $\bar{r}^2$ la distanza quadratica media tra gli estremi della catena polimerica. Solo nelle particolari condizioni in cui le interazioni tra i segmenti di catena e le molecole del solvente siano uguali a quelle tra segmenti stessi della catena, $(\bar{r}^2/M)^{3/2}$ assume il valore costante $(\bar{r}_0^2/M)^{3/2}$, indipendente dal solvente, caratteristico della catena polimerica e di importanza eccezionale in ogni problema inerente le catene a configurazione statistica. Il valore di 0,5 dell'esponente della relazione (2) per il polibutilene in acetato di isoamile a 23° (ved. Tabella III) prova che con questo solvente le condizioni sopra dette sono state realizzate, per cui dalla (3) risulta:

$$\left(\frac{\bar{r}_0^2}{M}\right)^{3/2} = \frac{[\eta]}{\Phi\, M^{1/2}} = \frac{K'}{\Phi} . \tag{4}$$

Assumendo per il nostro caso il valore medio di Φ più comunemente usato in letteratura di $2{,}1 \cdot 10^{21}$ (1) si ha per il polibutilene:

$$\left(\frac{\bar{r}_0^2}{M}\right)^{1/2} = 814 \cdot 10^{-11} \text{ a } 23^\circ \text{ C.} \tag{5}$$

Tale valore è soltanto leggermente, ma incontestabilmente superiore a quello relativo al poliisobutilene a 24°, che risulta $795 \cdot 10^{-11}$ [6].

Appare quindi lecito concludere che a temperatura ambiente la catena poliisobutilenica possiede possibilità configurazionali un poco superiori a quella isomerica polibutilenica, e che il gruppo etilico laterale in una catena polivinilica conferisce una libertà alla rotazione attorno ai legami adiacenti leggermente inferiore a quella dovuta a due sostituenti metilici su catena polivinilidenica.

Entrambi queste catene sono assai simili, per comportamento, a quella del polipropilene atattico [4]. È interessante confrontare tra loro le dimensioni statistiche medie di vari polimeri allo stato non perturbato (stato di soluzione pseudoideale, equivalente a quello dello stato puro): il confronto più significativo si ottiene calcolando i valori del parametro $(\bar{r}_0^2/x)^{1/2}$, in cui x è il grado di polimerizzazione. A temperatura pressoché ambiente per alcuni polimeri si hanno i seguenti valori di $(\bar{r}_0^2/x)^{1/2}$:

poliisobutilene	$596 \cdot 10^{-10}$
polipropilene atattico	$603 \cdot 10^{-10}$
polibutilene atattico	$609 \cdot 10^{-10}$
polimetilmetacrilato	$680 \cdot 10^{-10}$
polistirolo	$750 \cdot 10^{-10}$.

(1) Le dimensioni di Φ sono quelle che derivano dall'esprimere $[\eta]$ in 100 $cm^3\ g^{-1}$, $\bar{r}^2$ in cm^2 e M nelle usuali unità.

È d'immediata evidenza la similitudine configurazionale tra poliisobutilene, polipropilene e polibutilene e l'aumento di rigidità di catena passando a polimetilmetacrilato ed infine a polistirolo.

Dalla (5) è possibile calcolare immediatamente, per ogni peso molecolare, la distanza media $(\bar{r}_0^2)^{1/2}$ tra gli estremi della catena polibutilenica non perturbata; più in generale, però, confrontando la (2) con la (3) si ricava la relazione:

$$(\bar{r}^2)^{1/2} = \left[\frac{K'}{\Phi} M^{1+a}\right]^{1/3} \tag{6}$$

mediante la quale si calcolano le distanze quadratiche medie tra gli estremi della catena polibutilenica, sia essa perturbata o non perturbata dalle interazioni con il solvente. A titolo di esempio, nella Tabella IV vengono riportati i valori calcolati di $(\bar{r}^2)^{1/2}$ in Å per ciascuno dei solventi esaminati e per alcuni pesi molecolari.

TABELLA IV.

Distanze quadratiche medie $(\bar{r}^2)^{1/2}$ *in* Å *tra gli estremi di catene polibutileniche in vari solventi, per diversi pesi molecolari.*

Solvente	t (°C)	Peso molecolare				
		25.000	50.000	100.000	200.000	400.000
Decalina	30	151	225	336	501	748
Toluolo	30	142	211	315	469	698
Benzolo	30	138	204	301	444	654
Acetato di isoamile	23	129	182	257	364	515

CONCLUSIONI.

Le misure viscosimetriche su soluzioni in vari solventi di frazioni di polibutilene atattico di peso molecolare noto, hanno portato in primo luogo alla determinazione, per ogni solvente, della relazione tra viscosità intrinseca e peso molecolare.

Inoltre, essendo uno dei solventi stato scelto per il suo carattere pseudoideale nei confronti del polimero in esame, in base ai dati sperimentali è stato effettuato il calcolo delle dimensioni statistiche medie delle molecole del polibutilene sia allo stato non perturbato in solvente pseudoideale, sia allo stato rigonfiato per interazione positiva negli altri solventi. Tali dimen-

sioni medie, confrontate con quelle di altri polimeri noti, mettono in evidenza relazioni significative tra proprietà configurazionali e struttura delle catene.

BIBLIOGRAFIA.

[1] In corso di pubblicazione su « Istituto Lombardo » (Rend. Sci.) *A* (1959).
[2] V. DESREUX, J. BISCHOFF, « Bull. soc. chim. Belg. », *59*, 93 (1950).
[3] G. MORAGLIO, F. DANUSSO, « Ann. chim. » (Roma), *49*, 902 (1959).
[4] F. DANUSSO, G. MORAGLIO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *25*, 509 (1958).
[5] P. J. FLORY, T. G. FOX, « J. Am. Chem. Soc. », *73*, 1904 (1951).
[6] T. G. FOX, P. J. FLORY, « J. Am. Chem. Soc. », *73*, 1909 (1951).

Chimica fisica. — *Entalpia ed entropia di fusione del polistirolo isotattico* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO e GIOVANNI MORAGLIO, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

I problemi relativi alla fusione dei polimeri cristallini hanno attualmente particolare interesse. Per questi è fondamentale la conoscenza delle variazioni alla fusione di funzioni termodinamiche primarie, quali l'entalpia e l'entropia, e la correlazione di esse con la struttura del polimero.

In una precedente Nota [1] si erano determinati i valori dell'entalpia e dell'entropia di fusione del polipropilene isotattico, polimero a macromolecole stereordinate preparato per la prima volta in tempi recenti [2].

In questa Nota si riportano i risultati di un analogo studio effettuato sul polistirolo isotattico, la cui prima preparazione è stata contemporanea a quella di polimeri stereordinati del propilene e di altre α-olefine [2]. Questi polimeri idrocarburici cristallini, di struttura relativamente semplice e derivanti da monomeri vinilici dotati di un unico sostituente, si prestano all'individuazione di relazioni tra proprietà e struttura. Essi sono anche a tutto oggi praticamente gli unici polimeri di tipo polivinilico di cui siano state studiate quantitativamente le variazioni delle funzioni termodinamiche alla fusione.

Per la determinazione dell'entalpia di fusione ΔH_u, riferita ad una mole di unità monomerica concatenata (cioè anche, in questo caso, di unità strutturale ripetentesi), si è utilizzato il metodo della misura degli abbassamenti della temperatura di fusione del polimero in presenza di quantità variabili di diluenti. Mediante applicazione della teoria termodinamico-statistica delle proprietà di miscele non altamente diluite di polimero e solvente, si può risalire al valore di ΔH_u mediante la risoluzione (per lo più grafica) dell'equazione [3]:

$$\left(\frac{1}{T_m}-\frac{1}{T_m^\circ}\right)\cdot\frac{1}{v_1}=\frac{R}{\Delta H_u}\,\frac{V_u}{V_1}\left(1-\frac{BV_1}{R}\,\frac{v_1}{T_m}\right) \tag{1}$$

in cui: T_m° e T_m sono le temperature assolute di fusione del polimero rispettivamente allo stato puro ed in presenza della frazione in volume v_1 di diluente; V_1 e V_u sono i volumi molari del diluente e dell'unità monomerica costituente il polimero; R è la costante dei gas e B è un coefficiente dell'interazione energetica polimero-diluente.

È interessante osservare che questo metodo, derivante da un'estensione ai polimeri di quello crioscopico, è da ritenere attualmente ancora il più attendibile, non essendo soggetto a critiche o riserve che invece possono sorgere con metodi calorimetrici diretti. L'attendibilità del metodo implica,

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

nell'impiego della (1), l'attendibilità delle misure di temperatura di fusione, non solo del polimero puro, ma anche delle miscele di esso con varie proporzioni di solvente. Per questo, il metodo sperimentale dimostratosi più sicuro è la determinazione della curva dilatometrica del polimero, o della miscela, nell'intervallo di fusione.

La superiorità del metodo dilatometrico rispetto ad altri, come la misura di T_m con microscopio polarizzatore a tavolino riscaldante, è già stata riconosciuta [4] e sarà dimostrata quantitativamente anche in questo lavoro.

Le misure sono state effettuate utilizzando un campione di polistirolo isotattico, preparato con catalizzatore ottenuto per reazione tra Al $(i—C_4H_9)_3$ e $TiCl_3$ secondo tecniche note [2]. Esso è stato accuratamente lavato con metiletilchetone, onde eliminare anche piccole quantità di polimero atattico eventualmente in esso contenute.

TABELLA I.

Calcolo dei valori di grandezza utili alla valutazione di ΔH_u (*).

(A, B e C: miscele con benzofenone, benzilbenzoato, dibutilftalato. Densità del polistirolo d_2 e dei solventi d_1, alla temperatura t_m, interpolata da dati sperimentali).

Miscele	t_m (°C)	w_2	$\frac{1}{T_m} \cdot 10^3$	d_1	d_2	v_1
A 1	224	0,849	2,012	0,943	0,956	0,153
A 2	209	0,750	2,075	0,955	0,966	0,253
A 3	198	0,650	2,123	0,964	0,973	0,352
A 4	178,5	0,550	2,215	0,980	0,986	0,452
A 5	177,5	0,449	2,220	0,981	0,986	0,552
B 1	220,5	0,843	2,026	0,956	0,958	0,157
B 2	212	0,751	2,062	0,964	0,964	0,249
B 3	201,5	0,646	2,108	0,972	0,971	0,353
B 4	189	0,545	2,164	0,982	0,979	0,454
B 5	182	0,452	2,198	0,988	0,984	0,547
B 6	175	0,348	2,232	0,994	0,988	0,650
C 1	226	0,851	2,004	0,879	0,954	0,160
C 4	206	0,548	2,088	0,895	0,968	0,471
C 5	199,5	0,453	2,116	0,900	0,972	0,565
C 6	194	0,351	2,141	0,905	0,976	0,666
polistirolo	240	1,000	1,949	—	0,945	0

(*) A 240°C la densità dei diluenti benzofenone, benzilbenzoato e dibutilftalato (con i quali sono state preparate le tre serie di miscele denominate A, B e C) sono risultate rispettivamente 0,930; 0,941 e 0,867.

I diluenti impiegati per le miscele sono stati ottenuti per ripetuta distillazione a pressione ridotta di prodotti puri del commercio. Di essi si sono determinate le densità a varie temperature mediante dilatometro a capillare.

Quantità pesate di polimero e di diluenti sono state introdotte in fiale di vetro Pirex, che, previo raffreddamento del bulbo contenente i costituenti la miscela in bagno di metanolo e ghiaccio secco, sono state saldate sotto vuoto. Le fiale così preparate, introdotte in stufa ad aria alla temperatura iniziale di 120°C, sono state gradualmente portate, nel corso di 24 ore, a 200°. Successivamente la temperatura è stata portata e mantenuta per 24 ore a 225° e infine a 245° per altre 12 ore.

Dalle fiale, raffreddate lentamente, si sono poi estratte le miscele, che sono state introdotte in bulbi di dilatometri a riempimento di mercurio, come già descritto in precedenza [1] [5], e lasciate cristallizzare ad opportune temperature in bagno termostatico ad olio minerale.

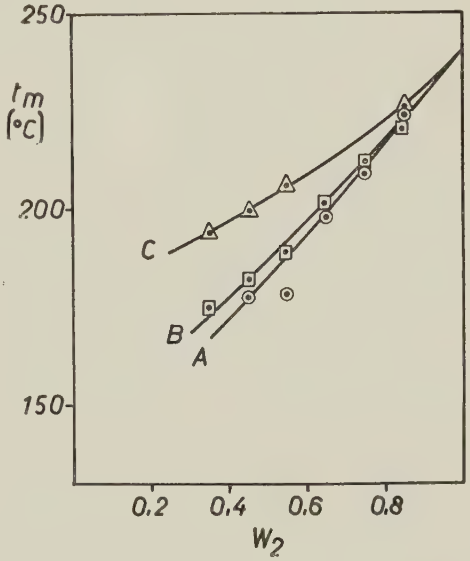


Fig. 1. – Temperatura di fusione in funzione della frazione in peso di polimero in miscela con diluenti:

A) miscele con benzofenone;
B) con benzilbenzoato;
C) con dibutilftalato.

Un campione di polimero puro, adatto a misure dilatometriche, è stato preparato introducendo qualche grammo dello stesso polimero utilizzato per le miscele in una fiala. Questa, saldata sotto vuoto e tenuta in stufa a 245° per due giorni, ha permesso la preparazione di un campione privo di bolle, che, ridotto in piccoli pezzi e introdotto nel bulbo di un dilatometro a mercurio, è stato cristallizzato con permanenza di 40 ore in bagno termostatico a 180°.

Col polimero e con le miscele non si sono effettuate misure assolute di densità: le temperature di fusione sono state determinate semplicemente dalle discontinuità nelle curve del livello di mercurio nel capillare in funzione della temperatura. Le densità del polistirolo allo stato amorfo alle varie temperature, necessarie per i calcoli, sono state dedotte da un precedente lavoro sperimentale [6] [5].

I bulbi dei dilatometri erano immersi in bagno ad olio, termostatato entro 0,1–0,2°C. Le temperature di questo venivano progressivamente elevate di 2–3°C ogni 24 ore. I livelli nei capillari sono stati letti con catetometro.

Altre misure di temperatura di fusione, a cui si accenna nel testo, sono state effettuate con microscopio polarizzatore Leitz a tavolino riscaldante, osservando a Nicols incrociati campioni di polimero o di miscela pressati a caldo tra due vetrini, lasciati cristallizzare e successivamente riscaldati con velocità che negli ultimi 20°, prima della fusione, non superavano 0,1–

0,4° C/min. La temperatura di fusione terminale era rilevata dall'estinzione della luce trasmessa per birifrangenza.

Il polistirolo usato in questo lavoro aveva peso molecolare medio viscosimetrico di circa $1{,}8 \cdot 10^6$.

In una serie di misure preliminari si sono determinati i punti di fusione di alcuni campioni di polimero ricuperati mediante ripetute estrazioni con acetone, da miscele con diluenti, trattate termicamente come sopra descritto: non si è osservata alcuna influenza da degradazione sui valori così ottenuti. D'altra parte determinazioni in questo laboratorio su frazioni di polistirolo di piuttosto basso peso molecolare hanno dimostrato che depressioni misurabili del punto di fusione, dovute ad influenza dei gruppi terminali, si riscontrano soltanto con pesi molecolari inferiori a $1 \cdot 10^5$.

Nella Tabella I sono riportati tutti i risultati sperimentali diretti o indiretti che interessano la determinazione di ΔH_u. In fig. 1 vi sono i diagrammi di stato dei sistemi polistirolo–diluente, quali risultano dai nostri dati sperimentali di T°_m e T_m. In fig. 2 vi è invece la diagrammazione che consente la risoluzione grafica della (1), per ognuno dei tre diluenti usati, mediante estrapolazione rettilinea allo zero delle ascisse. Da essa si ottengono, coi tre diluenti, valori praticamente coincidenti di ΔH_u.

Tenendo conto della dispersione dei dati di ogni serie e stimando l'attendibilità di singole determinazioni, si può concludere per il seguente valore più probabile dell'entalpia di fusione:

$$\boxed{\Delta H_u = 2.150 \pm 100 \text{ cal/unità}}$$

Essendo nota la temperatura assoluta di fusione del polimero puro, si ottiene anche, di conseguenza:

$$\boxed{\Delta S_u = \frac{\Delta H_u}{T^\circ_m} = 4{,}2 \pm 0{,}2 \text{ cal/°K unità}}$$

È interessante osservare che, in via preliminare, era stata da noi effettuata la determinazione di ΔH_u mediante misura delle temperature di fusione terminale con microscopio polarizzatore. I valori di T_m, pressoché coincidenti con quelli dilatometrici per il polimero puro o per miscele molto concentrate, sono risultati via via più bassi al diminuire della concentrazione. Ciò ha portato complessivamente al valore $\Delta H'_u = 1850$ cal/unità, in difetto del 14 % rispetto a quello sopra indicato, ottenuto per via dilatometrica e certamente più attendibile. Il divario non è, a fini pratici, così importante, ma esso è particolarmente limitato nel caso del polistirolo da un relativamente alto valore di V_u e basso di ΔH_u rispetto ad altri polimeri, ciò che porta a relativamente alte differenze tra le temperature di fusione del polimero puro e delle miscele (cfr. l'equazione (1)).

Interessante sarebbe un confronto dei valori ora trovati per il polistirolo, con quelli finora determinati per altri polimeri. È però noto che attualmente una discussione completa sull'argomento non è ancora possibile. Ci limiteremo perciò soltanto ad alcuni confronti più significativi tra i risultati finora ottenuti su polimeri di tipo vinilico, rinviando per alcuni altri confronti d'interesse al precedente citato lavoro [1], o ad altre fonti [7].

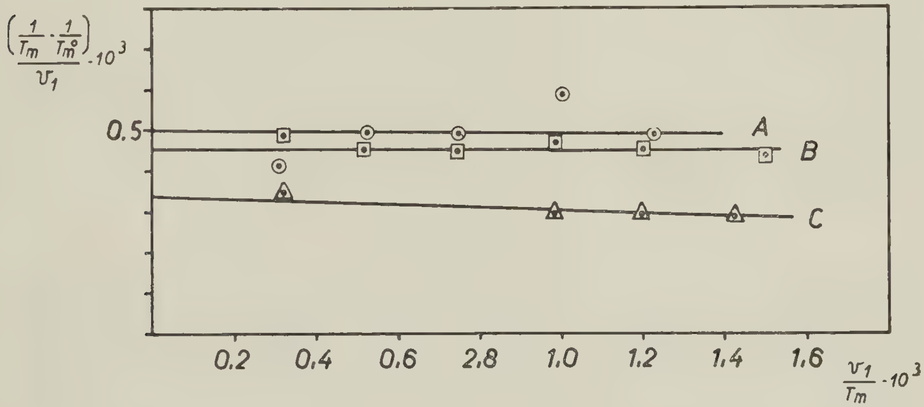


Fig. 2. – Diagrammazione secondo la (1) dei dati di Tabella I, per i tre solventi:

A) benzofenone;
B) benzilbenzoato;
C) dibutilftalato.

Nella Tabella II si confrontano i dati relativi a polietilene altamente lineare ed a polipropilene e polistirolo isotattici.

Si notano, per questi tre polimeri, assai diverse temperature di fusione e piuttosto differenti valori di ΔH_u. Considerando però i calori di fusione riferiti al grammo, si nota anche che il polistirolo presenta un valore notevolmente basso, solo un terzo di quello, praticamente comune, del polietilene e del polipropilene.

TABELLA II.

Entalpie, entropie e temperature di fusione di polimeri di tipo vinilico.

Polimero	t_m° (°C)	ΔH_u (cal/unità)	ΔH (cal/g)	ΔS_u	ΔS_u^v	ΔS_u^c
				(cal/°K unità)		
Polietilene [8] (a)	138	1.820	65	4,4	1,0	3,4
Polipropilene (isotattico) [1] .	176	2.600	62	5,8		
Polistirolo (isotattico) . . .	240	2.150	21	4,2	2,0	2,2

(a) Valori riferiti all'unità $—CH_2—CH_2—$.

Particolarmente significativo è il confronto delle entropie di fusione ΔS_u, per la loro connessione con le differenze di possibilità configurazionali delle macromolecole tra stato solido e fuso.

Il polistirolo ha un valore piuttosto basso di ΔS_u, se paragonato ad altri polimeri. Per un più esatto confronto tra strutture diverse è però utile, scomporre ΔS_u in due termini [9]:

$$\Delta S_u = \Delta S_u^v + \Delta S_u^c \tag{2}$$

dei quali il primo è connesso alla pura variazione del volume molecolare alla fusione ed il secondo è da presumere sia sostanzialmente dipendente dalla variazione delle libertà configurazionali delle macromolecole.

Il calcolo di ΔS_u^v può esser fatto in base alla relazione:

$$\Delta S_u^v = -\frac{\alpha}{\beta} \Delta V_u \tag{3}$$

nella quale α e β sono rispettivamente i coefficienti di dilatazione termica e di compressibilità isoterma del solido, o del liquido, alla temperatura di fusione e ΔV_u è la variazione del volume dell'unità strutturale nella fusione. Il calcolo è possibile per polietilene e polistirolo, utilizzando i dati di α, β e ΔV_u ricavabili in parte dai lavori [10] e [11] ed in parte dal nostro precedente lavoro [5]. Si ottengono i risultati indicati nelle due ultime colonne della Tabella II.

Da questi si deduce che il polistirolo isotattico acquista, nella fusione, possibilità configurazionali assai limitate, inferiori anche a quelle acquistate dal polietilene.

Per quanto non sia possibile a tutt'oggi la scomposizione (2) per il polipropilene, è da prevedere che il valore di ΔS_u^c per questo polimero sia comunque superiore a quello degli altri due. Se questo fatto è da collegare ad un contributo positivo del sostituente metilico [1], il basso valore di ΔS_u^c del polistirolo è da imputare ad un'influenza inequivocabilmente negativa del sostituente fenilico, probabilmente per l'irrigidimento che esso induce nella catena polimerica, largamente riconosciuto anche dagli studi configurazionali in soluzione.

Conclusioni.

L'entalpia di fusione ΔH_u del polistirolo isotattico, determinata dalla misura della variazione della temperatura di fusione del polimero in presenza di diluenti con metodo dilatometrico all'equilibrio, risulta di 2.150 cal/unità strutturale ($\pm$ 100). Si osserva che, determinando le temperature di fusione con metodo ottico, anziché dilatometrico, pur procedendo con limitate velocità di riscaldamento, ma naturalmente non all'equilibrio, si ottiene un valore di ΔH_u minore del 14 % di quello, più attendibile, sopra riportato.

Il calore di fusione del polistirolo isotattico, se riferito al grammo risulta assai inferiore a quelli, praticamente uguali, del polietilene lineare o del polipropilene isotattico.

Essendo nota la temperatura di fusione del polistirolo isotattico, da ΔH_u si ricava l'entropia di fusione $\Delta S_u = 4{,}2$ cal/°K unità ($\pm$ 0,2).

Da questa, applicando correzioni per la variazione di volume alla fusione e mediante opportuni confronti con altri polimeri, si deduce che il polistirolo isotattico acquista nella fusione molto limitate possibilità configurazionali, verosimilmente da collegare, almeno in parte, alla piuttosto elevata rigidità delle sue catene macromolecolari.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. DANUSSO, G. MORAGLIO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *25*, 520 (1958).

[2] G. NATTA, « Atti Accad. Naz. Lincei », Mem., *8*, 4 (1955); G. NATTA ed altri, « J. Am. Chem. Soc. », *77*, 1708 (1955); per il polistirolo isotattico ved. anche: G. NATTA, F. DANUSSO, « Chimica Industria », *40*, 445 (1958).

[3] Ved. ad esempio: P. J. FLORY, *Principles of Polymer Chemistry*, Cornell University Press, Ithaca, New York (1953).

[4] P. J. FLORY, L. MANDELKERN, H. K. HALL, « J. Am. Chem. Soc. », *73*, 2532 (1951).

[5] F. DANUSSO ed altri, « Chimica Industria », *41*, 748 (1959).

[6] G. NATTA, F. DANUSSO, G. MORAGLIO, « Makromol. Chemie », *28*, 166 (1958).

[7] Ved. esempio: L. MANDELKERN, « Chem. Rev. », *56*, 903 (1956), od anche loc. cit [3].

[8] F. A. QUINN, L. MANDELKERN, « J. Am. Chem. Soc. », *80*, 3178 (1958).

[9] Ved. ad esempio: L. MANDELKERN, F. A. QUINN, D. E. ROBERTS, « J. Am. Chem. Soc. », *78*, 926 (1956).

[10] S. MATSUOKA, B. MAXWELL, « J. Polymer Sci. », *32*, 131 (1958).

[11] W. PARKS, R. B. RICHARDS, « Trans. Faraday Soc. », *45*, 203 (1949).

Chimica. — *Sulla composizione della polvere radioattiva caduta su Roma con la pioggia del 23-4-1958* (*). Nota di Giulio Alberti, Carlo Bettinali, Salvatore Santoli e Franco Salvetti, presentata (**) dal Socio V. Caglioti.

Il 23 aprile 1958, su Roma e dintorni, cadeva, con la pioggia, una polvere di color grigio rossastro, che misurata al contatore di Geiger a finestra di mica, mostrava una discreta attività (1700 imp/min/grammo di polvere).

All'esame ai raggi X, la polvere appariva costituita essenzialmente da silice, calcite, ossido di ferro, argilla e probabilmente albite. Da notare che una polvere avente analoghe caratteristiche cadde in Giappone nel 1955 [1].

Allo scopo di determinare i radioelementi in essa contenuti sono state eseguite varie prove che riportiamo qui di seguito.

Tipo di radioattività.

Abbiamo determinato la curva di assorbimento (fig. 1) e di decadimento della radioattività della polvere (fig. 2).

La polvere misurata allo scintillatore α non dava alcuna attività: con ciò si poteva escludere che la sua radioattività fosse dovuta a radioelementi delle serie naturali.

Analisi radiochimiche eseguite.

1. *Prove di lisciviazione.* – I prodotti radioattivi non erano apprezzabilmente lisciviati neppure con soluzioni concentrate di acidi e di alcali.

Per la ricerca e determinazione dei radioelementi contenuti si è dovuto disgregare la polvere per fusione alcalina: la silice, sulla quale rimaneva adsorbita una discreta attività, veniva eliminata mediante trattamento con acido fluoridrico.

2. *Ricerca dello stronzio e del bario.* – La ricerca dello stronzio è stata effettuata con due metodi diversi [2, 3].

L'attività dovuta allo stronzio è risultata circa il 3 °/₀ dell'attività totale della polvere alla data del 1° giugno 1958. Dalla curva di decadimento, seguita per tre mesi, risulta che la maggior parte di questa attività è dovuta allo Sr^{89} ($t_{1/2} = 53$ giorni).

Parallelamente alla determinazione dello stronzio è stata eseguita quella del bario col metodo descritto da Glendenin [3].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale ed Inorganica, Laboratorio Chimico della Divisione Geomineraria del C.N.R.N., Roma.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

L'attività dovuta al bario è circa il 6 °/₀ dell'attività della polvere alla data del 2 giugno 1958.

3. *Ricerca del tellurio.* – Dato che il $t_{1/2}$ del Te^{132} è di 78 ore, si è subito ricercato tale elemento. La ricerca è stata effettuata secondo il procedimento consigliato da Novey [4] ed il trascinatore isotopico è stato preparato secondo Glendenin [5]. Non abbiamo potuto riscontrare presenza del tellurio. Con ciò si poteva escludere che il tempo trascorso dall'evento nucleare al momento della raccolta della polvere fosse inferiore a 10 giorni.

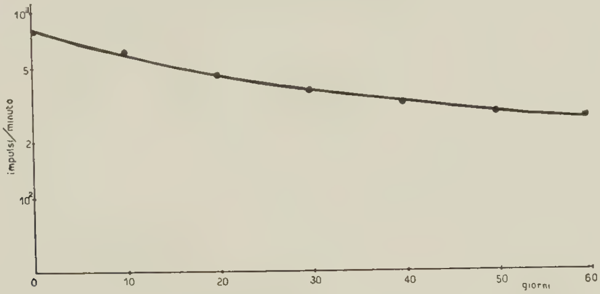


Fig. 1.

4. *Ricerca del rutenio.* – Per la ricerca del rutenio abbiamo impiegato il metodo descritto dal Glendenin [6] opportunamente modificato per adattarlo alle nostre esigenze. Alla data del 10 giugno 1958 l'attività del rutenio costituiva il 5 °/₀ dell'attività totale della polvere.

5. *Ricerca del cerio.* – Tale ricerca è stata eseguita sia con metodi classici di precipitazione [7] sia mediante estrazione con esone [8].

Il secondo metodo è altamente selettivo per la separazione del cerio dalle terre rare. Abbiamo riscontrato che l'attività dovuta agli isotopi del cerio era il 23 °/₀ dell'attività totale alla data del 10 giugno 1958. L'attività totale del cerio separato è decaduta del 37 °/₀ in 33 giorni. Ciò indica che al momento della separazione del cerio, era ancora presente il Ce^{141} ($t_{1/2} =$ $= 30$ giorni).

Inoltre mediante prove di assorbimento abbiamo potuto confermare la presenza della componente β forte dovuta al Ce^{144} in equilibrio con Pr^{144} (β da 3,1 Mev).

6. *Ricerca dello zirconio.* – La ricerca degli isotopi radioattivi di tale elemento è stata fatta col metodo dell'ossalato [9].

L'attività del precipitato di zirconio corrispondeva ad 11,4 °/₀ circa dell'attività totale alla data del 12 giugno 1958.

7. *Ricerca dell'ittrio.* – La ricerca dell'ittrio è stata eseguita secondo Dillard e coll. [10]. L'attività del precipitato dell'ittrio corrispondeva al 10 °/₀

circa dell'attività totale alla data 27 giugno 1958. Il decadimento di tale preparato indica che questa attività è dovuta essenzialmente alla presenza di Y^{91}.

8. *Totale terre rare.* – Le terre rare possono essere estratte quantitativamente da soluzioni nitriche salate con nitrato di alluminio usando TBP al 100 %.

Applicando il procedimento descritto da Scargill e coll. [11], abbiamo trovato che l'attività dovuta a tutte le terre rare costituiva il 50 % dell'attività della polvere alla data del 28 giugno 1958.

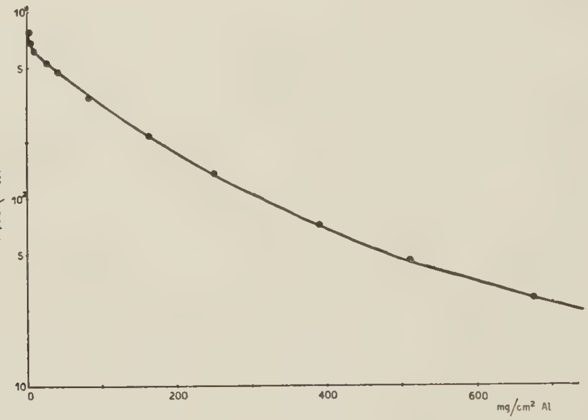


Fig. – 2.

9. *Datazione della radioattività della polvere.* – In fig. 2 è riportata la curva del decadimento della radioattività della polvere. I dati numerici sperimentali di tale decadimento sono stati analizzati con una calcolatrice elettronica dell'IBM [1].

Da tale analisi è risultato che la radioattività della polvere decade secondo la nota relazione che dà il decadimento globale dei prodotti di fissione: $A_t = A_1 t^{-m}$ dove A_1 è l'attività iniziale ($t = 1$) ed A_t è l'attività dopo il tempo t; m è un coefficiente uguale ad 1,2 qualora i prodotti di fissione giungano ben miscelati, ma che in pratica può variare fra 0,8 ed 1,8 per i frazionamenti subiti dal momento della formazione al momento della raccolta della polvere [12]. Nel caso della polvere caduta su Roma tale relazione, risolta per 7 valori sperimentali di A_t ai tempi t, $t + 10$, $t + 20$, $t + 30$, $t + 40$, $t + 50$, $t + 60$, è soddisfatta per $t = 39$ giorni ed $m = 1,36$.

In Tabella I vengono riportati i risultati ottenuti dall'analisi radiochimica della polvere. Dato che le analisi sono state eseguite qualche tempo dopo la raccolta della polvere, i risultati sono stati corretti, tenendo conto del tempo di dimezzamento dei radioelementi analizzati, per poter avere

(1) Ringraziamo vivamente la Società IBM per i calcoli che ci ha gentilmente eseguiti.

la composizione percentuale al giorno della caduta della polvere. Tale composizione corrisponde a quella che si avrebbe circa 35–45 giorni dopo una esplosione nucleare. Si può notare che l'accordo fra l'età calcolata dal decadimento radioattivo e quella calcolata dalla composizione percentuale della polvere è abbastanza soddisfacente.

TABELLA I.

Isotopo	Percento attività al 23 aprile 1958
Te^{132}	assente
Sr^{89}	2,7
Ba^{140}	7,2
Ru^{103}	5,2
Ce^{141}	14,2
Ce^{144}	3,4
Zr^{95}	7,4
Y^{91}	6,2
Totale terre rare	48,0

CONCLUSIONI.

Dalla curva di decadimento della radioattività della polvere e dalla composizione percentuale dei radioelementi presenti, ottenuta mediante analisi radiochimiche, si è potuto confermare che la radioattività della polvere è dovuta a prodotti di fissione nucleare. Da tali dati sperimentali risulta che la polvere è caduta su Roma circa 39 giorni dopo la sua formazione da un'esplosione nucleare.

BIBLIOGRAFIA.

[1] YASNO MIYAKÉ, *La Radioactivité dans l'eau de pluie et dans l'air: observation faites sur Japon en 1954–55.* Atti conf. intern. di Ginevra, P/1055 (1955).

[2] E. A. MARTELL, « The Chicago Sunshine method », *Absolute assay of* Sr^{90} *in biological materials, soils, waters, and air filters.* May, 1956, The E. Fermi institute for nuclear studies, Chicago University.

[3] L. E. GLENDENIN, Paper 236 del testo *Radiochemical studies: the fission products.* Book 3, edito da Coryell e Sugarman, della National Nuclear Energy Series (1951).

[4] T. B. NOVEY, Paper 273, *Ibid.*

[5] L. E. GLENDENIN, Paper 274, *Ibid.*

[6] L. E. GLENDENIN, Paper 260 e 261, *Ibid.*

[7] R. P. SCHUMAN, Paper 293 op. citata di CORYELL e SUGARMAN.

[8] H. FREISER, *Organic solvents in inorganic analysis.*

[9] E. P. STEINBERG, Paper 243 op. citata di CORYELL e SUGARMAN.

[10] DILLARD, ADAMS et al., Paper 2290 op. citata di CORYELL e SUGARMAN.

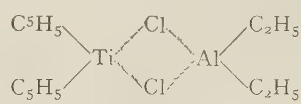
[11] SCARGIL et al., « J. Inorg. Nucl. Chem. », *4*, 304 (1957).

[12] MERRIL EISENBUD, *Reactor operational problems*, vol. II, p. 52, edito da J. Hughes e altri.

Chimica. — *Azione delle ammine terziarie sul complesso* $(C_5H_5)_2TiClAl_2(C_2H_5)_2$ (*). Nota di Piero Pino, Giorgio Mazzanti, Umberto Giannini e Sebastiano Cesca, presentata (**) dal Socio G. Natta.

In precedenti comunicazioni [1] [2] era stata descritta la sintesi di una serie di complessi del tipo $(C_5H_5)_2TiCl_2AlX_2$ ($X = Cl$, $—C_2H_5$) ed era stata studiata la struttura cristallina del complesso $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$.

In base ai dati roentgenografici [3] era stata confermata la formula (I) da noi assegnata a tale complesso

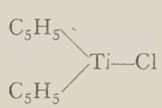


(I)

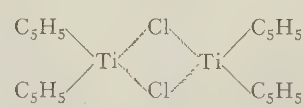
Tale struttura è stata ora dimostrata per via chimica mediante demolizione del complesso (I) con trimetilammina e sintesi da bis–ciclopentadienil titanio monocloruro e alluminio dietilmonocloruro.

Aggiungendo al complesso (I) in soluzione eptanica, un eccesso di trimetilammina, si ottiene un precipitato cristallino color verde azzurro non contenente azoto, mentre dal liquido, dopo evaporazione del solvente, è possibile isolare il complesso con trimetilammina dell'alluminio dietilmonocloruro $(CH_3)_3N \rightarrow AlCl(C_2H_5)_2$ avente temperatura di ebollizione 82–83° C a 0,7 mm Hg.

Il prodotto cristallino non contenente azoto risultò essere il bis–ciclopentadienil titanio monocloruro (II). Tale composto era già stato ottenuto da J. M. Birmingham e coll. per riduzione del $(C_5H_5)_2TiCl_2$ ma è stato descritto soltanto sommariamente [4]. Esso è poco solubile in benzolo a freddo ed è solubile in tetraidrofurano con formazione di soluzioni verdi. Cristallizzato da benzolo fonde a 279–281° e, per azione dell'acido cloridrico in presenza di aria, si trasforma nel ben noto bis–ciclopentadienil titanio dicloruro con altre rese.



(II)



(III)

Il peso molecolare determinato per crioscopia in benzolo (429) è assai vicino al doppio del valore calcolato per il bis–ciclopentadienil titanio monoclo-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano, con il contributo della Società Montecatini.

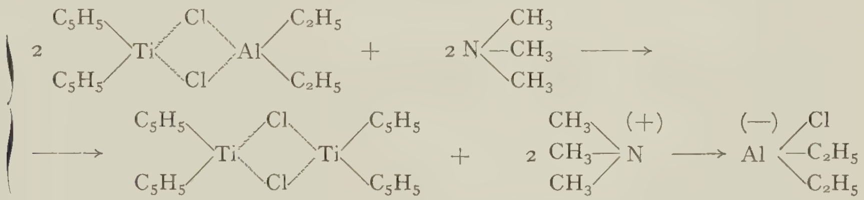
(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

ruro; inoltre, il bis–ciclopentadienil titanio monocloruro mostra allo stato solido un momento magnetico non molto diverso da 1,7 B.M. per atomo di titanio, e riteniamo pertanto che ad esso debba essere preferibilmente assegnata la forma dimera (III) avente gli atomi di titanio con numero di coordinazione 4 anziché la formula (II).

Il titanio bis–ciclopentadienil monocloruro poté essere inoltre facilmente ottenuto per azione del sodio ciclopentadienile sul titanio tricloruro sospeso in tetraidrofurano a 0° con rese, in prodotto purificato per ricristallizzazione da benzolo, intorno al 65 °/₀ .

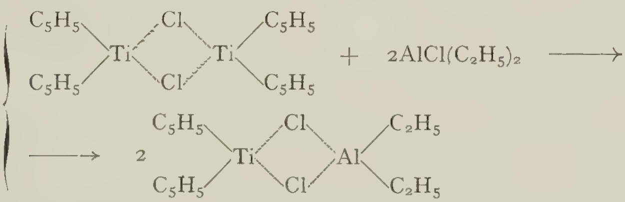
Stabilita così la struttura dei composti ottenuti, la demolizione del complesso (I) con trimetilammina può essere schematizzata come segue:

(1)



Lo studio dell'azione della trimetilammina sui complessi del tipo (I) rappresenta quindi un interessante metodo per stabilirne la costituzione. Un'ulteriore conferma della struttura del complesso (I), si è avuta infine dalla sintesi del complesso stesso dal bis–ciclopentadienil titanio monocloruro e da alluminio dietilmoncloruro, secondo lo schema

(2)



Tenuto conto della facilità con cui può essere preparato il $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ con il metodo da noi descritto, la reazione (2) rappresenta inoltre un metodo conveniente per la preparazione del complesso (I).

Analogamente i complessi aventi formula $(C_5H_5)_2TiCl_2AlClC_2H_5$ e $(C_5H_5)_2TiCl_2AlCl_2$ possono essere convenientemente preparati in modo analogo da bis–ciclopentadienil titanio monocloruro e alluminio dicloromonoetile e rispettivamente alluminio tricloruro.

Parte sperimentale.

Reazione tra $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$ *e* $N(CH_3)_3$.

In un pallone a tre colli da 250 cm³, munito di agitatore meccanico, si introduce, in atmosfera di azoto purissimo, una soluzione di 10,2 g (0,0306 moli) di $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$ in 80 cm³ di *n*–eptano.

Dopo aver raffreddato a —70° C si aggiungono lentamente 10,7 g (0,184 moli) di $N(CH_3)_3$ anidra, purificata secondo Fernelius [5].

Si aumenta gradualmente la temperatura fino a temperatura ambiente e si filtra su setto poroso la sospensione verde formatasi.

La soluzione filtrata, dopo evaporazione del *n*–eptano a pressione ridotta, lascia come residuo un liquido che viene purificato per distillazione. Si ottengono g 3,98 di un liquido incoloro, che distilla a 79–80° C a 0,55 mm Hg e che all'analisi ha fornito i seguenti risultati:

	Cl %	Al %	N % (1)
Trovato	19,73	14,86	7,48
Calcolato per $(C_2H_5)_2ClAlN(CH_3)_3$	19,86	15,00	7,78

Il solido rimasto sul setto viene ripetutamente lavato con *n*–eptano, in cui è insolubile, e quindi cristallizzato da benzolo. Si ottengono 3,78 g di prodotto cristallino verde che all'analisi ha dato i seguenti risultati

	Ti %	Cl %
Trovato	22,51	16,81
Calcolato per $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$	22,43	16,67

Preparazione del $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$.

Ad una sospensione di 20 g (0,13) moli) di $TiCl_3$ in 250 cm³ di tetraidrofurano anidro e disareato, raffreddata a 0° C, viene aggiunta, in atmosfera di azoto, goccia a goccia, la soluzione di 0,26 moli di NaC_5H_5 in 250 cm³ di tetraidrofurano e si agita quindi ancora per due ore a temperatura ambiente. Si filtra il prodotto di reazione attraverso setto poroso per eliminare il cloruro di sodio separatosi e si allontana il solvente per evaporazione a pressione ridotta. Il solido residuo viene estratto a caldo con benzolo, dal quale, per raffreddamento, si ottengono g 17,4 di prodotto cristallino verde scuro che all'analisi ha dato i seguenti risultati:

	Ti %	Cl %
Trovato	22,27	16,38
Calcolato per $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$	22,43	16,67

Determinazione del peso molecolare del $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ *per crioscopia in benzolo.*

0,1259 g di $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ sciolti in atmosfera di azoto in 16,1406 g di benzolo anidro e disareato, hanno determinato un abbassamento crioscopico di 0,094° C. corrispondente ad un peso molecolare di 429.

(1) Determinazione eseguita dosando per ritorno la quantità di acido cloridrico neutralizzato dalla trimetilammina liberata dal complesso di addizione $(C_2H_5)_2ClAlN(CH_3)_3$ previa decomposizione con NaOH al 30 %.

In una ulteriore determinazione effettuata sciogliendo g 0,1334 di $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ in 15,1370 g di benzolo, abbiamo ottenuto un abbassamento crioscopico di 0,106° C, corrispondente ad un peso molecolare di 429,8.

Determinazione delle proprietà magnetiche del $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$.

La misura di suscettività magnetica è stata condotta in fase solida col metodo di Gouy.

Il valore trovato è $\chi_M = +942 \cdot 10^{-6}$ u.c.g.s. corrispondente a 1,49. Bohr magnetoni.

Reazione tra $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ e $AlCl(C_2H_5)_2$.

In un pallone a tre colli da 150 cm³, munito di agitatore, vengono aggiunti, in atmosfera di azoto, 1,94 g (0,016 moli) di $AlCl(C_2H_5)_2$ alla sospensione di 3,42 g di $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ (0,008 moli) in 20 cm³ di *n*–eptano. Subito il solvente si colora in azzurro mentre il $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ passa lentamente in soluzione. Si scalda a 60° per circa 2 ore e si raffredda quindi a — 70° C la soluzione blu ottenuta. Precipitano cristalli aghiformi colorati in azzurro che vengono ulteriormente cristallizzati da 15 cm³ di *n*–eptano. Il prodotto cristallino ottenuto pesa g 2,21 ed ha fornito all'analisi i seguenti risultati:

	Al %	Ti %	Cl %
Trovato	7,82	14,86	21,8
Calcolato per $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$	8,07	14,33	21,22

Reazione tra $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ *e* $AlCl_2C_2H_5$.

Alla soluzione di 5,51 g (0,0129 moli) di $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ in 100 cm³ di benzolo, si aggiungono, in atmosfera di azoto, 3,27 g (0,0258 moli) di $AlCl_2C_2H_5$. Subito la soluzione si colora in azzurro.

Si scalda a 40° per due ore, dopo di che si allontana il benzolo a pressione ridotta. Cristallizzando tre volte da *n*–eptano il solido residuo, si ottengono g 5,2 di cristalli aghiformi di colore azzurro, che all'analisi hanno dato i seguenti risultati:

	Al %	Ti %	Cl %
Trovato	7,55	15,00	32,20
Calcolato per $(C_5H_5)_2TiCl_2AlCl\,C_2H_5$	7,92	14,88	31,24

Reazione tra $[(C_5H_5)_2TiCl]_2$ *e* $AlCl_3$.

In un pallone a tre colli da 150 cm³ munito di agitatore e refrigerante a ricadere, vengono introdotti in atmosfera di azoto 4,48 g (0,0105 moli) di $[(C_5H_5)_2TiCl)]_2$, 2,8 g (0,021 moli) di $AlCl_3$ e 120 cm³ di benzolo.

Scaldando all'ebolizione per 3 ore si ottiene una soluzione colorata in blu che viene fitrata su setto poroso ed evaporata a pressione ridotta.

Si riprende il residuo con 100 cm^3 di *n*–eptano; per riscaldamento alla ebollizione il solido si discioglie completamente. Raffreddando a temperatura ambiente si separano cristalli lamellari blu che vengono cristallizzati ancora due volte con 40 cm^3 di *n*–eptano. Si ottengono così g 4,98 di prodotto che all'analisi ha fornito i seguenti risultati:

	Al %	Ti %	Cl %
Trovato	7,19	13,38	40,00
Calcolato per $(C_5H_5)_2TiCl_2AlCl_2$	7,77	13,81	40,88

Bibliografia.

[1] G. Natta, P. Pino, G. Mazzanti, U. Giannini, « J. Am. Chem. Soc. », *79*, 2975 (1957).

[2] G. Natta, P. Pino, G. Mazzanti, U. Giannini, « La Ricerca Sci. », Suppl. *28* (1958).

[3] G. Natta, P. Corradini, I. W. Bassi, « J. Am. Chem. Soc. », *80*, 755 (1958).

[4] J. M. Birmingham, A. K. Fischer, G. Wilkinson, « Naturwissenschaften », *42*, 96 (1955).

[5] W. C. Fernelius, *Inorganic Syntheses*, vol. II. New York 1946, p. 159.

Geologia. – *Osservazioni sulla tettonica del fianco sinistro della Valle del Piave nel tratto tra Lozzo e Pieve di Cadore* (*). Nota di EDOARDO SEMENZA, presentata (**) dal Corrisp. P. LEONARDI.

Nel quadro degli studi geologici svolti nella Regione Dolomitica dall'Istituto Geologico dell'Università di Ferrara diretto dal prof. Piero Leonardi, ho avuto fin dal 1956 l'incarico di rilevare la zona situata sul fianco sinistro della Valle del Piave, nel tratto compreso tra Lozzo e Pieve di Cadore.

La zona presenta notevole complessità tettonica, e lo studio di essa si è rivelato assai difficile, a causa soprattutto della copertura boscosa, pressoché continua, sicché non è stato ancora completato. Oramai chiara ne è però la struttura, e ritengo perciò che sia opportuno portarne a conoscenza degli studiosi i lineamenti principali, riservandomi di trattarne più diffusamente in uno studio geologico più completo, in preparazione.

Singolare è la storia delle ricerche in questa zona, che nelle carte geologiche di Mojsisovics (1879), di Taramelli (1883) e della Ogilvie-Gordon (1934) figura come una parte marginale delle regioni che formavano l'oggetto principale dei rispettivi studi: in quelle carte la rappresentazione cartografica di questa zona è per molti aspetti completamente errata, come ha mostrato Leonardi (1940). Assai migliore dal punto di vista litologico è la carta della Zenari (1935), che però è assai manchevole per quanto riguarda l'attribuzione cronologica dei terreni, specialmente nel tratto a SW della Val Talagona. La chiave per la soluzione dei problemi geologici della zona è stata fornita soltanto da Leonardi (1940) a cui la profonda conoscenza della stratigrafia della Regione Dolomitica ha permesso di riconoscere qui la presenza di tutti i livelli del Trias, molti dei quali abbondantemente fossiliferi, e di dare un primo abbozzo del motivo tettonico dominante.

La riconosciuta notevole complessità della tettonica locale suggeriva poi a Leonardi la necessità di eseguire qui uno studio di grande dettaglio, affidato poi allo scrivente: anche da queste pagine desidero ringraziarlo sentitamente per questo, e per i consigli e l'aiuto gentilmente datimi durante lo studio e la stesura del testo.

Devo sottolineare che per lo studio della zona mi è stato di valido aiuto l'esame stereoscopico delle fotografie aeree fornite dall'EIRA. Di notevole aiuto mi è stata anche la presenza del lago artificiale di Pieve di Cadore, che si estende da Sottocastello fino a Lozzo, per il fatto che nei periodi di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico dell'Università di Ferrara con l'aiuto finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

acqua bassa le sue sponde, libere dal terreno vegetale, offrono delle ottime sezioni naturali [1].

Cenni Geografici.

Il corso del Piave nel tratto tra Lozzo e Pieve di Cadore ha un andamento pressocché rettilineo e diretto all'incirca da NE a SW. Nel Piave si gettano dal fianco sinistro numerosi affluenti, i principali dei quali sono il Crĭdola e il Talagona, provenienti rispettivamente dal Passo della Mauria e da Forcella Spé.

La zona studiata è limitata dal corso del Piave a NW, dalla Valle Anfèla a SW, e per il rimanente da una linea spezzata i cui vertici sono il M. Vedorcia, i pressi del Rifugio Padova in Val Talagona, il Colle dell'Elma, il Colle della Croce, la Sega di Lorenzago e Lorenzago.

Cenni di Stratigrafia.

Accurate descrizioni dei vari livelli affioranti nella regione cadorina sono state fatte dagli Autori precedenti, e specialmente dalla Gordon (1934) e dalla Zenari (1935); tralascio perciò di occuparmene diffusamente in questa Nota e mi limito a dare un rapido riassunto dei caratteri principali delle singole formazioni, mettendo in evidenza solamente gli elementi più interessanti emersi dallo studio della zona.

La serie dei terreni prequaternari va dalle filladi prepermiane alla Dolomia Principale del Norico.

Le filladi prepermiane, grigiastre e scarsamente quarzifere, compaiono nei dintorni di Lorenzago; ne ho potuto trovare nel corso del rilevamento due piccoli lembi mai prima segnalati nei pressi di Ponte Crĭdola; uno poco a nord del ponte, sulla scarpata messa a nudo dal lago artificiale, e uno poco ad est, sul fianco destro della Valle del Crĭdola.

Le *Arenarie di Val Gardena* del Permiano inferiore, rosso vinate e a grana medio-minuta, affiorano anch'esse nei dintorni di Lorenzago con due piccoli lembi, uno presso Ponte Crĭdola, e uno a sud di Villapiccola [2]).

La « *Formazione a Bellerophon* » comprende vari termini i più diffusi dei quali sono i calcari nerastri a vene bianche (bene affioranti in Val Talagona presso la confluenza nel Piave), i calcari marnosi e arenacei, le dolomie cariate e i gessi (molto abbondanti tra Lozzo e Lorenzago).

La facies più caratteristica del *Werfeniano* è data da arenarie finissime, spesso micacee, rossastre o giallastre, spesso con « ripple-marks »; abbastanza frequenti i banchi di calcari, più o meno impuri. Affiora in vari punti nella Valle del Rio di Valle, in Valle Prigioniera, e abbondantemente nella parte a NW della Val Talagona.

(1) Desidero inoltre ringraziare la direzione della SADE, e specialmente l'ing. Uberto Capra direttore dell'Ufficio Lavori di Tai, per l'aiuto prestatomi durante l'esecuzione del mio lavoro.

(2) Il primo di questi è già segnato, benché non esattamente, nella carta della Zenari (1935); il secondo è riportato nel F. 13 (Ampezzo) della Carta Geologica delle Tre Venezie, ma per un errore di stampa risulta formato di dolomie cariate e gessi.

L'*Anisico* continua, nella parte inferiore, la stessa facies del Werfeniano tipico: immediatamente al disotto della « Dolomia del Serla » è distinguibile un livello conglomeratico rossastro ad elementi arenacei spigolosi.

La « Dolomia del Serla », dell'Anisico medio–superiore, « livello repere » importantissimo per la comprensione della struttura della zona, consta di un banco di dolomie e calcari a spessore variabile dai 50–100 metri circa nella fascia più meridionale, ai 150–200 del banco del Monte Piduèl, ai 50–100 di nuovo della zona a NE della Val Talagona.

La parte più alta dell'Anisico è formata spesso dal « Livello a Trinodosus », molto fossilifero, arenaceo–marnoso, che ha pure molta importanza per la soluzione dei problemi geologici locali.

Esso fa di solito passaggio graduale al « *Flysch ladino–carnico* », anch'esso frequentemente fossilifero, in cui dal basso all'alto generalmente si può notare un certo passaggio da un complesso più decisamente flyscioide, ad una serie più arenaceo–tufacea.

Eteropiche col « Flysch » sono le *masse calcareo dolomitiche della parte inferiore e media del Ladinico*, che nella maggior parte della loro estensione non presentano soluzioni visibili di continuità con la « Dolomia del Serla ». Tali masse sono osservabili ad ovest dei F.li Muzze, nella parte sudorientale della Croda di Dàlego, nel M. Froppa (Romiti) e nella Valle del Crìdola.

Un banco calcareo di 50–100 metri di potenza, distinto dalle masse ora citate, si ritrova nel *Carnico* della parte a SW della Val Talagona, subito al disotto del *Raibliano* in facies tipica (marne e arenarie grossolane, rossiccie o grigiastre ad elementi varicolori). È probabile che tale banco appartenga anch'esso al Raibliano (Rossi 1959). È interessante notare che nella parte nordorientale della zona rilevata il Raibliano è contraddistinto dalla presenza di dolomie cariate.

La *Dolomia Principale* del Norico, generalmente ben stratificata, si ritrova in due affioramenti ben distinti: il primo forma la costa di Vedorcia (3), mentre il secondo compone il poderoso gruppo del Montanello e del Crìdola. Le due placche sono separate da una larga fascia detritica situata sulla destra della Valle Talagona, in cui ho rinvenuto alcuni affioramenti di arenarie e marne raibliane.

Il *Quaternario*, oltre all'abbondante detrito, comprende depositi lacustri (nei pressi di Lorenzago) e morenici, sparsi un po' dovunque, ed un importante banco di conglomerati ben cementati, attribuito dagli Autori ad una fase interglaciale.

TETTONICA.

Nella Tettonica della zona il motivo dominante è dato da una struttura a pieghe–faglie e a scaglie embriciate, simile quindi a quella delle zone circostanti, come risulta dagli studi già pubblicati e da altri eseguiti ed in corso da parte dello scrivente nella regione che va dalle Valli Zoldane alla Val Cimoliana. In questa regione, che si identifica all'incirca con il Cadore meridionale, si ha negli assi tettonici il passaggio da una direzione media N 35° E, tipica delle Prealpi venete occidentali, ad una direzione all'incirca EW, tipica delle Prealpi venete orientali.

Tale passaggio avviene mediante particolarità tettoniche la cui esistenza era già stata intuita da Leonardi (1955) e che sono dovute alla presenza delle grandi masse rigide di Dolomia Principale. Si tratta di distorsioni ed interferenze di varie linee tettoniche che mi riprometto di illustrare in una prossima pubblicazione.

Nella zona di cui tratto in questa Nota invece, le condizioni tettoniche risultano in certo senso più semplici per la presenza di materiali più plastici

(3) Questo nome è sostituito sulle carte da quello di Vedorchia.

(Permiano e Trias medio–inferiore) e per una minore curvatura impressa agli assai originari.

All'ingrosso la struttura della Valle del Piave tra Lozzo e Pieve di Cadore è caratterizzata da una anticlinale principale (*Anticlinale di M. Rite*), che provenendo dallo Zoldano passa per Calalzo e Domegge e attraversa il Piave poco a nord del Ponte Crĭdola dirigendosi poi lungo la Valle del Piova, e da una sinclinale principale (*Sinclinale di M. Zucco*), che proviene dal M. Zucco presso Tai, passa sotto il M. Piduĕl, tocca il Colle dell'Elma e il Col della Croce, oltrepassato il quale piega decisamente verso SE e poi verso est. Questa sinclinale è stata però nettamente tagliata trasversalmente dallo scorrimento della Val Talagona (*Linea di Pieve di Cadore*, vedi più sotto) che ne ha portato il troncone di ENE al di sopra di quello di WSW.

Accanto a questi elementi strutturali fondamentali ve ne sono molti altri di minore importanza, come risulta dalla seguente descrizione particolareggiata.

Andando da nord a sud si incontra dapprima la *Linea di Lorenzago* (I) [4]. Essa è situata a Nord dell'anticlinale di M. Rite, e mette a contatto i gessi permiani con le filladi. È caratterizzata dalla eliminazione delle Arenarie di Val Gardena, e data la sua inclinazione verso nord sembra avere il carattere di una faglia inversa. Ciò appare abbastanza strano dato che siamo in corrispondenza alla *giunzione cadorina*: occorre perciò pensare o ad una fase tardiva di distensione o ad un fenomeno di diapirismo dei gessi, posteriore all'erosione delle Arenarie di Val Gardena che coprivano le filladi. Lo studio della eventuale sua prosecuzione permetterebbe forse di chiarire il dubbio. Si tratta comunque probabilmente di un elemento di importanza locale.

L'*Anticlinale di M. Rite*, del cui percorso ho già parlato più sopra, nel tratto che traversa la zona studiata fa affiorare le filladi e si presenta suddivisa in due dalla *Sinclinale di Villapiccola*. È questo un elemento di interesse locale, che ho seguito dal Ponte Crĭdola fino a poco sopra la strada della Mauria, a sud di Villapiccola (Lorenzago); la sinclinale è caratterizzata da un nucleo di Arenarie di Val Gardena compreso fra due fascie di filladi.

Linea di Ponte Crĭdola (II). – Mette a contatto le filladi a nord con la « Formazione a Bellerophon » a sud. È ben visibile al Ponte Crĭdola dove giunge provenendo probabilmente dai F.li Ligonte; proseguendo verso est taglia il Rio Ramaio ad un centinaio di metri di distanza dalla sua confluenza nel Crĭdola, passando poi presso Villa « Nos vobis » (poco a nord di Villa Clarenza).

Linea di Domegge (III). – Si può riconoscere nei pressi del paese da cui prende il nome, dove è responsabile dell'esistenza della costa che culmina nel Colle Medol; traversa il Piave presso i F.li Ligonte, risale fino a Casera Coloi di Sopra e da qui scende verso il Crĭdola, sulla destra del quale non è più riconoscibile. In quest'ultimo tratto sono molto ben visibili le miloniti dovute alla sovrapposizione tettonica del Permiano al Werfen. La Zenari interpreta tale sovrapposizione come dovuta soltanto al rovesciamento dell'Anticlinale di M. Rite: penso però che un rovesciamento, innegabile nella zona compresa tra il Rio del Peròn e il T. Crĭdola, non esista invece nel tratto a SW del Rio del Peròn, dove gli strati werfeniani in giacitura normale si immergono complessivamente verso NW, e quindi sotto il Permiano di Domegge. Si tratta quindi di una piega–faglia, il cui rigetto si attenua progressivamente andando da Domegge verso il Crĭdola.

Per il rovesciamento a cui si è accennato, tra il Rio del Peròn e il Crĭdola, il Werfen è in giacitura invertita, ed ha perciò sotto di sè l'Anisico inferiore e la « Dolomia del Serla »;

(4) I numeri romani e le lettere che contraddistinguono le linee di dislocazione sono quelli usati per le tavole I e II.

la parte anteriore del fianco rovesciato della piega appare laminato, con soppressione della «Dolomia del Serla» (*Linea di Valle di Filippo* (IV)). Questo motivo tettonico interessantissimo è però puramente locale, e non se ne trova traccia al di fuori di quest'area limitata. Ciò si spiega per la presenza della giunzione che ha determinato qui il massimo rinserrarsi delle pieghe.

Questa linea termina a SW contro un'altra linea (*Lincea del Rio del Peron* (A)), che ha portato al sollevamento del M. Froppa rispetto alla zona posta a NE del Rio. Anche questa linea, corrispondente ad una faglia verticale o ad una faglia inversa fortemente inclinata verso SW, ha interesse soltanto locale.

Linea della Casera Dàlego (B). – Questa flessura stirata è caratterizzata dalla laminazione dei terreni ladino–carnici, schiacciati tra la Dolomia Principale da una parte e le masse calcareo–dolomitiche del M. Froppa e della Croda di Dàlego dall'altra. Le miloniti sono ben visibili poco a sud dei Romiti.

Dato che anche questa linea è dovuta all'innalzamento del M. Froppa e della Croda di Dàlego, si potrebbe pensare di farla continuare con la Linea del Rio del Peròn.

La zona sollevata, limitata a NE dalla Linea del Rio del Peròn, a ESE dalla Linea della Casera Dàlego, a SW dalla Linea di Pieve di Cadore e a NW dal corso del Piave, costituisce una breve anticlinale di importanza locale, che chiamerei *Anticlinale del M. Froppa*.

Linea di Pieve di Cadore (V). – Già nota nel tratto a SW del Colle Le Piazze, dove giunge da Forcella Cibiana per Valle di Cadore e Pieve, attraversa poi il Piave circa mezzo chilometro a valle del Ponte di Vallesella, passa presso il Bar Cologna, sale fino all'altopiano della Valle Giaule e discende quindi in Val Talagona raggiungendone l'alveo circa 300 metri a monte della confluenza nel Piave. In questo tratto essa corrisponde al fianco settentrionale, stirato, della Sinclinale del M. Ricco (presso Pieve) mettendo a contatto il Permiano con le dolomie anisico–ladiniche del M. Ricco prima, e poi successivamente con il « Flysch », con i calcari carnici di Làgole, ed infine di nuovo con il « Flysch ».

Raggiunto il T. Talagona passa sul fianco destro della valle, e divenendo sempre meno inclinata, sale lentamente raggiungendo la strada del Rifugio Padova presso il torrentello della Val Sesarella. In questo breve tratto il labbro settentrionale mostra un netto ripiegamento (v. profilo 6), sicché il Permiano viene ad essere sostituito ben presto dal Werfeniano e da una scaglia di Anisico (probabilmente strappatasi dal banco della Croda di Dàlego) e poi dal « Flysch » e dai calcari ladino–carnici.

Dalla Val Sesarella in poi la linea, che ha ormai i caratteri di uno scorrimento, segue praticamente il « ripiano » su cui corre la strada fino alla conca del Rifugio Padova, portando il Raibliano a sovrapporsi alla Dolomia Principale del M. Vedorcia; passa poi alla base del Collalto (Marmolat) e tocca Forcella Spè, da dove discende in Val Cimoliana presso il Rifugio Pordenone. In quest'ultimo tratto la linea corre tra due scaglie di Dolomia Principale, separate dapprima dal Raibliano e poi da una fascia spesso ben visibile di dolomia cataclastica. Notevole è il fatto che a tale linea va riferito il lembo di scorrimento che forma la Cima Spè e probabilmente alcune delle particolarità tettoniche, non ancora ben studiate, esistenti nel Gruppo Cima Sella–Picco di Roda.

Da quanto detto risulta evidente che si tratta dello stesso scorrimento descritto da Ferasin (1958) nel tratto ad oriente di Forcella Spè, relativo cioè alle Valli Cimoliana e Settimana, e che come già da lui supposto continua probabilmente verso est, forse fino alla Valle del Tagliamento.

È chiara perciò l'importanza regionale di questa linea, che continua dallo Zoldano al Tagliamento per una lunghezza di almeno 50 chilometri. Tale importanza è sottolineata dal fatto che, nel tratto che ha il carattere di una piega–faglia, i terreni a contatto rivelano un rigetto dell'ordine dei 500–1000 metri, mentre dove essa ha il carattere di uno scorrimento lo spostamento è di oltre 4 chilometri.

Sinclinale di M. Ricco. – Come ho già accennato più sopra essa proviene dal M. Ricco presso Pieve; procedendo verso NE abbassa il suo asse fino a mostrare nel nucleo i terreni raibliani, 400 metri a nord dei F.lli Barco (riccamente fossiliferi) e presso il Ponte di Talagona. Scompare poi sotto la Linea di Pieve di Cadore.

Faglia probabile dei F.li Barco (C). – Il banco di calcari carnici che forma una bella piega avente nel nucleo i terreni raibliani cui si è accennato poco sopra, deve continuare – per l'analogia litologica e di giacitura – con gli affioramenti della zona di Doere di Sotto e dei F.li Larieto. Lo sfasamento tra i banchi delle due zone (la zona a SE è spostata a sud rispetto all'altra) e la fascia pianeggiante che le divide suggeriscono però l'idea che essi siano separati da una faglia ad apparente spostamento orizzontale, un pò obliqua rispetto agli assi tettonici della zona.

Linea della Val Prigioniera e del M. Piduël (VI). – Propongo tale nome per questa linea perché dalla Val Prigioniera, dove è stata scoperta da Leonardi (1940), essa piega verso l'alto ed assume un'inclinazione debole al di sotto del M. Piduël, sicché lo aggira e scende poi, passando sopra al F.le Riva Fontane, fino al T. Talagona che raggiunge ad ESE del F.le Naial (nell'ultimo tratto essa coincide con la Linea riportata sul Foglio « Pieve di Cadore »). Da quí risale sul fianco destro, e muore raccordandosi con la Linea di Pieve di Cadore.

Essa mette a contatto dapprima il Werfeniano della Valle Prigioniera con la dolomia ladinica, poi l'Anisico del M. Piduël con il sottostante « Flysch » dei F.li Muzze, Pratello e Deslona, di Casera Tamarì e del F.le Riva Fontane.

L'attribuzione dei calcari e dolomie del M. Piduël all'Anisico è giustificata dal rinvenimento di numerosi affioramenti del livello « a Trinodosus » alla sommità del bancone calcareo-dolomitico, in condizioni stratigrafiche normali, solo in qualche caso complicate da fenomeni tettonici locali.

Linea dei Fienili Muzze (D). – Ha decorso brevissimo poiché nasce presso i F.li Muzze (probabilmente poco a nord) e muore dopo circa mezzo chilometro, contro la Linea del Rio di Valle.

Deriva dallo stiramento della scaglia dei F.li Medole e Muzze, che ha portato alla soppressione del banco di Anisico e al contatto anormale del Werfeniano con il « Flysch » ladinico.

Linea del Rio di Valle (VII). – Affiora per un percorso di poco superiore ad un chilometro e mezzo, poiché nasce presso il Bar Miralago (o forse poco più ad ovest), passa per i F.li Ceresere, sale sul fianco destro della Valle del Rio di Valle e raggiunge la Linea della Val Prigioniera e del M. Piduël poco ad WNW dei F.li Deslona.

Corre dapprima tra due masse di Werfeniano; indi mette a contatto il Werfeniano del labbro nord dapprima con l'Anisico delle paretine situate ad ovest dei F.li Pradello, in seguito con il « Flysch » del labbro sud. Nell'ultimo tratto separa la parte bassa del « Flysch » del labbro nord dalla parte alta del « Flysch » del labbro sud.

Fra questa linea e la seguente è compresa un'ulteriore scaglia formata dai terreni che vanno dal Werfeniano al « Flysch » ladino–carnico. Il Werfeniano, oltre a comparire presso il Bar Miralago, è visibile in piccoli affioramenti anche nella zona dei F.li Pradello, e presso Casera Tamarì; è probabile però che nel caso di questi affioramenti si tratti invece di Anisico inferiore, che come ho detto più sopra, ha una facies molto simile al Werfeniano. La « Dolomia del Serla » affiora quasi continuamente fin presso la sella a sud del M. Piduël, e poi presso Casera Tamarì.

A questa scaglia appartiene anche, con tutta probabilità, il lembo di « Flysch » del F.le Riva Fontane.

Linea del Piave e del M. Vedorcia (VIII). – Il decorso di questa linea che proviene dal M. Zucco, corrisponde soltanto fino poco oltre il nuovo ponte sull'Anfèla a quello finora noto; a NE del ponte è ben visibile una larga fascia di miloniti, che separa la Dolomia Principale a sud dal Werfeniano a nord. La linea segue poi praticamente sempre il Rio di Valle, staccandosene soltanto a circa 1300 m.s.m. Piega qui verso SW e poi verso sud fin quasi al Col delle Saette; ciò è dovuto al fatto che il suo piano diviene qui assai poco inclinato e corrisponde ad uno scorrimento. Dal Col delle Saette essa si dirige verso SE, giungendo a circa 400 metri dalla vetta del M. Vedorcia; piega poi verso N NE e più avanti verso nord. Scende così continuamente fino al F.le Riva Fontane dopodiché segue la mulattiera fino a raccordarsi con la Linea del M. Piduël.

In tutto questo tratto essa separa la Dolomia Principale, a sud e ad est, dai terreni werfeniani, anisici e ladino–carnici a nord e ad ovest.

Da quanto esposto risulta che questa linea ha un andamento ben diverso da quello finora conosciuto, e che giustificava il suo nome di « Linea del Piave », e anche la sua importanza ne rimane diminuita. Per non creare equivoci ritengo tuttavia opportuno che il nome del Piave le sia conservato, aggiungendovi però quello del M. Vedorcia: propongo perciò per essa il nome di « Linea del Piave e del M. Vedorcia ».

Resta inteso che la denominazione « Linea del Piave » *lato sensu* può essere conservata nel suo significato originario per indicare tutto il fascio di linee di dislocazione che partendo dallo Zoldano orientale limita a NW le grandi masse di Dolomia Principale formanti il nucleo della Sinclinale di M. Zucco, e rende così complicato il tratto della Valle del Piave compreso tra Pieve di Cadore e Lozzo.

CONCLUSIONI.

Da quanto ho esposto risulta che la zona studiata è una tipica area a pieghe–faglie e a scaglie embriciate, con corti scorrimenti. Questi elementi tettonici, quasi tutti di interesse soltanto locale, sono affiancati e in parte sovrapposti obliquamente ad altri elementi di importanza regionale e cioè all'Anticlinale del M. Rite e alla Sinclinale di M. Zucco. Soltanto una delle linee di dislocazione, la Linea di Pieve di Cadore, ha interesse regionale. Essa corrisponde nel tratto occidentale allo stiramento del fianco sudorientale dell'Anticlinale di M. Rite, mentre in Val Talagona taglia trasversalmente la Sinclinale di M. Zucco; da questo punto in poi essa diviene uno scorrimento tra due scaglie embriciate assumendo lo stile tipico delle Prealpi friulane.

La zona che rimane compresa tra la Linea di Pieve di Cadore e quella del Piave e del M. Vedorcia, è formata da una serie di scaglie embriciate che terminano a cuneo verso NE.

La zona a nord della Linea di Pieve di Cadore si presenta invece dislocata in modo più vario e in parte meno spinto, comprendendo da SW a NE una zolla sollevata ad anticlinale (A. del M. Froppa), una abbassata e ricoperta dal fianco intermedio di una piega coricata stirata, e infine una anticlinale fagliata (A. del M. Rite).

Alcuni dei nuovi elementi tettonici descritti in questa Nota continuano al di là dei limiti della zona in oggetto, e meriterebbero di essere studiati: mi riservo di farlo, potendo, in un prossimo futuro.

BIBLIOGRAFIA.

BIANCHI A. e DAL PIAZ GB. (1957). – *Centro di studio per la petrografia e la geologia. Attività svolta durante gli anni 1955–56*, « Ric. Scient. », A. 27, n° 2, Roma.

BOYER G. R. (1913). – *Etude géologique des environs de Longarone (Alpes vénitiennes)*, « Bull. Soc. Géol. Franc. », sér. IV, t. XIII.

DAINELLI G. (1921). – *La struttura delle Prealpi Friulane*, « Mem. Geogr. », Firenze.

DAL PIAZ GB. (1934). – *Studi geologici sull'Alto Adige Orientale e regioni limitrofe*, I–XII–1–242. Estr. « Monogr. Geol. petrogr. Alto Adige Orientale ». Roma.

DAL PIAZ G. (1911). – *Geologia dell'Antelao*, « Boll. R. Com. Geol. Ital. », vol. XLII, fasc. 3.

DAL PIAZ G. (1912). – *Studi Geotettonici sulle Alpi Orientali. – Regione fra il Brenta ed i dintorni del Lago di S. Croce*, « Mem. Ist. Geol. R. Univ. Padova », vol. I.

FALLOT P. (1955). – *Les dilemmes tectoniques des Alpes Orientales*, « Ann. Soc. Géol. Belg. », t. LXXVIII, Liegi.

FERASIN F. (1956). – *Geologia dei dintorni di Cimolais* (*Udine*), «Mem. Ist. Geol. e Miner. Univ. Padova », vol. XX.

FERASIN F. (1958). – *Ricerche geologiche sulle Prealpi carniche*, « Ric. Scient. », A. 28, n° 11, Roma.

FERASIN F. - *Carta geologica delle alte Valli Cimoliana, Settimana e Cellina* (inedita).

LEONARDI P. (1935). – *Il Trias inferiore delle Venezie*, «Mem. Ist. Geol. R. Univ. Padova», vol. XI.

LEONARDI P. (1935). – *Nuove osservazioni geotettoniche sulla Linea dell'Antelao e sul territorio di Cibiana nelle Dolomiti Orientali*, « Atti Ist. Ven. Sc. Lett. Art. », t. XCIV, parte II.

LEONARDI P. (1938). – *Geologia dei monti di Zoldo e territori circostanti* (*Dolomiti Orientali*), «Mem. Ist. Geol. R. Univ. Padova », vol. XII.

LEONARDI P. (1940). – *Nuove idee sulla geologia della Valle del Piave nel tratto tra Lozzo e Perarolo*, « Boll. Soc. Ven. St. Nat. », vol. II, Venezia.

LEONARDI P. (1940). – *Saggio di sintesi tettonica delle Dolomiti Orientali*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LIX, Roma.

LEONARDI P. (1943). – *Schema tettonico della Regione Dolomitica Veneto-Trentina*, «Mem. Ist. Geol. Padova ».

LEONARDI P. (1950). – *La structure des Alpes Dolomitiques*, « Revue de Géogr. de Lyon », vol. XXV.

LEONARDI P. (1955). – *Breve sintesi geologica delle Dolomiti Occidentali*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LXXIV, fasc. 1, Roma.

LEONARDI P. (1955). – *La dislocazione trasversale di Perarolo. Secondo contributo alla geologia della Valle del Piave*, « Ann. Univ. Ferrara », sez. IX, vol. I, n. 11.

LEONARDI P. (1957). – *Campagne geopaleontologiche 1954–56 dell'Istituto Geologico di Ferrara nelle Dolomiti*, « Ric. Scient. », A. 27, n° 12, Roma.

MERLA G. (1931). – *Osservazioni morfologiche e tettoniche sugli altipiani ampezzani* (*Fosses–Sennes–Fanes*), « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. XLII, Pisa.

MOJSISOVICS E. v. (1879). – *Die Dolomit-Riffe von Südtirol und Venetien*. Wien.

OGILVIE GORDON M. (1934). – *Geologie von Cortina d'Ampezzo und Cadore*, « Jahr. d. Geol. Bund. », vol. 84.

ROSSI D. (1959). – *La scogliera del Sassolungo* (*con alcune considerazioni sul Trias delle Dolomiti Occidentali*), « St. Trentini Sc. Nat. », vol. XXXVI.

TARAMELLI T. (1883). – *Note illustrative alla Carta Geologica della provincia di Belluno*. Pavia.

VARDABASSO S. (1926). – *La struttura geologica delle Alpi Venete*, « Ann. R. Sc. Ing. Padova », A. II.

ZENARI S. (1926). – *Studio geoidrologico del bacino del Cellina*, « Pubbl. R. Mag. Acque, Uff. Idrogr. », Venezia.

ZENARI S. (1929). – *Note illustrative della Carta Geologica delle Tre Venezie, Foglio Maniago*, « Sez. Geol. Uff. Idr. Magistr. Acque », Padova.

ZENARI S. (1933). – *Sulla tettonica dei dintorni di Lozzo di Cadore*, « Atti Acc. sc. Ven. Tr. Istr. », Padova.

ZENARI S. (1935). – *Intorno alle condizioni tettoniche della Valle del Piave nel tronco tra Lozzo e Pieve di Cadore*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LIV.

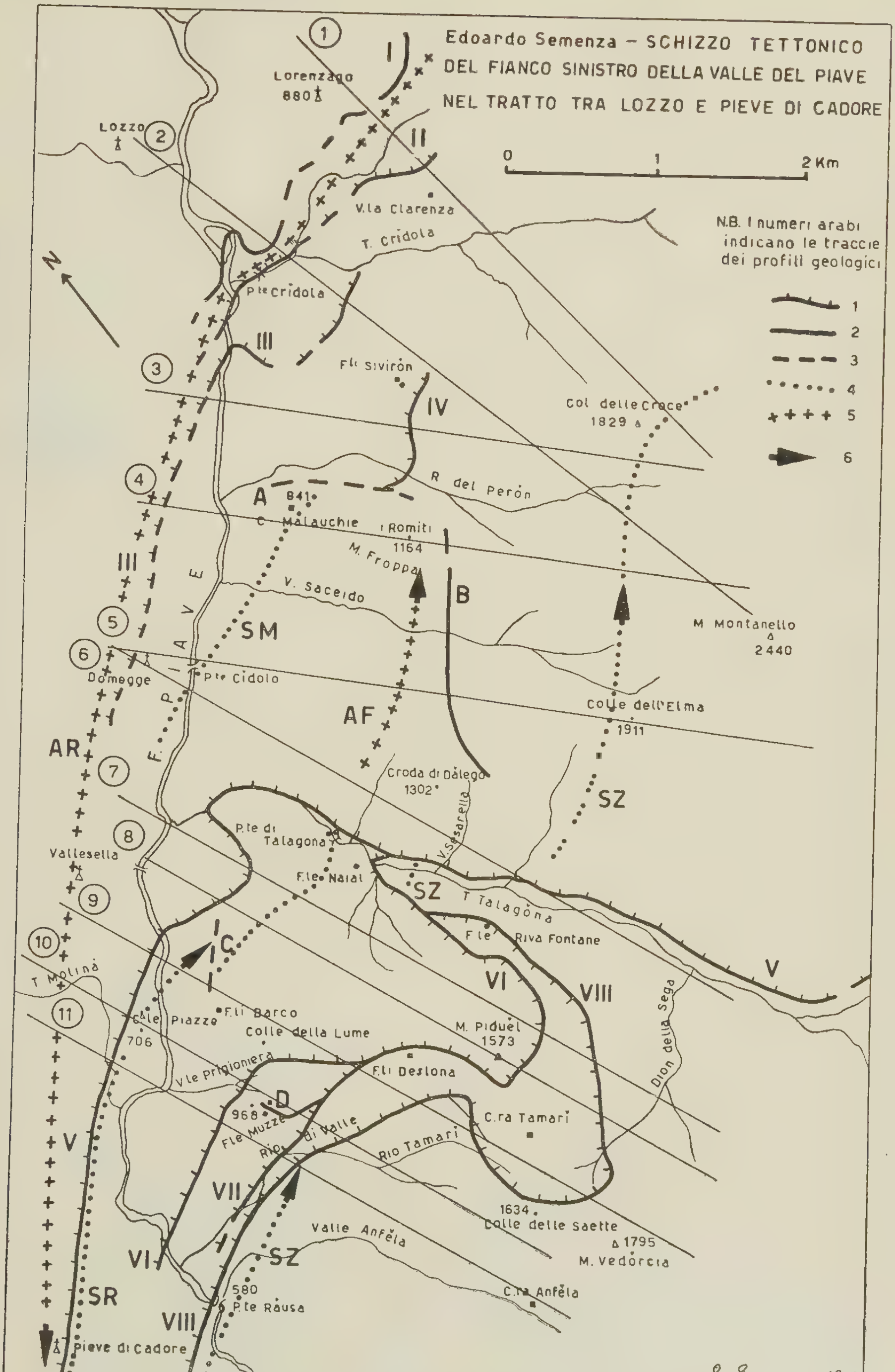
ZENARI S. (1936). – *La Valle d'Oten ed il Monte Antelao*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LV, fasc. 1.

CARTE GEOLOGICHE

(oltre a quelle contenute nei lavori citati)

FOGLIO 12. – *Pieve di Cadore* della Carta Geologica delle Tre Venezie, alla scala 1 : 100.000. « Uff. Idrogr. Mag. Acque », Padova, 1940.

FOGLIO 13. – *Ampezzo* della Carta Geologica delle Tre Venezie, alla scala 1 : 100.000. « Uff. Idrogr. Mag. Acque », Padova, 1933.



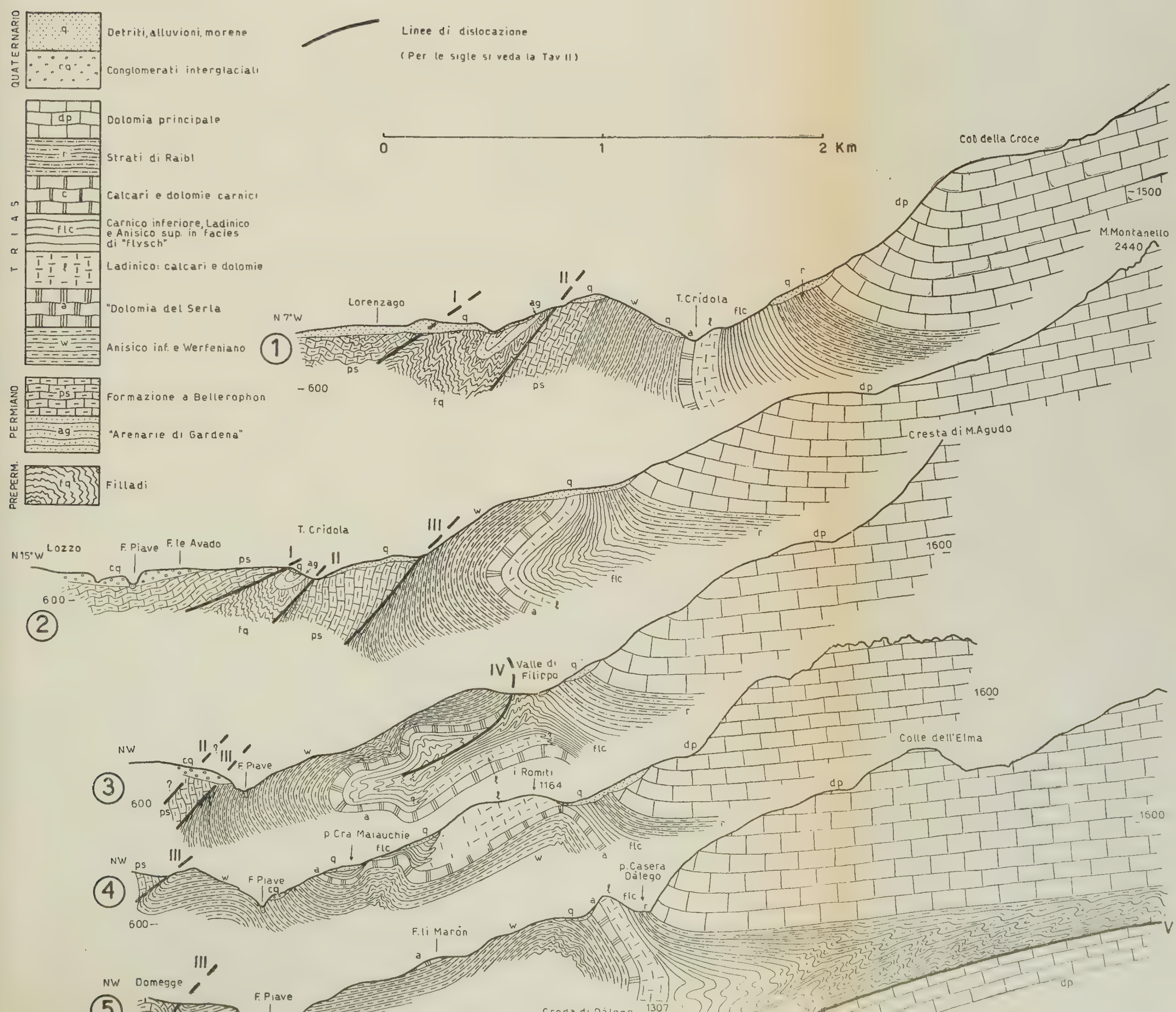
1 = Pieghe-faglie e scorrimenti; 2 = Altre linee di disclocazione; 3 = Faglie probabili; 4 = Sinclinali; 5 = Anticlinali; 6 = Verso di immersione degli assi.

I = Linea di Lorenzago; II = Linea di Ponte Crĭdola; III = Linea di Domegge; IV = Linea di Valle di Filippo; V = Linea di Pieve di Cadore; VI = Linea di Val Prigioniera e del M. Piduĕl; VII = Linea del Rio di Valle; VIII = Linea del Piave e di M. Vedorcia; A = Linea del Rio del Peròn; B = Linea della Casera Dàlego; C = Faglia probabile dei Fienili Barco; D = Linea dei Fienili Muzze. AF = Anticlinale del M. Froppa; AR = Anticlinale del M. Rite; SM = Sinclinale di Malauchie; SR = Sinclinale di M. Ricco; SZ = Sinclinale del M. Zucco.

EDOARDO SEMENZA

PROFILI GEOLOGICI

ATTRAVERSO IL FIANCO SINISTRO DELLA VALLE DEL PIAVE NEL TRATTO TRA LOZZO E PIEVE DI CADORE



Geologia. — *Prima segnalazione di Aptiano-Albiano nelle Dolomiti* (*). Nota di MARIA BIANCA CITA e DANIELE ROSSI, presentata (**) dal Corrisp. P. LEONARDI.

PREMESSA.

Nel corso di uno studio stratigrafico-micropaleontologico sul Cretaceo delle Dolomiti effettuato da geologi degli Istituti di Geologia delle Università di Milano e Ferrara, studio che rientra nel programma delle ricerche dirette dal prof. Piero Leonardi nella Regione Dolomitica sotto gli auspici del C.N.R., e rientra nello stesso tempo nel ciclo di studi sul sistema Cretaceo in Italia iniziato dal primo degli autori di questa Nota, sono venuti alla luce fatti nuovi, di notevole interesse stratigrafico, dei quali si dà qui notizia in via preliminare.

Gli affioramenti cretacei delle Dolomiti infatti, dei quali il più noto è quello del Puez a causa degli studi paleontologici di Haug [7], sono riferiti al Neocomiano superiore, con la riserva che possano estendersi in parte anche al Barremiano. Nessuna segnalazione è stata fatta finora dell'Aptiano-Albiano, mentre al Cretaceo superiore sono attribuiti i conglomerati del Monte Parei, la cui età però è stata recentemente posta in dubbio da Cita [5].

NOTIZIE SULL'AFFIORAMENTO.

L'affioramento cretaceo di La Stua-Campo Croce qui considerato è noto da tempo nella letteratura geologica (vedi [8]). Esso è indicato nel Foglio Pieve di Cadore della Carta Geologica delle Tre Venezie come il più esteso fra quello delle Dolomiti, ed è stato descritto con un certo dettaglio dal Mutschlechner nella sua monografia sulle Dolomiti di San Vigilio [9] e della Ogilvie Gordon [10]. A pag. 230 del lavoro di Mutschlechner troviamo un elenco dei fossili individuati dall'autore negli affioramenti cretacei della zona, poco noti fino ad allora dal punto di vista paleontologico. Questo elenco comprende Echini, Aptici (*A. angulicostatus* ed *A. latissimus*), Belemniti, *Pecten* e soprattutto Ammoniti: *Phylloceras infundibulum*, *P. ladinum*, *Phylloceras* sp. e inoltre i generi *Macroscaphites*, *Heteroceras*, *Hamulina*, *Haploceras*, *Crioceras*, *Scaphites*.

In un lavoro di Cita e Pasquaré [5] attualmente in corso di stampa viene preso in esame il contenuto micropaleontologico delle marne grigio-verdi e dei calcari marnosi grigio-rossastri ammonitiferi; esso è dato principalmente

(*) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

da Globigerine di tipo primitivo (*G. hoterivica* e G. *infracretacea*) e da *Nannoconus* (con le specie *N. steinmanni*, *N. kamptneri*, *N. colomi*, *N. globulus*).

Le ricerche effettuate durante l'estate 1959 da Rossi hanno messo in evidenza la presenza, al di sopra delle marne verdastre ammonitifere, di un complesso calcareo–marnoso color rosso vino con liste e noduli di selce rossa, che può essere assimilato per i suoi caratteri litologici alla ben nota facies di «Scaglia rossa».

Prima di passare alla descrizione dei caratteri micropaleontologici che ci permettono di attribuire questi strati superiori del Cretaceo di La Stua–Campo Croce all'Aptiano–Albiano, è opportuno fare un accenno alle condizioni di giacitura dell'affioramento e alla serie stratigrafica dello stesso. È questo, insieme a quello vicino di Antrouilles, sempre nella valle del Boite, il più basso fra gli affioramenti cretacei delle Dolomiti ampezzane, che sono a loro volta più bassi di quelli della Val Badia (sulla Gardenaccia e al Puez il Cretaceo si trova sempre sopra i 2500 metri) e del Sella, dove il Cretaceo affiora sui 3000 metri. Gli affioramenti di Fanes piccola, del Passo di Limo, della Varella, della Remeda Rossa, ecc., sono tutti sopra i 2000 metri e rappresentano generalmente la sommità di serie monoclinali; a La Stua invece il Cretaceo affiora sul fondovalle, a meno di 1700 metri, e si rialza poi sul versante sinistro (orientale) della valle del Boite, verso Lerosa.

Il Cretaceo di La Stua si distribuisce a nord del rif. La Stua, sulla sinistra orografica del torrente Boite; sulla destra orografica, poco lontano dal torrente, affiorano i calcari rossi del Malm zeppi di ammoniti («Rosso ammonitico»), che immergono verso E–NE con inclinazione di 40° circa.

La serie cretacea è interrotta a N–E dalla faglia di Val Salata (Mutschlechner 1932) la quale innalza il Giurese fino all'Alpe di Fosses. Tale serie è disposta a breve sinclinale, con asse di direzione all'incirca NW–SE, e raggiunge la sua massima potenza immediatamente a N–E del rif. La Stua.

Le rocce costituenti la serie sono poco compatte, quindi determinano nel rilievo delle forme assai dolci e non sono sempre ben esposte. La campionatura è stata eseguita lungo due itinerari indipendenti (riportati nella fig. 1), uno per la parte inferiore della serie ed uno per la parte superiore.

L'itinerario inferiore si svolge a mezza via tra Campo Croce e il rif. La Stua; qui il Cretaceo si immerge verso N–NE con inclinazione di 40° circa ed affiora per una potenza di una sessantina di metri. La campionatura della parte superiore si è svolta dalle alluvioni che ricoprono il fondovalle del torrente Boite, una cinquantina di metri a N–E del rif. La Stua, fino a sotto quota 1899; lungo questo itinerario la giacitura della serie è prevalentemente suborizzontale, se si eccettuano gli strati più alti che sono disposti con immersione verso ovest di circa 30°.

La serie stratigrafica riferibile al Cretaceo, che segue in concordanza ai calcari rossi nodulosi del «Rosso ammonitico» attribuito da tutti gli

autori precedenti al Giurassico superiore, può essere schematicamente riassunta come segue, dall'alto al basso:

Tetto = detrito.

11) 8 m di calcare marnoso rosso (sottilmente stratificato) a intercalazioni di selce rossa, con rare ammoniti (campioni 69 e 70);

7–8 m non affioranti;

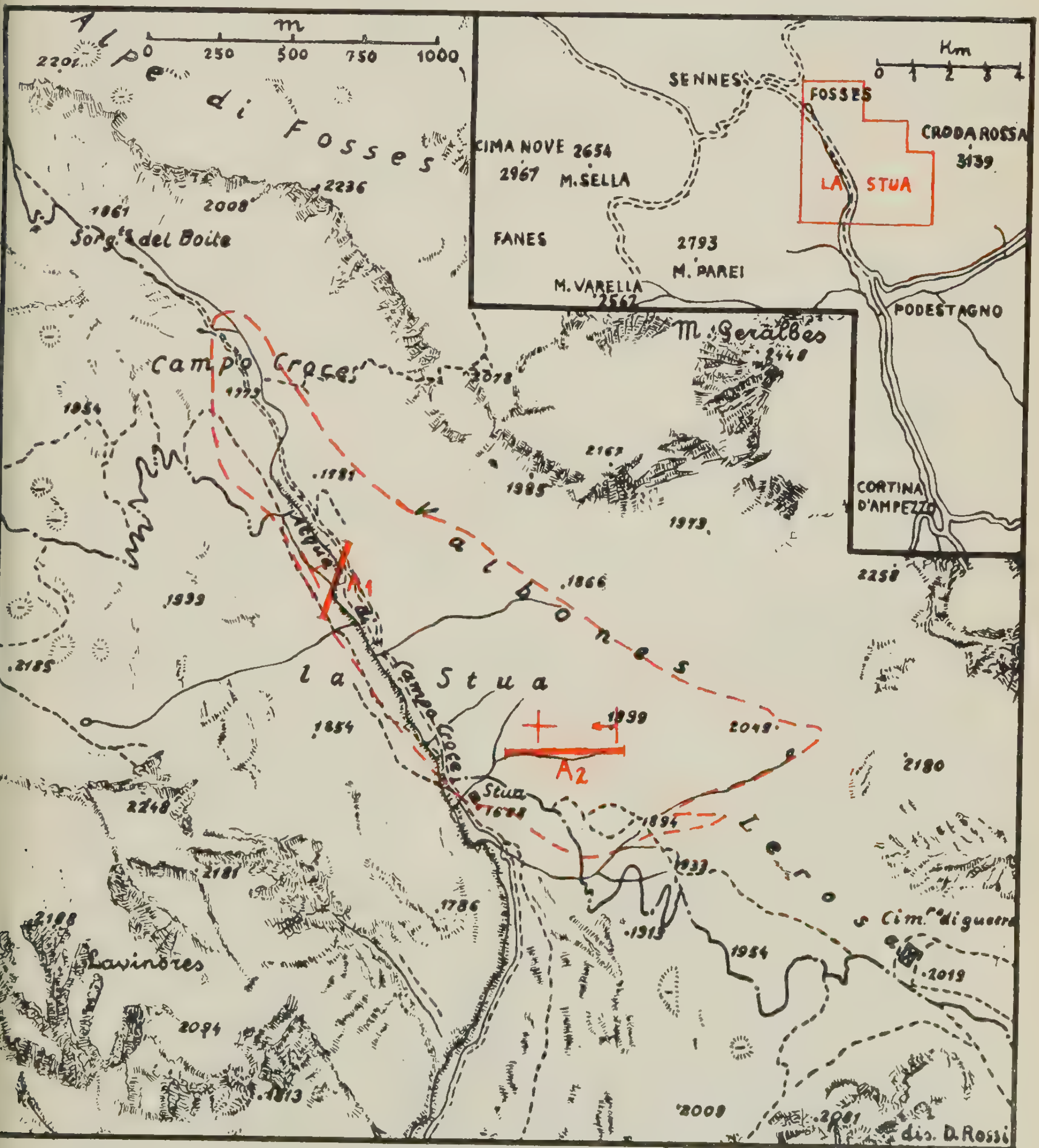


Fig. 1. – Schizzo della zona di «La Stua», ricavato dalla Tavoletta «Croda Rossa» dell'I.G.M.

n alto, a destra, sono rappresentate le Dolomiti ampezzane (la zona che compare nello schizzo è delimitata in rosso). La linea rossa tratteggiata indica il limite dell'affioramento cretaceo. A_1 e A_2 sono i due itinerari lungo i quali si è svolta la campionatura.

10) 5 m di calcare marnoso rosso con chiazze verdastre, in strati di 7–8 cm di spessore (campioni 67 e 68);

9) 8 m di calcare marnoso rosso sottilmente stratificato, talora a zonature grige, a intercalazioni di selce rossa (campioni dal 63 al 66);

8) pochi decimetri di calcare marnoso verdastro con una intercalazione di selce rossa;

7) 10 m di calcare marnoso rosso (sottilmente stratificato) a straterelli, lenti e noduli di selce rossa, con ammoniti;

6) 5 m di marne sabbiose, rosse, fogliettate;

4 m non affioranti;

5) 2 m di marne nere fogliettate;

10 m. non affioranti;

4) 55 m di marne grigio–verdi ad ammoniti, in sottilissimi strati, con intercalazioni siltose;

3) 13 m di calcari marnosi a chiazze rosse e verdastre, in strati di qualche centimetro, con aptici ed ammoniti;

2) 5 m di calcare marnoso vinato e calcare del tipo « biancone » alternati, in strati di qualche centimetro;

1) 4 m di calcare bianco, cristallino, del tipo « biancone », in strati di 4 cm;

Letto = « Rosso ammonitico ».

Al di sopra della successione descritta l'affiorare della serie si interrompe, causa l'estesa e potente copertura detritica che interessa i ripiani di Lerosa, sicché niente si può dire circa la porzione più alta del lembo cretaceo in questione.

Lo spessore complessivo del Cretaceo affiorante sarebbe quindi di circa 130 metri, dei quali una quarantina presentano facies di « Scaglia rossa ». Ricordiamo che Mutschlechner attribuiva al Cretaceo inferiore uno spessore massimo di 150–200 metri.

Per lo studio micropaleontologico sono stati presi in esame i campioni nn. 63, 64, 65, 69, 70. Il campione n. 70 rappresenta l'ultimo (il più alto) dell'intera serie.

Descrizione dei campioni.

c. 63: calcare marnoso–arenaceo compatto color rosso scuro; in sezione la roccia appare come un calcare finemente detritico, contenente minuti granuli di quarzo a spigoli più o meno arrotondati, riccamente fossilifero. Associazione a Foraminiferi con prevalenza di « Anomaline » molto abbondanti e ben sviluppate. Le sezioni subequatoriali della fig. 1, c. 63, contrassegnate dalle sigle *a* e *b*, e quelle subassiali *d* ed *e* corrispondono probabilmente ad *Anomalina lorneiana* d'Orb. Vi sono anche Globigerine (vedi fig. 2, c. 63 *f*, *g*, *h*), Radiolari e spicole di Spugne.

c. 64: calcare compatto zonato rosso e grigio, finemente arenaceo; in sezione appare come un calcare un poco detritico, ricco di Radiolari sferici, di spicole di Spugne e di Foraminiferi (prevalenti « Anomaline », vedi *a*, *b*, *d*); l'esemplare figurato alla lettera *c* sembra appartenere alla *Anomalina lorneiana* d'Orb. var. *trochoidea* Gandolfi. Vista a fortissimo

ingrandimento, la sezione rivela la presenza di alcuni esemplari di *Nannoconus*, fra i quali è stato riconosciuto il *N. truitti* Bronnimann.

c. 65: calcare marnoso color rosso vino; in sezione appare come un calcare marnoso finemente detritico con « Anomaline » (le sezioni assiali *b* e *c* potrebbero appartenere alla var. *trochoidea* di Gandolfi), qualche Globigerina, Radiolari e rare spicole di Spugne.

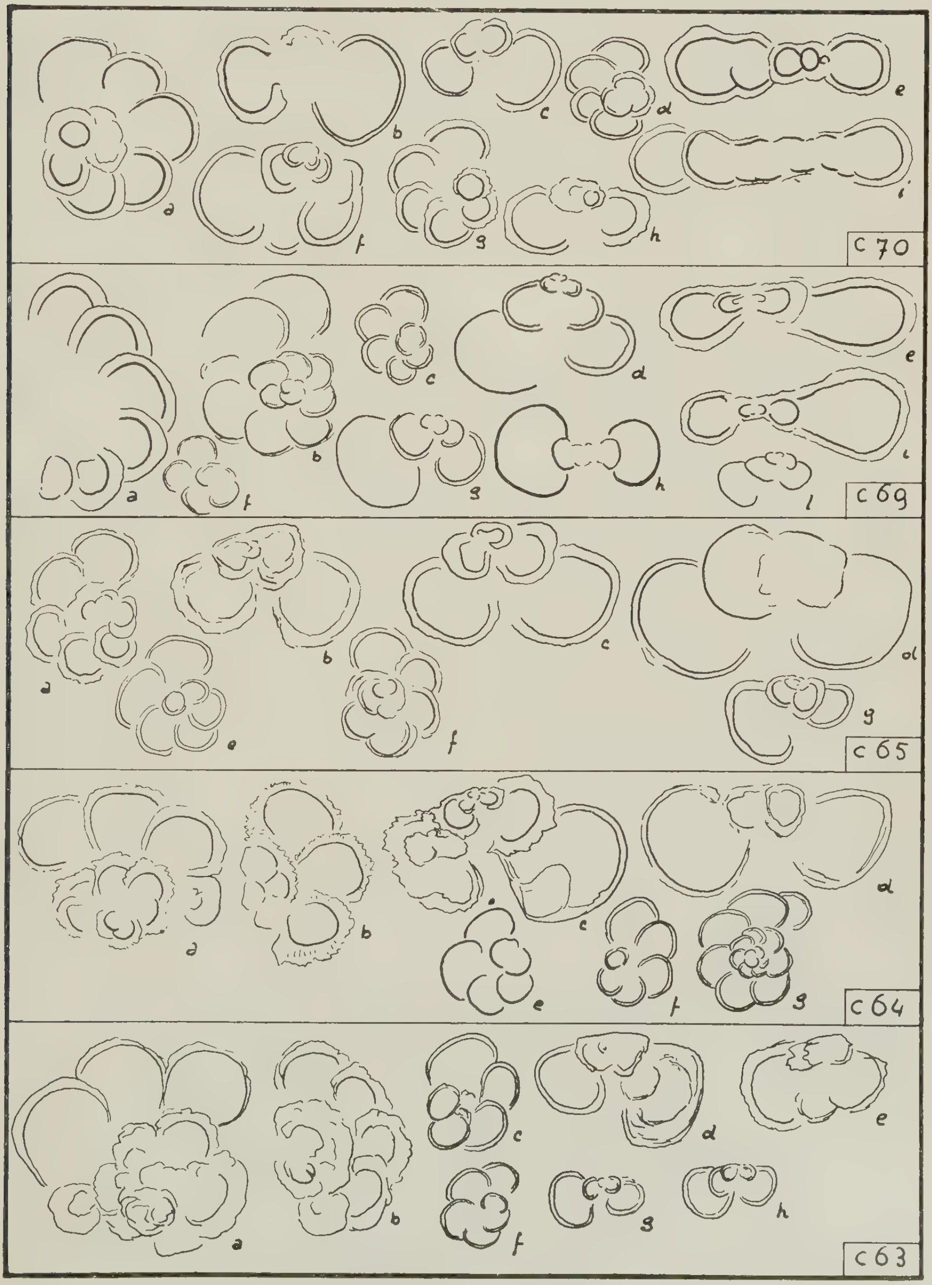


Fig. 2. – Foraminiferi contenuti nell'Aptiano-Albiano di La Stua (Dolomiti ampezzane).
Campioni 63, 64, 65, 69, 70. Per le spiegazioni, vedi nel testo. Disegni alla camera lucida eseguiti da MBC, × 90.

c. 69: calcare marnoso finemente arenaceo color rosso vino; in sezione appare come un calcare finemente detritico con abbondanti e grosse « Anomaline »; delle sezioni riprodotte nella fig. 2, relative a questo campione, quella assiale *g* è riferibile alla var. *trochoidea* e quella *h* alla *A. breggiensis* Gandolfi. Vi sono poi grandi forme appiattite, ad avvolgimento quasi planispirale, evoluto, di dubbia attribuzione (*e*, *i*), rare Globigerine (*e*, *f*, *l*) frequentissimi Radiolari sferici, frequenti spicole di Spugne.

c. 70: calcare marnoso compatto color rosso mattone carico; in sezione appare come un calcare finemente detritico, ricchissimo di « Anomaline », con Radiolari e spicole di Spugne. Delle sezioni riprodotte nella fig. 2, quella subassiale *h* e forse anche quella equatoriale *a* vengono attribuite ad *Anomalina roberti* Gandolfi, mentre la sezione assiale *f* è attribuita alla var. *trochoidea*. Le sezioni subassiali relative a forme ad avvolgimento planispirale evoluto *e* ed *i* sono di dubbia attribuzione.

Considerazioni micropaleontologiche e cronologiche.

Le « Anomaline » contenute nei campioni considerati rientrano nel gruppo di specie descritte da Gandolfi nel 1942 [6] come *Anomalina lorneiana* d'Orbigny, *A. lorneiana* var. *trochoidea* n. var., *A. roberti* n. sp. ed *A. breggiensis* n. sp. Queste specie, descritte nell'Aptiano–Albiano della serie della Breggia (« Scaglia bianca »), sono state successivamente oggetto di studi tassonomici da parte di Reichel [11], Bronnimann e Brown [2 e 3] e Sigal [12]. La loro appartenenza alla famiglia delle *Anomalinidae* è stata posta in dubbio, come pure il loro carattere di Foraminiferi bentonici. Ben tre nuovi generi sono stati istituiti basandosi su queste forme dell'Aptiano–Albiano:

Ticinella Reichel 1949 (genotipo *Anomalina roberti* Gandolfi 1942);

Biticinella Sigal 1956 (genotipo *Anomalina breggiensis* Gandolfi 1942);

Hedbergella Bronnimann e Brown 1958 (genotipo *Anomalina lorneiana* var. *trochoidea* Gandolfi).

Nella specie *Hedbergella trochoidea*, come è intesa da Bronnimann e Brown, rientra tanto la var. *trochoidea* istituita da Gandolfi, quanto la forma tipica di *A. lorneiana* nel significato datole da Gandolfi (non in quello originario, secondo d'Orbigny).

Senza entrare in dettagli circa i rapporti filogenetici di queste forme, che pure sono di grande interesse, ci limitiamo ad affermare che gli autori sopracitati sono d'accordo circa il loro significato cronologico. In tutte le località di ritrovamento esse sono sempre contenute in strati post–barremiani, riferibili complessivamente all'Aptiano–Albiano. Alcune delle specie citate, e in particolare *Ticinella roberti* e *Biticinella breggiensis*, possono raggiungere il Cenomaniano. Nel Cenomaniano però esse non sono più prevalenti nelle associazioni, come nei livelli sottostanti, ma sono accompagnate da Globotruncane carenate (gen. *Rotalipora* e *Thalmanninella*). Queste forme, ben riconoscibili in sezione sottile, mancano totalmente nei campioni esaminati.

Su questi argomenti (presenza di « Anomaline » caratteristiche dell'Aptiano–Albiano, assenza di Globotruncane di età più recente) è basato il nostro

riferimento cronologico. Questo è del resto convalidato da recenti ricerche sulle microfacies del Mesozoico condotte in altre parti d'Italia. Nella serie di S. Onofrio (Brescia) la Zanmatti [13] descrive una zona ad Anomaline coincidente con l'Aptiano–Albiano. Nella serie del Monte Baldo (Verona) e in quelle della Montagna dei Fiori e del F. Fiastrone (Marche) recentemente descritte al 5° Congresso Mondiale del Petrolio [4] viene riconosciuta una biozona ad *Anomalina lorneiana* corrispondente all'Aptiano–Albiano che ha come marker la specie citata, intesa nell'interpretazione di Gandolfi (= *Hedbergella trochoidea* Bronnimann e Brown).

L'Aptiano–Albiano riconosciuto a La Stua, oltre alle specie citate di Foraminiferi, contiene rari *Nannoconus* riferibili al *N. truitti* Bronnimann. Il tipo di questa specie proviene dall'Aptiano–Albiano di Cuba [1]. L'attribuzione cronologica ottenuta attraverso lo studio dei *Nannoconus* concorda dunque con quella raggiunta attraverso lo studio dei Foraminiferi.

In base ad osservazioni micropaleontologiche è stato quindi possibile riconoscere finora, nell'affioramento cretaceo di La Stua–Campo Croce, l'Hauteriviano–Barremiano [5] ed ora l'Aptiano–Albiano.

OPERE CITATE.

[1] BRONNIMANN P., *Microfossils incertae sedis from the Upper Jurassic and Lower Cretaceous of Cuba*, «Micropal.», vol. 1, n. 1, New York 1955.

[2] BRONNIMANN P. and BROWN N. K., *Taxonomy of the Globotruncanidae*, «Ecl. Geol. Helv.», vol. 48, n. 2, Basel 1956.

[3] BRONNIMANN P. and BROWN N. K., *Hedbergella, a new name for a Cretaceous planktonic foraminiferal genus*, «Journ. Wash. Acad. Sci.», vol. 48, n. 1, Washington 1958.

[4] CITA M. B., FORTI A., RAFFI G., VILLA F., *Jurassic and Cretaceous microfacies from the Prealps and Central Apennines*, «Proc. 5° World Petr. Congr.», Sect. I, Paper 54, New York 1959.

[5] CITA M. B., PASQUARÈ G., *Osservazioni micropaleontologiche sul Cretaceo delle Dolomiti*, «Riv. Ital. Pal. Strat.», vol. 65, n. 4, Milano 1959.

[6] GANDOLFI R., *Ricerche micropaleontologiche e stratigrafiche sulla Scaglia e sul Flysch cretacici dei dintorni di Balerna (Canton Ticino)*, «Riv. Ital. Pal.», mem. IV, Milano 1942.

[7] HAUG E., *Beitrag zur Kenntniss der oberneocomen Ammonitenfauna der Puezalpe bei Corvara in Südtirol*, «Beitr. Pal. Oesterr. – Ungarns», Bd. 7, H. 3–4, Wien 1889.

[8) HOERNES R., *Neocomfundorte in der Gegend von Ampezzo und Enneberg in Südtirol*, «Verh. k. k. Geol. Reichsanst.», Wien 1876.

[9] MUTSCHLECHNER G., *Geologie der St. Vigiler Dolomiten*, «Jahrb. Geol. Bundes», Bd. 82, H. 1–2, Wien 1932.

[10] OGILVIE GORDON M. M., *Geologie von Cortina d'Ampezzo und Cadore*, «Jahrb. Geol. Bundes.», Bd. 84, H, 1–4, Wien 1934.

[11] REICHEL M., *Observations sur les Globotruncana du gisement de la Breggia (Tessin)*, «Ecl. Geol. Helv.», vol. 42, n. 2, Basel 1949.

[12] SIGAL J., *Notes micropaléontologiques nord-africaines – 4. Biticinella breggiensis (Gandolfi)*, «C.R.S. Soc. Géol. France», n. 3, Paris 1956.

[13] ZANMATTI-SCARPA C., *Studio su alcune «microfacies» del Bresciano*, «Boll. Serv. Geol. Ital.», vol. 78, n. 4–5, Roma 1956.

Fisiologia. — *Interazione tra potenziale a punta e potenziali postsinaptici evocati in motoneuroni spinali di Rana mediante due diverse vie di attivazione* (*). Nota di Ettore Fadiga (**) e John M. Brookhart, presentata (***) dal Socio G. C. Pupilli.

Fatt e Katz [1] hanno osservato che gli *spikes* ottenibili per stimolazione diretta da singole fibre del M. sartorio di Rana hanno ampiezza minore della media, quando siano evocati in fibre in cui contemporaneamente si genera un potenziale di placca. Questo particolare effetto è stato spiegato supponendo che le variazioni di permeabilità ionica associate col potenziale di placca siano tali da stabilire un « corto circuito » nella porzione subsinaptica della membrana cellulare: originandosi in una membrana parzialmente shuntata, lo *spike* non potrebbe raggiungere l'ampiezza osservabile, quando venga prodotto da uno stimolo isolato.

Quantunque nei motoneuroni spinali di Gatto [Coombs, Eccles e Fatt [2], Brock, Coombs e Eccles [3]] lo studio dell'interazione tra *spike* antidromico e potenziali postsinaptici eccitatori non abbia dato evidenza ad un simile fenomeno, esistono tuttavia numerosi dati che consentono di ritenere fondamentalmente analoghe la genesi di detti potenziali e quella del potenziale di placca. Nei motoneuroni di Rana, chiari effetti riferibili a corto circuito sono stati rilevati [Machne, Fadiga e Brookhart [4]] misurando gli *spikes* antidromici provocati quando per stimolazione della radice dorsale ovvero del cordone laterale del midollo [5] si generano nella stessa unità potenziali eccitatori postsinaptici.

Se da un canto queste osservazioni eseguite nel midollo isolato di Rana sono conformi alla teoria del corto circuito e la avvalorano, dall'altro esse possono apparire in contrasto coi dati di ricerche successive [cfr. Brookhart e Fadiga [6]], effettuate nel medesimo preparato. Tali ricerche hanno fatto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia dell'Università dell'Oregon (Facoltà di Medicina, Portland, Oregon, U.S.A.).

(**) *Visiting Investigator*, borsa di studio della *National Academy of Sciences* e della *International Cooperation Administration*. Indirizzo permanente: Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(***) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) P. Fatt a. B. Katz, « J. Physiol. », CXV, 320 (1951).

(2) J. S. Coombs, J. C. Eccles a. P. Fatt, « J. Physiol. », CXXX, 374 (1955).

(3) L. G. Brock, J. S. Coombs a. J. C. Eccles, « J. Physiol. », CXVII, 431 (1959).

(4) X. Machne, E. Fadiga a. J. M. Brookhart, « J. Neurophysiol. », XII, 483 (1959).

(5) Tutti gli stimoli erano ipsilaterali rispetto alla unità esplorata; la radice sottoposta alla stimolazione era quella del segmento midollare a cui apparteneva la unità stessa [cfr. (4)].

(6) J. M. Brookhart a. E. Fadiga, « J. Physiol. », in corso di stampa.

concludere che nei motoneuroni di Rana i potenziali eccitatori postsinaptici evocati per stimolazione della radice dorsale si originano a livello della parte più dorsale delle ramificazioni dendritiche, mentre quelli ottenuti attivando il cordone laterale esprimono una depolarizzazione che ha essenzialmente origine nel soma. Ora, è ovvio che il manifestarsi dell'effetto di corto circuito nello *spike* antidromico è subordinato alla condizione che il potenziale postsinaptico si generi in porzioni della membrana cellulare invase dallo *spike* stesso; e d'altra parte è noto come vari AA. [Lorente de Nó [7], Brock, Coombs e Eccles [8], Clare e Bishop [9]] concordino nel ritenere che il processo di invasione antidromica non coinvolga la parte più distale dell'albero dendritico. Parrebbe quindi difficilmente interpretabile il fatto che non solo i potenziali postsinaptici evocati per stimolazione del cordone laterale, ma anche quelli ottenuti attivando la radice dorsale, modifichino lo svolgimento dello *spike* antidromico.

Va tuttavia rilevato che le due serie di esperimenti sono state eseguite in condizioni assai diverse: nel primo caso si impiegavano preparati non trattati con alcun farmaco, nel secondo il midollo era perfuso con soluzione di Ringer contenente pentobarbital in forte concentrazione (1 : 5000) a fine di bloccare l'attività interneuronica. Diversamente dai potenziali postsinaptici evocati nei motoneuroni del preparato depresso dal barbiturico, quelli ottenuti in midolli non trattati non hanno natura elementare, essendo in misura notevole complicati dagli effetti di circuiti polisinaptici internunciali. La specificità di sede dei bottoni terminali attivati dai due sistemi di fibre primarie presi in esame è stata d'altra parte dimostrata solo nel caso in cui le connessioni utilizzate siano monosinaptiche; è quindi logico pensare che la contraddizione sia solo apparente.

Abbiamo controllato la esattezza di queste vedute ripetendo gli esperimenti di interazione tra potenziali a punta e potenziali postsinaptici in circa 20 motoneuroni di midolli trattati con pentobarbital, così da impedire la trasmissione d'impulsi per vie polisinaptiche. Le prove sono state eseguite con la tecnica ed i procedimenti descritti in precedenza [4, 6].

Nella Tabella I sono riprodotti i dati ottenuti da 13 motoneuroni scelti tra quelli che meglio hanno resistito al trauma della penetrazione del microelettrodo. Per ciascuno di essi si è misurata l'ampiezza dello *spike* ottenuto mediante un impulso antidromico evocato isolatamente e quella dello *spike* prodotto dal medesimo stimolo, applicato durante il manifestarsi del fronte di un potenziale postsinaptico eccitatorio prodotto dalla attivazione del cordone laterale; misurazioni analoghe si sono poi effettuate utilizzando come via di attivazione ortodromica la radice dorsale. Si vede nella tabella che, salvo un caso, l'ampiezza degli *spikes* sovrapposti ai potenziali ottenuti per stimolazione del cordone laterale è nettamente minore di quella degli *spikes*

(7) R. LORENTE DE NÓ, « J. cell. comp. Physiol. », XXIX, 207 (1947).
(8) L. G. BROCK, J. S. COOMBS a. J. C. ECCLES, « J. Physiol. », CXXII, 429 (1953).
(9) M. H. CLARE a. G. H. BISHOP, « EEG clin. Neurophysiol. », VII, 85 (1955).

provocati dallo stimolo antidromico isolato; la differenza media è di 3,06 mV, pari a circa il 5 %.

TABELLA I.

Effetti di corto circuito provocati da potenziali postsinaptici in spikes *antidromici di motoneuroni spinali di Rana.*

Motoneurone	Potenziale di membrana a riposo	Risultati per stimolazione del cordone laterale			Risultati per stimolazione della radice dorsale		
		spike antidromico			*spike* antidromico		
		isolato (*a*)	sovrapposto all'EPSP (*) (*b*)	(*a* — *b*)	isolato (*c*)	sovrapposto all'EPSP (*) (*d*)	(*c* — *d*)
	mV	mV	mV	mV	mV	mV	mV
1	51	56	51,5	4,5	53	52,5	0,5
2	—	72	70	2	71	71	0
3	55	50	45,2	4,8	52	53	— 1
4	41	60	60	0	60	60	0
5	49	43	42	1	48	48	0
6	—	45	43	2	48,5	48,5	0
7	48	57	53	4	55	52	3
8	42	63	58	5	57	57	0
9	—	70	66	4	67	67	0
10	44	52	49	3	52	52	0
11	55	48,5	46	2,5	42	42	0
12	44	57	52	5	56	56	0
13	—	50	48	2	50	49	1
$\bar{x}$	*47,6*	*55,6*	*52,5*	*3,06*	*54,7*	*54,4*	*0,26*

(*) *Excitatory postsynaptic potential.*

Nessuna diminuzione di ampiezza, invece, si osserva di regola nello *spike* antidromico provocato durante lo svolgersi del potenziale postsinaptico ottenuto mediante la stimolazione della radice dorsale; ed è importante il fatto che in due delle tre eccezioni rilevabili nella tabella detto potenziale manifestasse chiari segni di rieccitazione attraverso circuiti

internunciali rimasti pervi nonostante il trattamento col pentobarbital. Si è avuto cura di regolare gli stimoli ortodromici in modo da ottenere, per l'una come per l'altra via, potenziali postsinaptici eccitatori di ampiezza paragonabile [cfr. Fadiga e Brokhart [10]]: la mancata comparsa di effetti di corto circuito negli *spikes* antidromici sovrapposti ai potenziali postsinaptici evocati dalla stimolazione della radice dorsale non può quindi spiegarsi mediante considerazioni di natura quantitativa.

La interpretazione prospettata più sopra deve pertanto ritenersi corretta. E i risultati ora esposti costituiscono un'ulteriore riprova della specifica sede dei bottoni terminali attivati direttamente, a livello dei motoneuroni, dalle fibre di ciascuno dei due sistemi primari presi in esame.

(10) E. FADIGA e J. M. BROOKHART, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXV, in corso di stampa.

Fisiologia. — *Qualche osservazione sperimentale sull'elettrocardiogramma dei pesci* [*]. Nota di FERRUCCIO CHIUINI e ELIO AISA, presentata [**] dal Socio G. AMANTEA.

Sebbene da quasi mezzo secolo ne sia stato iniziato lo studio, le ricerche sull'ECG dei pesci appaiono scarse e frammentarie.

Da Zwaardemaker [1] e De Meyer [2], che primi se ne occuparono nel 1910, i vari Autori che in seguito si sono interessati all'argomento hanno studiato soprattutto potenziali d'azione direttamente derivati dal cuore isolato o da parti di esso.

Solo Gitter [3] nel 1933 otteneva potenziali d'azione cardiaci da derivazioni indirette, mediante elettrodi applicati alla pelle, al fine di studiare il ritmo cardiaco dell'anguilla. Oets [4], nel 1950, derivava ECG mediante elettrodi applicati alla pelle, al pericardio e direttamente sul muscolo cardiaco. Ma tanto l'uno che l'altro si servirono sempre di derivazioni unipolari.

Nei tracciati così ottenuti apparivano costantemente le deflessioni P–QRS–T.

Kisch [5] notava una piccola onda positiva nel tratto ST, onda che chiamò B e interpretò come espressione dei potenziali del cono arterioso, mentre Bakker [6] aveva visto che l'onda P era preceduta da un'altra, grande, negativa, che disse V e ritenne dovuta ai potenziali del seno venoso. Tale reperto venne successivamente confermato da Oets.

Tanto l'onda B che la V erano però evidenti solo quando gli elettrodi esploranti venivano applicati sul segmento cardiaco da cui avevano origine i potenziali corrispondenti, o almeno vicinissimo ad essi.

Ricostruendolo in base ai dati che la letteratura ci ha finora fornito al riguardo, l'ECG del pesce dovrebbe essere del tipo descritto nella Tabella I.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia in collaborazione col Centro Studi di Pescara per l'igiene e il controllo dei prodotti della pesca.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) ZWAARDEMAKER e NOYONS, «Onderz. Physiol. Lab. Utrecht», 5e reeks, *10*, 165 (1910) (cit. da OEST).

(2) DE MEYER. «Arch. int. Physiol.», *10*, 100 (1910) (cit. da OETS).

(3) GITTER, «Z. vergl. Physiol.», *18*, 654 (1933) (cit. da OETS).

(4) J. OETS, *Electrocardiograms of fishes*, «Physiol. Compar. et Oecol.», *2*, 181–185 (1950).

(5) B. KISCH, *Electrographic investigations of the heart of fish*, «Exptl. Med. and Surg.», *6*, 31–36 (1948).

(6) BAKKER, «Z. Biol.», *59*, 335 (1913) (cit. da OETS).

TABELLA I.

Morfologia dell'ECG.

ECG n°	V	P	QRS	B	ST	T	*Osservazioni*
1	Non visibile	(+) in D_3 e V, Nelle altre non visibile	$R_2 = R_3 > R_1$ QS in aVR e aVL; R in aVF e V	Non visibile	Normale	(+) in DD aVF e V. (—) in aVR e aVL.	
2	Negativa in D_3?	Non identificabile	Non bene identificabile	Non visibile	Non identificabile	Non identificabile	La scarsa ampiezza dei complessi non permette una agevole lettura e rende pertanto inutilizzabile l'ECG.
4	Non bene identificabile. Forse la prima piccola onda negativa.	Non identificabile	R	Non visibile	Normale	(+) Normale	La figura riproduce la sola derivazione precordiale. Anche nelle altre derivazioni, non riportate, i complessi sono di ampiezza ridotta ma sovrapponibili a quelli dell'ECG n. 7.
5	Non visibile	Non visibile	Polifasico in D_1 D_2; (—) in D_3 aVF (+) in aVR aVL	Non visibile	Normale	(+) In D_2 Non visibile nelle altre	I potenziali d'azione della piccola massa miocardica anche in questo caso non possono essere efficacemente derivati con metodo indiretto.
7	(—) in D_2 D_3 aVF (— +) in V	(+ —) in D_2 e D_3 (+) in aVF e V	$R_2 > R_3 > R_1$ QS in aVR aVL R in aVF e V	Bifida in aVR?	Normale	(— +) in DD e aVF (+) In aVR e V	
8	(—)	(+)	(+)	Non visibile	Normale	(—)	È riportata solo la precordiale. Le altre derivazioni sono simili agli ECG 1 e 7. La negatività di T può essere dovuta al fatto che in qualche modo l'elettrodo è venuto a diretto contatto col cuore realizzando la stessa derivazione dell'ECG n. 9.
9	(—) in DD aVF e Vd	Visibile in Vd	$R_2 = R_3 > R_1$ QS in aVR e aVL; R in aVF, Rs in Vd	Non visibile	Normale	(+) In aVR aVL (—) Nelle altre	L'onda negativa interpretata come V compare ora prima ora dopo e a diversa distanza dal complesso PQRST, con ritmo più frequente di questo, per lo più di 3/1. Questo si verifica anche nell'ECG n. 8.

È ovvio però che la capacità di resistenza alla critica d'un simile ipotetico tracciato, è minata alla base dall'essere le deflessioni state ottenute con tecniche diverse, da derivazioni dirette, o, se indirette, soltanto unipolari.

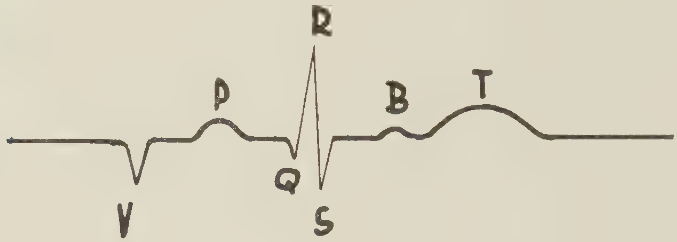


Fig. 1.

Noi abbiamo voluto tentare di ottenere anche dai pesci ECG nelle derivazioni classiche di Einthoven e nelle altre abitualmente adoperate per tutti gli animali e per l'uomo. Anche se, naturalmente, è stato indispensabile qualche particolare accorgimento ed è stato necessario allontanare l'animale, per brevissimo tempo, dal suo ambiente naturale ed esporlo pertanto a deficit d'ossigeno.

Tecnica sperimentale.

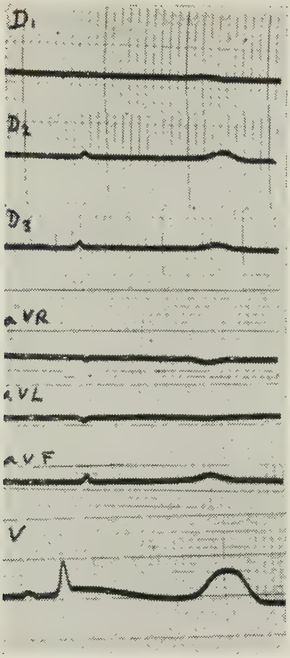
Come materiale di studio ci siamo serviti di pesci d'acqua dolce appartenenti alla famiglia dei « Ciprinidi » (*Barbus barbus* e *Leuciscus leuciscus*) catturati nel fiume Tevere. Dopo numerosissime prove eseguite a scopo orientativo abbiamo adoperato sempre animali del peso da 300 gr in su. Con esemplari di peso inferiore sono utilizzabili soltanto le derivazioni dirette, o al massimo le indirette precordiali, con elettrodo applicato nella maniera che risulterà dall'ulteriore descrizione della nostra tecnica.

Per la registrazione dei potenziali è stato adoperato un elettrocardiografo a scrittura diretta della Casa Galileo.

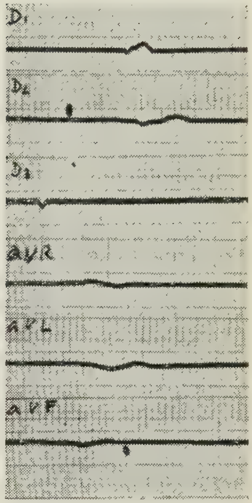
La velocità di scorrimento della carta era di 4 cm/sec e la taratura di cm $1{,}5 = 1$ mV, condizioni che si erano rivelate le più idonee.

Il pesce, prelevato dalla vasca, veniva poggiato col dorso in basso sopra adeguato supporto e contenuto con appositi legami. Elettrodi ad ago, della lunghezza di 2 cm, venivano infissi sotto la pelle e precisamente nelle regioni retrobranchiali D. e S. e al centro del terzo medio della parete addominale così da realizzare un triangolo e stabilire il collegamento all'apparecchio come d'uso per $D_1 D_2 D_3$.

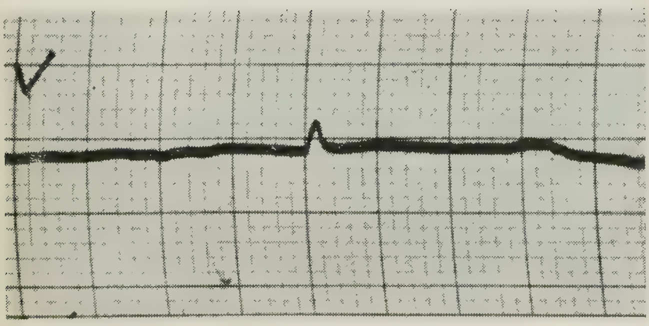
L'elettrodo indifferente veniva infisso nella coda. L'elettrodo esplorante precordiale (un filo d'argento con terminazione a piccolo bottone) veniva posto al disotto della pelle previamente incisa con piccolissimo taglio – sulla parte anteriore della parete addominale, nello spazio tra le due pinne pettorali, il cuore restando così ad una distanza di circa un centimentro con interposti la parete addominale stessa ed il pericardio.



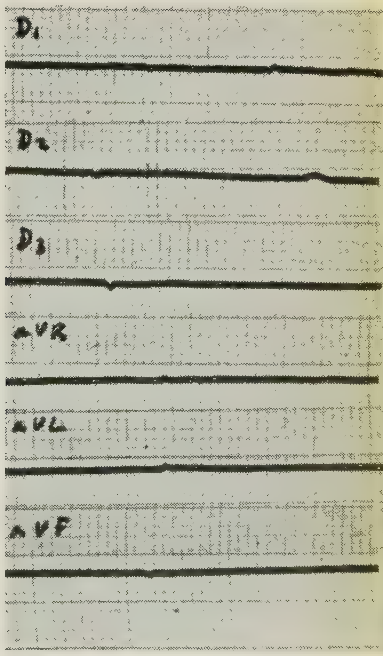
ECG n° 1. – *Barbus barbus* di gr. 470.



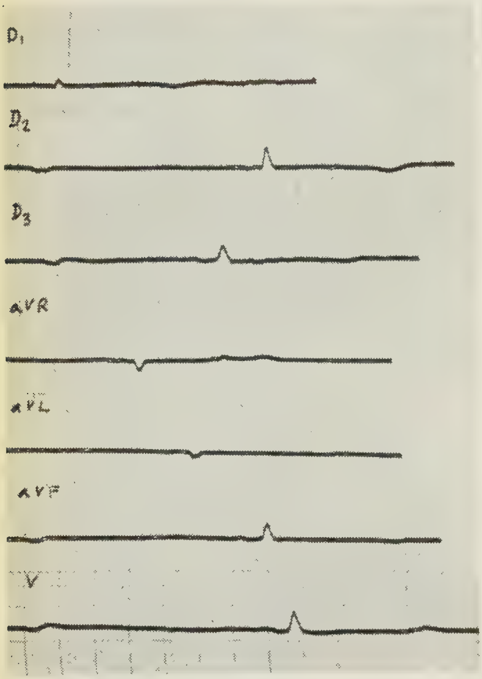
ECG n° 2. – *Leuciscus leuciscus* di gr. 250.



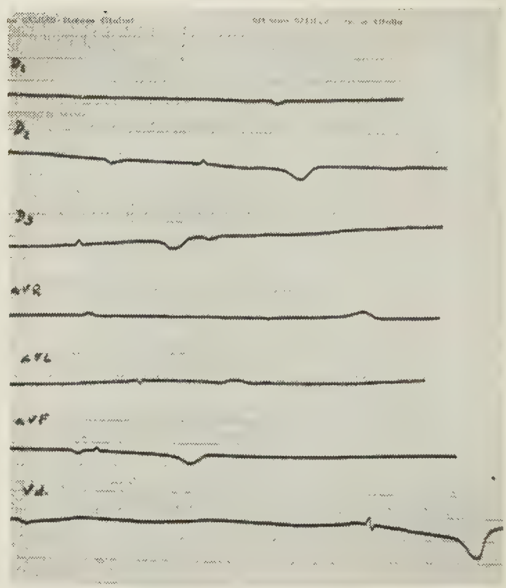
ECG n° 4. – *Leuciscus leuciscus* di gr. 100.



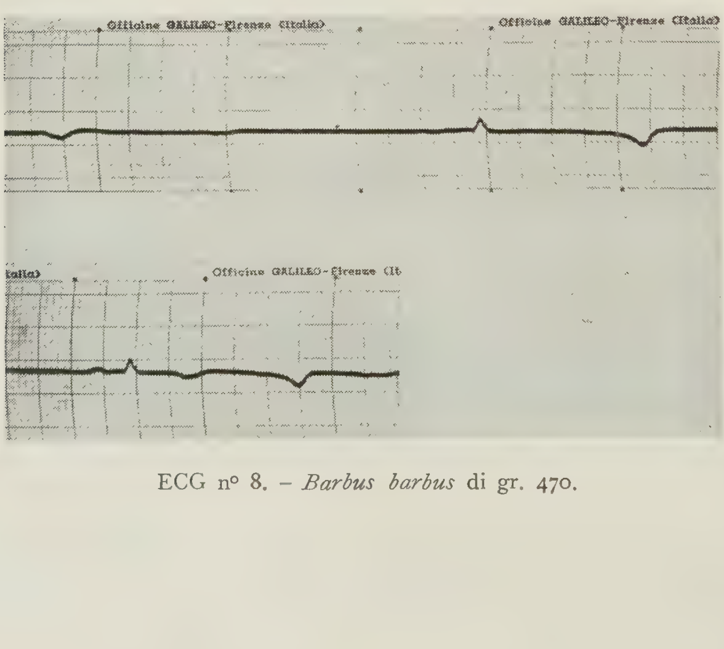
ECG n° 5. – *Leuciscus leuciscus* di gr. 200.



ECG n° 7. – *Barbus barbus* di gr. 300.



ECG n° 9. – *Barbus barbus* di gr. 465.



ECG n° 8. – *Barbus barbus* di gr. 470.

Il tempo necessario a tutta la preparazione dell'animale oscillava intorno ai due minuti e pertanto il trauma necessariamente apportato era ridotto al minimo.

Le derivazioni registrate sono in definitiva state le standard (D_1 D_2 D_3), le aV, ed una precordiale V che raccoglieva i potenziali della parete cardiaca posta di fronte ad essa.

Dall'esame dei tracciati (sinteticamente esposti nella Tabella) si può rilevare che delle onde costituenti il normale ipotetico ECG del pesce, nei *Barbus barbus* e *Leuciscus leuciscus* da noi adoperati, si sono potute derivare regolarmente sempre quelle del gruppo QRST e non sempre in tutte le derivazioni la P e la V. Mai siamo riusciti a mettere in evidenza la onda B.

Queste nostre prime osservazioni ci autorizzano a sostenere che il sistema di derivazione indiretto, bipolare e unipolare, usato come standard anche nel pesce, consente utili registrazioni ed è pertanto ampiamente utilizzabile ai fini della ricerca. E già nelle nostre condizioni di esperimento, ove la carenza di ossigeno – anche se minima e di breve durata – ha indotto certamente perturbazioni metaboliche, che possono avere in qualche misura modificato l'ECG soprattutto per quanto riguarda il ritmo e la conduzione.

Risultati assolutamente esatti potranno aversi solo mantenendo l'animale nel suo ambiente naturale.

Pur essendo il pesce notevolmente resistente alla carenza di O_2 (per il suo particolare metabolismo) senza meno essa è stata risentita dai sensibilissimi e bisognosissimi centri preposti all'automatismo ed alla conduzione, e ciò è provato dal non aver noi ottenuto ritmo regolare, ma bradiaritmia di alto grado, e probabilmente anche dalla dissociazione tra il seno venoso e l'atrio, rivelata dalla completa indipendenza della V dal complesso atrio-ventricolare, a tipo di blocco totale (vedi ECG 8 e 9).

La deficiente ossigenazione dei centri può spiegare in parte le lievi differenze osservate nei nostri tracciati rispetto a quelli ottenuti dagli Autori precedenti; ma la quota maggiore spetta certamente alla diversa tecnica di registrazione dei potenziali.

Ne va inoltre dimenticato, nello studio ecgrafico del pesce, la disposizione del tessuto specifico diversa nelle diverse famiglie [7] la quale naturalmente condiziona la comparsa delle varie onde ecgrafiche più o meno facilmente svelabili.

Più precise ricerche, relative ad una esatta definizione morfologica e di tempo dell'ECG, ad una migliore standardizzazione del metodo di registrazione, ad un fine studio analitico delle varie onde ecc., ci ripromettiamo di condurre in seguito.

Riteniamo però non inutili queste nostre prime se esse ci hanno consentito di dimostrare la possibilità e l'utilità di derivare ECG dal pesce con la tecnica abituale e se siamo riusciti ad ottenere buoni tracciati senza ricorrere a mutilazioni o ad anestesia.

(7) M. E. Brown, *The Physiology of fishes*, ed. Academic Press Inc., New York 1957.

Patologia. — *Sulla fissazione della tiroxina alle proteine plasmatiche di alcuni animali marini* (*). Nota di GAETANO SALVATORE, GIANCARLO VECCHIO e VINCENZO MACCHIA, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

Nei vertebrati superiori il trasporto degli ormoni tiroidei nel plasma è assicurato da una o più frazioni proteiche capaci di fissare le iodotironine e in particolar modo la tiroxina. Nell'uomo è stata anche dimostrata la specificità di tali frazioni proteiche, giacché una di esse (TBP: thyroxine binding protein), con mobilità elettroforetica intermedia tra quella delle α_1 e delle α_2 globuline e presente nel plasma in quantità molto scarsa, ha la proprietà di legare la maggior parte dell'ormone circolante (Gordon et al., 1952; Robbins e Rall, 1957).

Recentemente è stata dimostrata la presenza nel plasma dell'uomo di un'altra frazione, con mobilità elettroforetica maggiore di quella delle albumine e detta perciò prealbumina, capace di legare specificamente l'ormone tiroideo (Rich e Bearn, 1958); anzi l'affinità della prealbumina per esso sarebbe ancora maggiore di quella del TBP. Una piccola parte della tiroxina circolante (o di quella aggiunta *in vitro* al siero) è però sempre legata alla frazione albuminica, ma è ancora controverso se il legame alle albumine sia anch'esso specifico perché dovuto ad alcune particolari frazioni in esse contenute (Robbins, 1959), ovvero sia di natura aspecifica perché correlato a una proprietà generale delle albumine, indipendente dalla specie animale dalla quale esse provengono (Tata e Shellabarger, 1959)

Il trasporto plasmatico degli ormoni tiroidei è strettamente correlato, mediante molteplici meccanismi ancora in parte mal noti, all'utilizzazione periferica degli ormoni stessi e forse anche alle differenze nelle attività biologiche delle varie iodotironine: per tale motivo esso riveste notevole importanza funzionale.

Non è ancor noto, però, se la fissazione degli ormoni alle proteine del sangue sia presente in tutte le specie animali nelle quali esiste l'attività tiroidea, ossia in tutti i Vertebrati.

La ricerca di un'eventuale fissazione della tiroxina alle proteine plasmatiche di alcuni Vertebrati inferiori costituisce perciò l'oggetto del presente lavoro. Si è anche studiata la capacità fissatrice dell'emolinfa di due invertebrati che, non essendo dotati di attività tiroidea, non avrebbero dovuto presentare i costituenti proteici destinati ad assicurare il trasporto degli ormoni.

(*) Lavoro eseguito nella Stazione Zoologica e nell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

PARTE SPERIMENTALE

Si è adoperato il siero di due Teleostei: *Scorpaena scrofa* L. e *Sargus vulgaris* Erichson; e di un Selaceo: *Scyllium stellare* Berthold; l'emolinfa di due invertebrati: *Octopus vulgaris* Cuvier e *Palinurus vulgaris* De Kay.

100 μl di ciascun campione si lasciano equilibrare per 16 h a $+4°C$ con 0,01 μg di tiroxina ($3', 5'\,{}^{131}I$) in soluzione ammonicale portata a secco sotto pressione ridotta. La 3, 5, 3', 5'–tetraiodotironina era ottenuta per iodurazione della 3, 5–diiodotironina a pH alcalino con una soluzione idroalcoolica di ${}^{127}I_2 + {}^{131}I_2$. La tiroxina, di attività specifica eguale a $\sim$ 20 mC/μM, viene purificata più volte mediante cromatografia ed elettroforesi su carta fino a che contenga solo tracce di ioduri (< 1 ‰).

Dopo aver trovate le condizioni ottimali per ottenere una buona separazione elettroforetica, le miscele siero $+ T_4$ o emolinfa $+ T_4$ sono sottoposte ad elettroforesi su carta Wh. 3 MM contemporaneamente ad un sier oumano normale di riferimento e ad una soluzione di tiroxina pura marcata a pH 8. Le condizioni sperimentali adottate sono: tampone veronal–veronal sodico, $pH = 8{,}6$; $\mu = 0{,}075$; 5 volts per cm di lunghezza; 0,4 mA per cm di larghezza; 16–22 ore di migrazione (secondo la specie in esame). Su ogni striscia vengono deposti dai 15 ai 30 μl di siero. Gli elettroferogrammi così ottenuti vengono gli uni colorati con amido–schwartz 10 B (Bayer), gli altri sottoposti ad autoradiografia o a misure della radioattività mediante contatore a scintillazione NaI (Tl) a cristallo piatto (su cromatolettore) o a cristallo forato (dopo aver ritagliato le strisce centimetro per centimetro).

RISULTATI.

Alcuni esempi dei risultati ottenuti con il siero di *Scorpaena scrofa*, *Sargus vulgaris* e *Scyllium stellare* sono riportati nella fig. 1, insieme con l'elettroferogramma del siero umano normale di riferimento.

L'esame della figura permette di notare:

1° il siero di *Scorpaena scrofa* [*b*] mostra la presenza, nelle condizioni sperimentali adottate, di cinque frazioni proteiche, tutte aventi mobilità anodica inferiore a quella delle α_1 globuline del siero umano. La radioattività dovuta alla tiroxina aggiunta si localizza in corrispondenza della banda centrale (componente 3) dove presenta un picco ben definito;

2° il siero di *Sargus vulgaris* [*d*] presenta tre frazioni proteiche con mobilità nella zona delle albumine umane ed una frazione a mobilità più elevata non identificata e probabilmente dovuta a un protide coniugato. La radioattività si ripartisce su tutta la zona corrispondente alla migrazione delle frazioni proteiche in modo pressocché uniforme senza presentare alcuna localizzazione ben definita;

3° il siero di *Scyllium stellare* [*c*] mostra la presenza di una banda con migrazione netta verso il catodo, di una o due bande a migrazione anodica

corrispondenti alla zona delle α–globuline e di una frazione proteica, più importante, che resta in corrispondenza dell'origine o leggermente spostata verso l'anodo. In corrispondenza di quest'ultima banda è localizzata la radio-

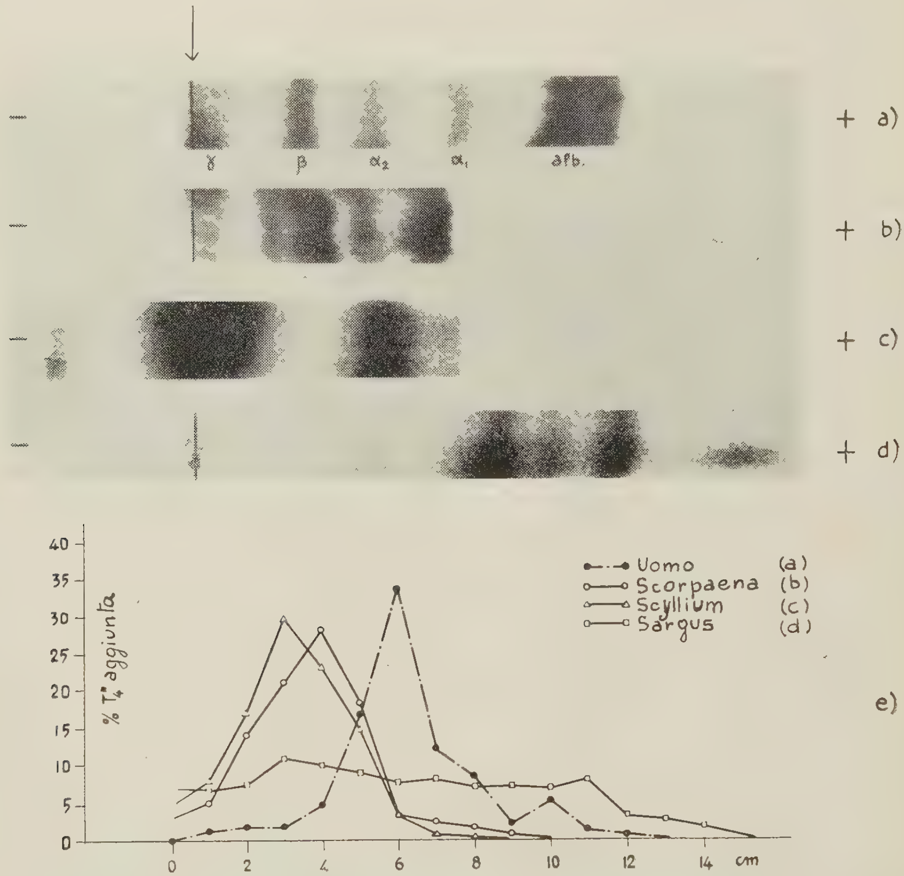


Fig. 1. – Elettroferogrammi delle proteine del siero di Pesci addizionati di L–tiroxina (0,1 μg/ml).

a) Uomo; *b) Scorpaena scrofa*; *c) Scyllium stellare*; *d) Sargus vulgaris*; *e)* ripartizione della radioattività su corrispondenti ferogrammi.

attività dovuta alla tiroxina aggiunta e, data la vicinanza della banda alla posizione della tiroxina di riferimento, non è possibile precisare se sia o meno avvenuta la fissazione dell'ormone.

La fig. 2 mostra gli elettroferogrammi dell'emolinfa di *Octopus vulgaris* [*b*] e di *Palinurus vulgaris* [*c*]

Si noti la presenza in ognuno dei tracciati di due bande (strettamente ravvicinate e pertanto poco distinguibili nel caso del *Palinurus vulgaris*) delle quali una certamente dovuta al pigmento respiratorio contenuto nell'emolinfa (emocianina).

Contrariamente alla ripartizione della radioattività sull'elettroferogramma del siero umano (nel quale è ben distinguibile la fissazione alla TBP,

90 %, e alle albumine, 10 %), negli elettroferogrammi dei due invertebrati la radioattività resta all'origine [*e*], analogamente a quanto accade per la tiroxina in soluzione pura [*d*].

DISCUSSIONE.

Il problema della ripartizione delle frazioni proteiche che è particolarmente importante nello studio del trasporto della tiroxina sulle proteine plasmatiche soprattutto se si pone in relazione la capacità fissatrice di specie

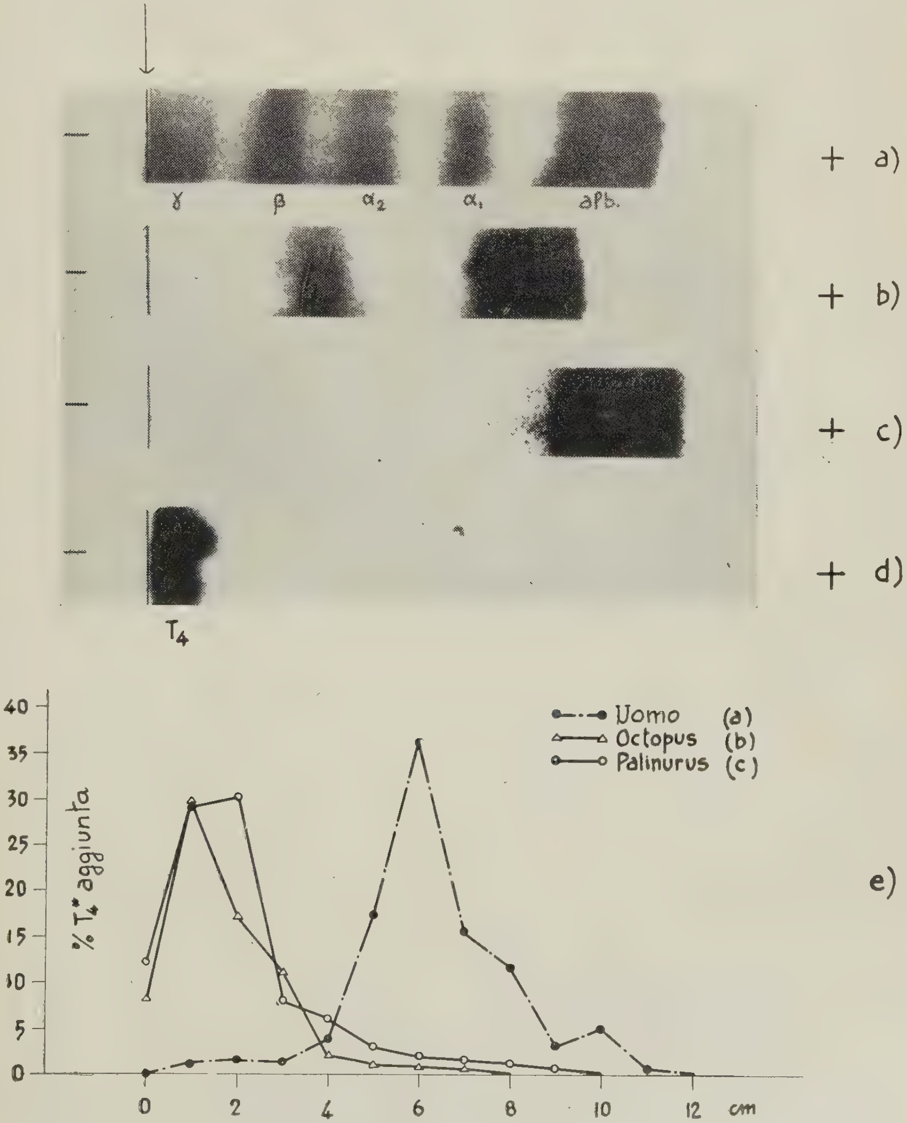


Fig. 2. – Elettroferogrammi delle proteine dell'emolinfa di Invertebrati addizionata di L–Tiroxina (0,1 μg/ml).

a) siero umano normale; *b*) emolinfa di *Octopus vulgaris*; *c*) emolinfa di *Palinurus vulgaris*; *d*) autoradiogramma di una soluzione di L–tiroxina pura marcata con ^{131}I, sottoposta alle stesse condizioni di elettroforesi: *e*) ripartizione della radioattività sui ferogrammi *a*), *b*) e *c*).

animali diverse nei confronti di quella del siero umano. Le proteine plasmatiche dei poichilotermi presentano, nella maggior parte dei casi, notevoli dissimiglianze da quelle dei vertebrati superiori (Hamoir, 1955). Anche tra i mammiferi il quadro elettroforetico delle proteine plasmatiche varia da specie a specie (Deutsch e Goodloe, 1945; Moore, 1945; Gleason e Friedberg, 1953) ma nei vertebrati meno evoluti, e specialmente nei pesci, le differenze tra i tipi di una stessa famiglia sono ancora maggiori e, nonostante i numerosi tentativi compiuti al riguardo, è difficile o impossibile attribuire alle differenti frazioni una denominazione esatta secondo la nomenclatura di Tiselius, anche con il confronto simultaneo con siero umano (Deutsch e Mc Schann, 1949 Irisawa e Irisawa, 1954; Engle et al. 1958; Becker et al., 1958). In tali animali non si ottiene netta separazione delle proteine del siero a causa della gran quantità di lipoproteine in esso presenti che modificano la velocità di migrazione delle varie frazioni proteiche (Drilhon, 1954 *a*; Drilhon et al., 1958).

Recentemente inoltre Drilhon e coll. hanno studiato il quadro proteico di alcuni teleostei e selaci mediante elettroforesi su carta e su amido (Drilhon, 1953, 1954 *b*, 1959; Drilhon e Fine, 1957, 1959; Drilhon et al., 1958; Drilhon et al., 1956).

I risultati elettroforetici ottenuti dai diversi Autori, nonostante non siano sempre concordi, permettono di trarre le seguenti conclusioni:

a) nei teleostei manca in genere una frazione comparabile alle γ–globuline mentre le albumine, contenute in quantità minori che nel siero dei mammiferi, sono presenti in quasi tutte le specie;

b) nei selaci, invece, esistono più frazioni paragonabili alle γ–globuline mentre le albumine sono assenti.

Queste conclusioni non possono però ritenersi definitive giacché, come si è accennato, anche nell'ambito dello stesso gruppo vi sono notevoli differenze qualitative e quantitative.

Nel caso di *Scorpaena scrofa* i risultati ora ottenuti sono in accordo con quelli di Drilhon e coll. che dimostrano nell'analisi elettroforetica del siero di Scorpaena la presenza di cinque bande, ma l'identificazione di esse (alb., α_1, α_2, β_1, β_2) proposta dagli Autori (Drilhon et al., 1958) non sembra poter essere accettata giacché la minor mobilità elettroforetica ora ottenuta non permette ritenere che la frazione a più forte mobilità corrisponda alle albumine [1]. In ogni caso i risultati ora ottenuti dimostrano che la tiroxina migra costantemente associata alla frazione che secondo Drilhon et al. (1958) corrisponde alle α_2–globuline ma che è meglio denominare « componente 3 ».

Nel caso dell'altro teleosteo preso in esame, *Sargus vulgaris*, mancano dati elettroforetici precedenti di confronto, e il quadro elettroforetico varia

(1) D'altronde gli stessi Autori in un lavoro precedente asseriscono di aver trovato 5 frazioni glubuliniche e solo a volte una frazione con mobilità corrispondente a quella delle albumine.

notevolmente da specie a specie dello stesso genere. In tutti i casi, però, la radioattività dovuta alla tiroxina aggiunta è ripartita pressocché uniformemente dalla origine al componente più veloce, il che dimostra che certamente le proteine plasmatiche di *Sargus* sp. sono capaci di fissare l'ormone tiroideo (che altrimenti sarebbe rimasto alla origine); non esiste però una frazione proteica specifica con affinità maggiore delle altre. È questo il primo esempio di plasma in cui la fissazione o il trasporto dell'ormone tiroideo si effettua su tutto il complesso proteico presente in esso.

Nel caso dello *Scyllium stellare*, i risultati ottenuti confermano, come sembra essere regola generale negli elasmobranchi (Irisawa et Irisawa, 1954; Engle et al., 1958), l'assenza di frazioni veloci albumino-simili e concordano con quelli di Drilhon e coll. (Drilhon e Fine, 1957, 1959; Drilhon e al., 1958) circa la presenza di tre bande nella regione delle globuline. A differenza di quanto osservato dagli Autori francesi però, una di tali bande è nettamente spostata verso il catodo, analogamente a quanto ottenuto da Adinolfi et al. (1959) mediante elettroforesi su amido. In ogni caso per lo *Scyllium* è difficile poter affermare con sicurezza la presenza di una proteina o di un sistema proteico capace di fissare la tiroxina data la scarsa mobilità della frazione alla quale essa potrebbe essere eventualmente legata.

Nell'emolinfa dei due invertebrati studiati (un mollusco ed un crostaceo) si può affermare l'assenza di un qualsiasi sistema capace di fissare gli ormoni tiroidei. Il quadro elettroforetico dell'emolinfa degli invertebrati marini è quasi del tutto sconosciuto giacché esistono in letteratura solo le ricerche di Woods et al. (1958).

Riassumendo, anche nei riguardi del trasporto ematico degli ormoni tiroidei non esiste nella classe dei pesci un unico meccanismo giacché la situazione sembra diversa da specie a specie.

In *Scorpaena* sicuramente esiste un sistema specifico di trasporto per la tiroxina; nel *Sargus* l'ormone viene fissato, ma in maniera aspecifica su tutte le proteine plasmatiche; nello *Scyllium* l'esistenza di un sistema di trasporto è solo probabile. Nell'emolinfa degli invertebrati invece, dove è assente la funzione tiroidea, manca anche una qualsiasi proteina capace di fissare l'ormone.

Vengono qui riassunti gli studi sulla interazione tra proteine plasmatiche e ormoni tiroidei nelle varie classi dei vertebrati.

Ciclostomi (larve)	Salvatore, Macchia, Vecchio e Roche: 1959.
Pesci	Salvatore, Vecchio e Macchia: 1959.
Anfibi	—
Rettili	Apter, Robbins e Rall: 1957.
Uccelli	Tata e Shellabarger: 1959.
Mammiferi (uomo)	Gordon, Gross, O'Connor e Pitt-Rivers 1952; Robbins e Rall: 1957.

Bibliografia.

M. Adinolfi, G. Chieffi e M. Siniscalco, Comunicazione personale, 1959.
R. Apter, J. Robbins and J. E. Rall, Dati non pubblicati riferiti in Robbins e Rall, 1957.
E. L. Becker, R. Bird, J. W. Kelly, J. Schilling, S. Salomon and N. Joung, « Physiol. Zool. », *31*, 221 (1958).
H. F. Deutsch and M. B. Goodloe, « J. Biol. Chem. », *161*, 1 (1945).
H. F. Deutsch and W. H. Mc Schann, « J. Biol. Chem. », *180*, 219 (1949).
A. Drilhon, « C. R. Acad. Sc. », *237*, 1779 (1953).
A. Drilhon, « C. R. Acad. Sc. », *238*, 940 (1954 *a*).
A. Drilhon, « C. R. Soc. Biol. », *148*, 1218 (1954 *b*).
A. Drilhon, « C. R. Soc. Biol. », *149*, 2124, (1955).
A. Drilhon, « C. R. Soc. Biol. » (in corso di stampa, 1959).
A. Drilhon et J. M. Fine, « C. R. Acad. Sc. », *245*, 1676 (1957).
A. Drilhon et J. M. Fine, « C. R. Acad. Sc. », *248*, 2418 (1959).
A. Drilhon, J. M. Fine et F. Daoulas, « Ann. Inst. Ocean. », *35*, 142 (1958).
A. Drilhon, J. M. Fine, J. Uriel et F. Le Bourdelles, « C. R. Acad. Sc. », *243*, 1802 (1956).
R. L. Engle, K. R. Woods, E. C. Paulsen and J. H. Pert, « Proc. Soc. Exp. Biol. Med. », *98*, 905 (1958).
T. L. Gleason and F. Friedberg, « Physiol. Zool. », *26*, 95 (1953).
A. H. Gordon, J. Gross, D. O'Connor and R. Pitt-Rivers, « Nature », *169*, 19 (1952).
G. Hamoir, « Adv. Protein Chem. », *10*, 226 (1955).
H. Irisawa and F. A. Irisawa, « Science », *120*, 849 (1954).
D. H. Moore, « J. Biol. Chem. », *161*, 21 (1945).
C. Rich and A. G. Bearn, « Endocrinology », *62*, 687 (1958).
J. Robbins (in corso di stampa, 1959).
J Robbins and J. E. Rall, « Rec. Progr. Hormone Res. », *13*, 161 (1957).
G. Salvatore, V. Macchia, G. Vecchio et J. Roche, « C. R. Soc. Biol. » (in corso di stampa, 1959).
J. R. Tata and C. J. Shellabarger, « Biochem. J. », *72*, 608 (1959).
K. R. Woods, E. C. Paulsen, R. L. Engle and J. H. Pert, « Science », *127*, 519 (1958).

Biologia. — *Effetti dell'ormone tiroideo sul midollo spinale di larve di Anfibî anuri* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In una precedente Nota, apparsa su questi Rendiconti [1], ho precisato l'andamento dell'attività mitotica nel midollo spinale durante il normale sviluppo di un Anfibio anuro (*Bufo bufo*); i risultati di tali osservazioni hanno messo in evidenza che i valori di densità mitotica raggiungono le quote più elevate al termine del periodo embrionale (a stadio 24) per diminuire poi progressivamente fino ad un mese dopo la metamorfosi, presentando oscillazioni poco prima del passaggio dalla condizione acquatica a quella terrestre; durante il periodo larvale la densità delle mitosi della regione sentisiva (piastra alare) del midollo spinale è sempre superiore a quella della regione motoria (piatra basale); ambedue le regioni presentano una serie di accentuazioni lungo l'asse antero–posteriore, particolarmente evidenti in corrispondenza della regione cervicale e lombare [2].

Nella presente Nota riferirò sull'influenza del trattamento con forti dosi di ormone tiroideo (tiroxina « Roche » alla concentrazione di $5 \cdot 10^{-7}$) in giovanissime larve di rospo (*Bufo bufo* L. a stadio I secondo Rossi [3] = stadio IV di *Rana pipiens* secondo Taylor e Kollros [4]); dopo cinque giorni di trattamento le larve emettevano l'arto anteriore sinistro, presentavano riduzione della coda e caduta del becco corneo, ma non riuscivano a proseguire le trasformazioni della metamorfosi poiché morivano. Ogni giorno di trattamento sono stati fissati in liquido di Sanfelice e di Bouin cinque girini; inoltre sono stati fissati cinque controlli al termine dell'esperienza (che avevano raggiunto lo stadio II) ed altrettanti girini in metamorfosi (a stadio XII secondo Rossi = XX secondo Taylor e Kollros). Gli animali fissati sono stati inclusi in celloidina–paraffina e sezionati in serie dalla norma trasversale a 7 μ di spessore; i preparati istologici sono stati colorati in emallume–eosina o sono stati trattati con il reattivo di Feulgen, standardizzato da Stowell [5]. Le mitosi (da prometafase ad anafase) sono state computate in sezioni alterne; da disegni alla camera lucida è stato calcolato lo sviluppo lineare dell'epitelio ventricolare, tenendo conto separato della porzione motoria e di quella sensitiva

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1959.

(1) G. M. BAFFONI e R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), XXV, 128 (1958).

(2) G. M. BAFFONI, « Acta Embryol. et Morphol. Experim. », II, 314 (1959).

(3) A. ROSSI, «Monit. Zool. Ital. », LXVI, 133 (1959).

(4) C. A. TAYLOR & J. J. KOLLROS, « Anat. Rec. », XCIV, 7 (1946).

(5) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », XX, 45 (1945).

(che sono risultate eguali); conoscendo lo spessore delle sezioni (7 μ), è stata ricavata l'area della superficie ventricolare in valori decimali (dmm^2); ho preferito rapportare il numero di mitosi all'unità di superficie (1 dmm^2. = = 10.000 μ^2), invece che al totale delle cellule dell'epitelio ventricolare, sia perché le dimensioni degli elementi ependimali non variano sensibilmente durante lo sviluppo, sia perché l'errore sperimentale è risultato inferiore.

Le medie ottenute come risultato delle presenti osservazioni, sono riportate nella Tabella e rappresentate graficamente nella fig. 2.

Gli animali trattati presentano evidenti modificazioni morfologiche rispetto ai controlli, non solo per quanto riguarda la forma esterna (6), ma anche per l'aspetto del neurasse: il midollo spinale conserva la lunghezza che aveva all'inizio del trattamento (mm. 1,8 – dal calamo all'XI paio di nervi spinali) ed è perciò un pò più corto, ma molto più largo (0,5 mm.) di quello dei controlli a pari età (mm. 2,4, di lunghezza e mm. 0,3 di larghezza); inoltre nel midollo spinale delle larve trattate sono evidenti due accenni alle dilatazioni nella regione cervicale e lombare come negli animali in metamorfosi (ved. fig. 1). L'esame delle sezioni istologiche ha messo in evidenza che la sostanza grigia è più abbondante che nei controlli, particolarmente nella regione sensitiva (piastra alare), ma che la sostanza bianca non aumenta in proporzione, occupando una superficie quasi eguale a quella dei controlli (a stadio II). A differenza di quanto è stato verificato in altre regioni del neurasse (telencefalo, diencefalo e mesencefalo) (7), inoltre, la cavità ventricolare del midollo spinale conserva il tipico aspetto larvale (è molto alta e relativamente stretta) e pertanto diversifica notevolmente da quella delle larve in metamorfosi; dai rilievi eseguiti risulta che la morfologia esterna del midollo spinale delle larve di Anfibî anuri trattate con tiroxina è simile a quella degli animali in metamorfosi, mentre invece la struttura interna mantiene molte delle caratteristiche dei controlli a pari età (a stadio II) (ved. fig. 1).

Dalle osservazioni morfologiche sopra esposte risulta che l'esaltazione metabolica provocata dall'ormone tiroideo si manifesta:

1° con un arresto dell'accrescimento somatico degli animali trattati; questo ostacola l'allungamento del midollo spinale, che negli animali trattati resta eguale a quello delle larve all'inizio del trattamento (a stadio I) e pertanto è più corto che nei controlli di pari età (a stadio II);

2° il midollo spinale degli animali trattati presenta una quantità di sostanza bianca quasi eguale, ma sostanza grigia molto più abbondante che nei controlli a pari età (a stadio II) e nelle larve in metamorfosi (a stadio XII): questo fatto è risultato dovuto all'aumento numerico delle cellule nervose; l'aumento numerico delle cellule nel midollo spinale è indice di una esaltata attività mitotica; ne deriva che l'azione dell'ormone tiroideo sugli elementi del midollo spinale si manifesta con maggior evidenza nello stimolo

(6) G. M. Baffoni «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser 8ª), XXIII, 495 (1957).
(7) G. M. Baffoni, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. 8ª), XXVIII, fasc. 1 (1960).

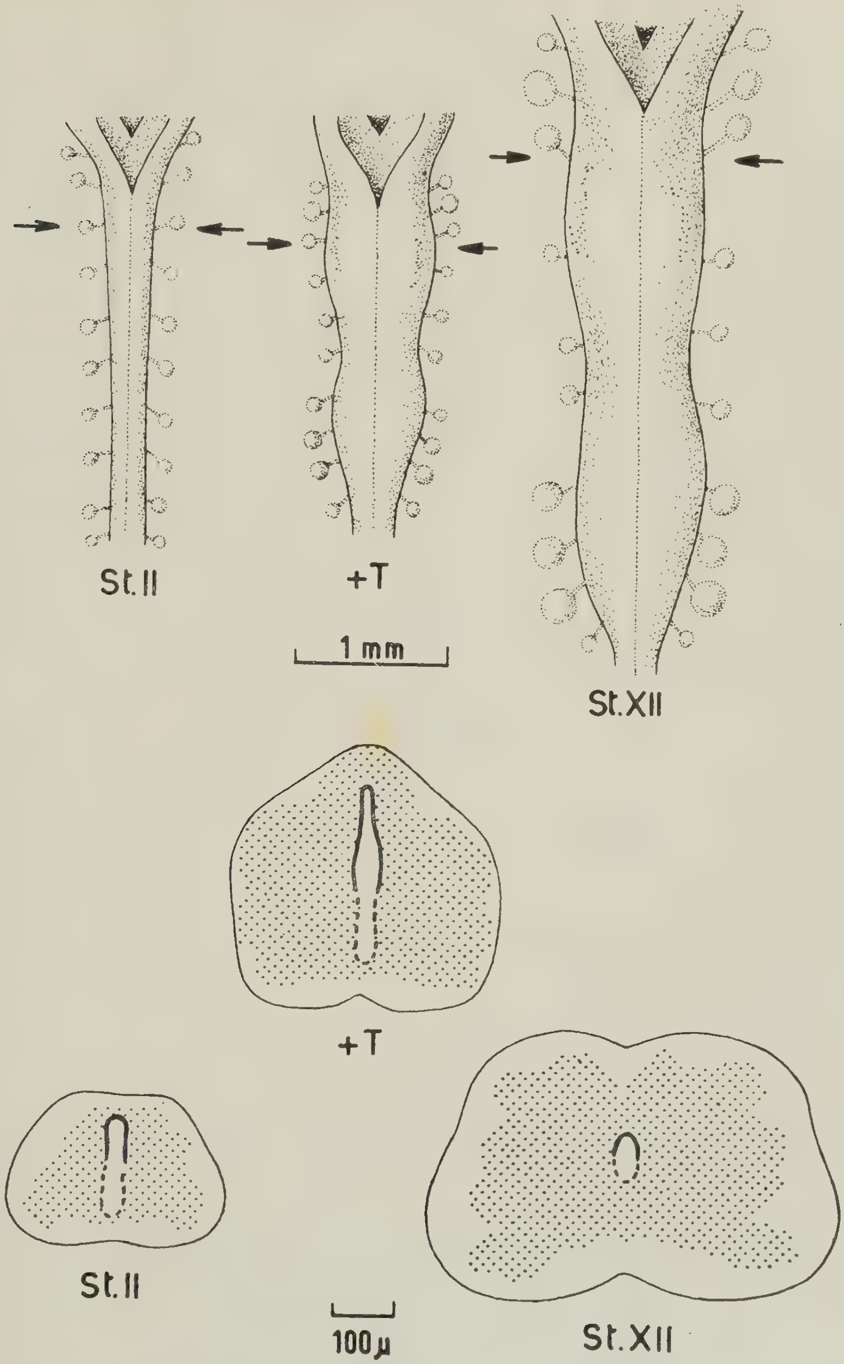


Fig. 1. – *Sopra:* aspetto del midollo spinale isolato in larve di *Bufo* trattate con ormone tiroideo e dei controlli a pari età (a stadio II) ed in metamorfosi (a stadio XII). *Sotto:* sezioni trasversali del midollo spinale al livello dell'emergenza del IV paio di nervi spinali. (A tratto pieno la porzione alare dell'epitelio ventricolare e tratteggiata la porzione basale; punteggiata la sostanza grigia).

(Disegni ripresi alla camera lucida).

dell'attività proliferativa (aumento di sostanza grigia) che in quello della attività differenziativa (aumento di sostanza bianca);

3° il fatto che la cavità ventricolare degli animali trattati mantiene l'aspetto di quella dei controlli a pari età, nonostante l'aumento numerico delle cellule, rappresenta una conferma delle deduzioni espresse nel corso delle osservazioni sul normale sviluppo del midollo spinale di Anfibî anuri [1]: ciò infatti dimostra che l'esaltata attività mitotica non riesce a far progredire la morfogenesi del canale ependimale, perciò la realizzazione di tale morfogenesi avviene ad opera del differenziamento dei neuroni motorî e di correlazione che formano i fasci commessurali del rafe [1].

I risultati dei computi numerici della densità mitotica nel midollo spinale di larve di *Bufo* trattate con ormone tiroideo hanno messo in evidenza un abbassamento dei valori di densità dopo il primo giorno d'esperienza; questo abbassamento non si è verificato nel metencefalo [6], ma è stato riscontrato nelle prime tre vescicole encefaliche [7], esso cioè risulta un fenomeno comune a quelle regioni del neurasse che poco prima dell'inizio del trattamento hanno raggiunto la più intensa attività mitotica che si verifica durante il normale sviluppo; pertanto l'esaltazione metabolica prodotta dall'ormone tiroideo accentua la depressione dell'attività mitotica che subentra dopo i periodi di massima attività.

TABELLA I.

TEMPO	EMIAREA in dmm²	PIASTRA ALARE		PIASTRA BASALE	
		n. mitosi	*Densità*	n. mitosi	*Densità*
Dopo 1 giorno	10,34	118	*11,4*	39	*3,8*
Dopo 2 giorni . . .	10,82	260	*24,0*	199	*18,4*
Dopo 3 giorni	14,80	397	*26,8*	191	*12,9*
Dopo 5 giorni	17,10	366	*21,4*	152	*8,9*
A stadio II	16,60	332	*20,0*	215	*12,9*
A stadio XII . . .	12,57*	94	*7,5*	47,5	*3,7*

(*) La diminuzione in superficie è dovuta alla riduzione del lume ependimale [1].

Nel secondo giorno di trattamento i valori di densità mitotica del midollo spinale dei girini trattati aumentano: nella piastra basale essi raggiungono le quote massime toccate al termine del periodo embrionale (*18,8* a stadio 24); nella regione sensitiva (piastra alare), invece, i più alti livelli di densità mitotica sono raggiunti al terzo giorno del trattamento; in questo caso, però, i valori si avvicinano, ma restano inferiori ai massimi raggiunti durante il normale sviluppo (*28,1* a stadio 24). Già al terzo giorno nella regione motoria (piastra basale) e dopo il terzo giorno in quella sensitiva (piastra alare) la densità mitotica dell'epitelio ventricolare del midollo spinale diminuisce e continua a diminuire fino al termine del trattamento. Durante il

trattamento con ormone tiroideo i valori di densità mitotica della porzione dorsale (regione sensitiva) e ventrale (regione motoria) dell'epitelio ventricolare del midollo spinale partono da livelli differenti, raggiungono quote diverse e toccano le massime quote ad epoche differenti: ciò dimostra che l'andamento dell'attività mitotica nelle due regioni del midollo diver-

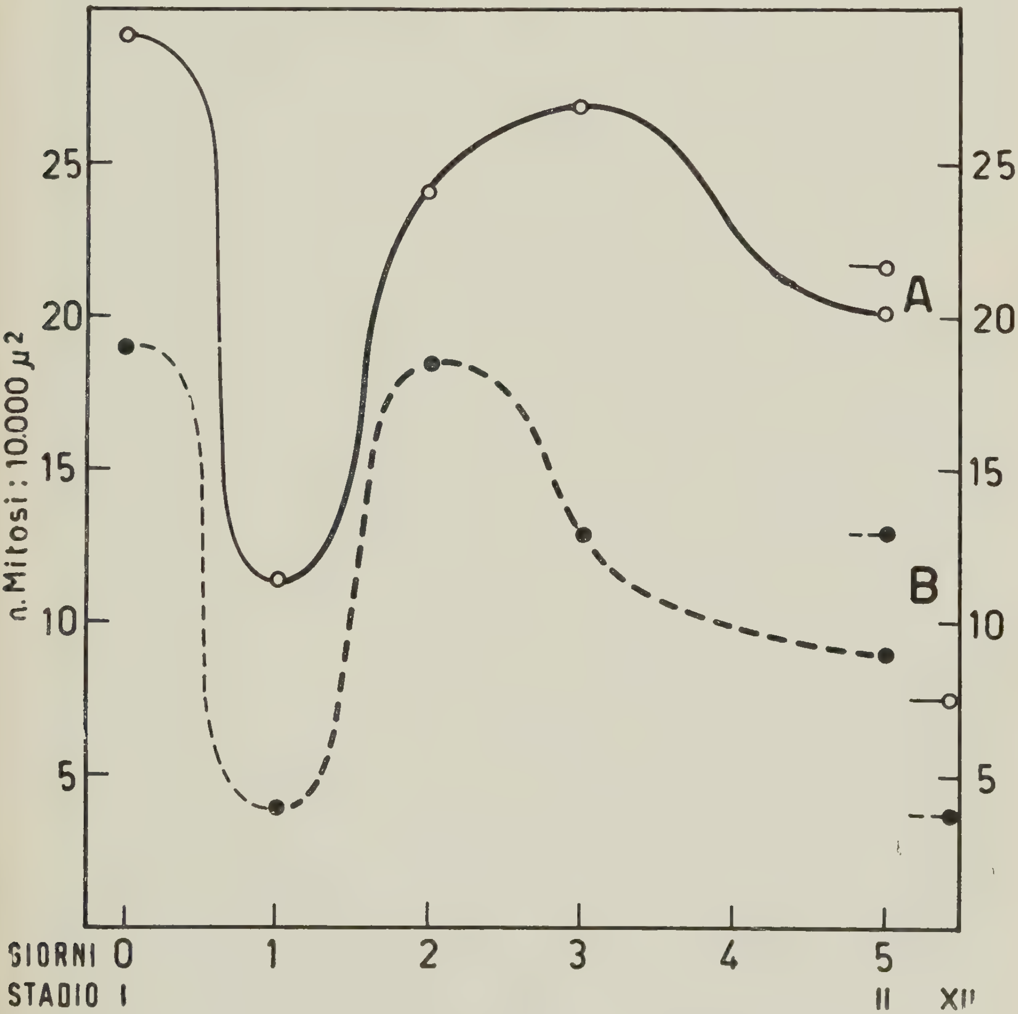


Fig. 2. – Andamento dell'attività mitotica nell'epitelio ventricolare del midollo spinale di larve di *Bufo bufo* durante il trattamento con forti dosi di tiroxina.

A = piastra alare; B = piastra basale. In tratto sottile i riferimenti della densità mitotica dei controlli a pari età (a stadio II) ed in metamorfosi (a stadio XII).

sifica quantitativamente e qualitativamente. I dati analitici ottenuti dall'esame della densità mitotica lungo l'asse antero-posteriore del midollo spinale dei singoli animali trattati, hanno messo in evidenza differenze regionali di attività proliferativa: infatti procedendo dal calamo fino all'inizio della regione caudale del midollo spinale, si mettono in evidenza una serie

di accentuazioni zonali di mitosi; come ho osservato nel corso del normale sviluppo [2], questa seriazione di focolaî mitotici mantiene una costanza numerica (sono dieci) ed appaiono particolarmente evidenti nella regione cervicale (due focolaî in corrispondenza del III e del IV paio di nervi spinali) ed in quella lombare (tre focolaî in corrispondenza dell'VIII, IX e X paio di nervi spinali) del midollo, al livello dell'area di sviluppo delle intumescenze. La presenza di un succedersi di zone metameriche a più elevata attività mitotica può essere spiegata in due maniere: o supponendo che l'azione dell'ormone tiroideo si eserciti in particolari zone a causa di una suscettibilità differenziale delle cellule nelle singole zone del midollo, oppure supponendo che la risposta cellulare all'azione dell'ormone tiroideo sia eguale, ma varî il numero degli elementi indifferenziati presenti nelle singole zone. Ritengo più verosimile la seconda interpretazione; in proposito richiamo l'attenzione sul fatto che l'abbassamento dell'attività mitotica al termine del trattamento, che è stato riscontrato nell'*ora serrata* della retina (Champy) [8], in elementi romboencefalici circostanti ad una sorgente locale di ormone (Weiss e Rossetti) [9], nel metencefalo [6], nelle prime tre vescicole encefaliche [7] e nel midollo spinale, è un carattere comune a tutte le regioni del neurasse e che non si verifica in altri tessuti (di natura epiteliale, connettivale e muscolare) [8], nei quali invece la densità mitotica continua ad accrescersi fino al termine del trattamento; pertanto l'abbassamento dei valori di densità al termine del trattamento con ormone tiroideo risulta un fenomeno caratteristico del tessuto nervoso. Questo fenomeno fa assumere alle curve che raffigurano l'andamento dell'attività mitotica durante il trattamento con tiroxina (fig. 2: tratto grosso) un aspetto molto simile a quello delle curve d'accrescimento di culture non rinnovate di protozoi [10] e di tessuti *in vitro* [11]: ciò non significa che l'abbassamento dell'attività mitotica abbia la stessa causa (impoverimento alimentare del mezzo o accumulo di cataboliti), ma indica solo che dopo i primi giorni di trattamento interviene un fattore limitante dell'attività mitotica; questo fattore va individuato nella concomitanza di due fenomeni: mi richiamo alle esperienze su culture di tessuti, che hanno dimostrato che estratti tiroidei provocano anomalie nella cariocinesi rendendo i cromosomi più viscosi [12], ed alle osservazioni compiute sul nucleo delle cellule nervose dalle quali è risultato che la riserva di elementi indifferenziati nel grigio periventricolare del neurasse di Anfibî diviene sempre più limitata durante il periodo larvale [13] mantenendo una diversa consistenza nelle diverse regioni del sistema nervoso centrale; va inoltre tenuto presente che, a differenza di altri tessuti, gli elementi

(8) CH. CHAMPY, « Arch. Morphol. Gén. et Expérim. » (Paris), n. 4, 1 (1922).

(9) P. WEISS & F. ROSSETTI, « Proc. Nat. Acad. Sci. » (N. Y.), XXXVII, 540 (1951).

(10) R. E. BUCHANAN, « Journ. Inf. Dis. », XXIII, 109 (1918).

(11) F. JACOBJ, S. A. TROWELL & E. N. WILLMER, « Journ. Exptl. Biol. », XIV, 225 (1937).

(12) S. MITTLER & R. H. HERMAN, « Science », CXI, 548 (1950).

(13) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), XXI, 491 (1956).

differenziati del sistema nervoso non possono sdifferenziarsi; questi fatti spiegano perché compaiono differenze quantitative e qualitative di comportamento nei valori di densità mitotica tra le varie regioni del neurasse e tra le varie zone di una stessa regione.

Per riassumere, i risultati conseguiti dall'esame degli effetti dell'ormone tiroideo sugli elementi indifferenziati del midollo spinale di larve di *Bufo* hanno dimostrato che:

1° l'esaltazione metabolica si manifesta in un primo momento provocando una depressione dell'attività proliferativa in quelle zone del neurasse che immediatamente prima del trattamento con ormone tiroideo avevano superato una notevole attività moltiplicativa;

2° sempre all'inizio del trattamento, subentra poi un rapido aumento dell'attività mitotica, che in breve si avvicina o raggiunge i massimi valori di densità toccati durante il normale sviluppo;

3° l'esaltazione dell'attività mitotica, però, si esaurisce presto; il declino della densità mitotica al termine del trattamento è risultato una peculiarità del tessuto nervoso ed è stato messo in rapporto: *a*) con alterazioni al livello cromosomico che possono impedire la cariocinesi in elementi già divisi; *b*) con l'assenza di fenomeni di anaplasia nei neuroni differenziati e *c*) con la limitata riserva di elementi intercinetici all'inizio del trattamento; questi fatti spiegano anche perché vi siano differenze qualitative e quantitative di comportamento dell'attività mitotica ai diversi livelli e regioni del midollo spinale;

4° nel midollo spinale degli animali trattati con ormone tiroideo sono state messe in evidenza differenze di densità mitotica lungo l'asse antero–posteriore del midollo spinale (costanti accentuazioni metameriche) e tra porzione dorsale (sensitiva) e ventrale (motoria); queste differenze, che sottolineano fenomeni già osservati nel normale sviluppo, vanno messe in rapporto con la diversa consistenza zonale degli elementi indifferenziati presenti nella sostanza grigia del midollo spinale, elementi che provvedono all'accrescimento del midollo durante il periodo larvale.

Va infine accennato al fatto che l'esaltazione metabolica, prodotta dall'ormone tiroideo sul sistema nervoso ed in particolare sul midollo spinale, non si limita alle variazioni dell'attività mitotica, ma stimola l'inizio dei processi del differenziamento in delimitate sedi (ad esempio al livello del II paio di nervi spinali), abbrevia i processi del differenziamento iniziati al momento del trattamento (ad esempio: nella colonna motoria della regione lombare – Beaudoin [14]) e, se l'ormone è in elevate dosi (come in questo caso) provoca la comparsa di accumuli melanici nel pirenoforo dei neuroni già differenziati (ad esempio: nelle cellule più periferiche della regione motoria del midollo), i quali assumono precocemente aspetti che normalmente compaiono solo più tardi.

(14) A. BEAUDOIN, « Anat. Rec. », CXXV, 247 (1956).

Zoologia (Anatomia). — *Nuovi dati sul corredo nervoso della ventosa di* Loligo vulgaris. Nota di Pasquale Graziadei, presentata [*] dal Socio A. Pensa.

Facendo seguito a mie precedenti ricerche sul corredo nervoso di vari organi in Molluschi Cefalopodi Decapodi (Graziadei 1958, 1959) ne ho preso ora in considerazione quello che si distribuisce alla ventosa del braccio sessile di *Loligo vulgaris*. Nella ventosa di questo Decapodo lo schema delle vie nervose riproduce con modalità analoghe quanto ho già osservato nella ventosa di *Sepia* (Graziadei 1959). Da cellule nervose del midollo assile del braccio e del ganglio della ventosa, e precisamente dai loro pirenofori, si originano infatti neuriti che, raggiunta la muscolatura intrinseca della ventosa, si esauriscono in questa espandendosi in un esteso e complesso intreccio. A questi due centri gangliari pervengono i prolungamenti dei neuroni di senso il cui pirenoforo è dislocato negli epiteli di rivestimento della ventosa o subito sotto di questi. Tali neuroni con i loro prolungamenti costituiscono pertanto il primo tratto di due archi nervosi riflessi, uno breve col centro a livello del ganglo della ventosa ed uno lungo a livello del midollo essile del braccio (vedi fig. 1). Ricordo brevemente che la presenza di due archi riflessi, uno breve ed uno lungo, sta alla base della funzione nervosa non solo nella ventosa di *Sepia* e *Loligo* ma anche in altri settori della muscolatura somatica di questi Cefalopodi da me considerati e cioè nel mantello e nella pinna. Oltre a ciò nella ventosa di *Calamaro* ho potuto osservare anche dispositivi che penso rivestano una certa importanza nello studio del sistema nervoso di questi Invertebrati.

Le fibre nervose motrici che si distribuiscono alla muscolatura intrinseca della ventosa sono in parte di calibro gigantesco. Esse hanno diametri superiori ai 50 micron e possono raggiungere e superare gli 80 micron. Ho potuto stabilire che queste fibre nervose hanno funzione motrice e si esauriscono *in toto* nella muscolatura intrinseca della ventosa. Esse originano dal ganglio della ventosa per fusione sinciziale di numerosi neuriti originati dai pirenofori del ganglio stesso (fig. 2). Nelle compagine del neuropilo gangliare è possibile scorgere l'iniziale fenomeno di fusione di tali fibre nervose gigantesche. Una volta penetrate nella muscolatura intrinseca della ventosa le fibre giganti forniscono numerose finissime collaterali monopodiche le quali si espandono sulle fibrocellule muscolari a breve distanza dal tronco di origine. Esse vanno incontro anche a divisioni dicotomiche che risolvono a loro volta la fibra in una estesa e complessa arborizzazione. Ciascuna fibra nervosa gigantesca si distribuisce quindi ai vari settori muscolari di cui si compone

(*) Nella seduta del 14 novembre 1959.

la ventosa e cioè alla muscolatura acetabolare, all'infundibolo ed alla muscolatura acetabolo–cutanea. Ho potuto stabilire che ciascuna fibra nervosa si espande in vari settori muscolari tutti ad azione sinergica tra loro. I sistemi muscolari antagonisti ai primi ricevono invece il corredo nervoso da altre fibre che sono a quelli soltanto destinate. Mi sembra plausibile avanzare l'ipotesi che le fibre nervose gigantesche possano adempiere oltreché alla funzione di un rapido trasporto dell'impulso, anche e forse in modo prevalente, alla funzione di conduzione di stimoli destinati contemporaneamente a estesi e diversi settori muscolari che si contraggono sinergicamente.

Un secondo fatto di rilievo nella innervazione della ventosa di Calamaro è quello della innervazione ricca e di diversa natura dell'epitelio che riveste il fondo della coppa acetabolare della ventosa stessa. In questa zona si ritrova un epitelio batiprismatico pluriseriato con le caratteristiche di tipico epitelio secernente. Fra le cellule epiteliali, ripiene nella loro porzione distale di granuli di secreto, si rinvengono numerosissimi neuroni primari di senso di aspetto vario e del tutto insolito. Alcuni hanno forma globosa, piriforme, altri del tutto irregolare; dalla superficie dei pirenofori si staccano in alcuni casi espansioni plasmatiche laminari. Dalla porzione del corpo cellulare più prossima alla membrana basale dell'epitelio si stacca un prolungamento che acquista ben presto i caratteri di neurite; questo abbandona per la via più breve l'epitelio e raggiunge il ganglio della ventosa nel cui neuropilo si espande. Dalla superficie del pirenoforo di questi neuroni, dalle loro espansioni plasmatiche laminari, dalla porzione intraepiteliale del neurite si originano inoltre finissimi prolungamenti che si espandono entro l'epitelio stesso disponendosi a formare un apparato plessiforme molto fine.

In questo stesso epitelio e più precisamente nel suo terzo basale si espandono però, unitamente alle fibrille nervose originate dai neuroni primari, altre fibrille pure finissime che hanno origine ben diversa dalle prime e con queste compongono una disposizione plessiforme o retiforme in mutuo rapporto con le cellule epiteliali. Ho potuto seguire a ritroso queste fibre che arrivano all'epitelio sino alla loro provenienza dal ganglio della ventosa nel quale appunto ritengo risiedano le cellule che dànno loro origine. Ritengo in particolar modo che tali cellule nervose siano quelle di più modeste dimensioni che sono raggruppate in zone diverse del ganglio della ventosa fra quelle cellule più cospicue che dànno origine alle fibre nervose di natura motrice che innervano la muscolatura della ventosa.

Mentre sulla natura recettrice dei neuroni intraepiteliali e delle loro fini espansioni fibrillari non ritengo possano essere sollevati dubbi, il significato delle fibre che sembrano provenire da neuroni del ganglio della ventosa può presentare qualche incertezza. Ho ritenuto di attribuire loro il significato di fibre effettrici ed in particolare eccito–secretrici essenzialmente perché si espandono in un tipico epitelio secernente. È da tener presente infatti che in altri epiteli con funzione secernente nei quali non è costatabile la presenza di elementi sensoriali, come ad esempio nell'epitelio dello stomaco e dell'intestino di questi stessi Decapodi, è presente un finis-

simo plesso nervoso che ha caratteristiche analoghe a quelle dell'epitelio in discussione (Graziadei 1959) ed al quale mi pare debba senza dubbio essere attribuita una funzione eccito-secretrice.

La presenza nell'epitelio batiprismatico pluriseriato del fondo della coppa acetabolare della ventosa di un corredo nervoso recettore ed eccito-secretore che in alcuni punti intrecciano una parte dei loro componenti per formare una struttura plessiforme estremamente fine ma di notevole complessità, mi ha indotto a ritenere che questa disposizione anatomica non sia casuale. Non mi sembra fuor di luogo prospettare l'ipotesi che questi rapporti tra corredo recettore ed eccito-secretore possano stare alla base di azioni nervose riflesse in rapporto alla funzione dell'epitelio, di estrema semplicità ed autonomia, svolgentisi nell'ambito circoscritto dell'epitelio, anche senza l'intermediario dei centri nervosi.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Fig. 1. – Schema dimostrante una sezione trasversale del braccio sessile di *Loligo vulgaris*, condotta a livello di un piano passante per l'asse del peducolo di una ventosa. In nero sono rappresentati gli elementi nervosi effettori, in rosso quelli recettori.

I = infundibolo della ventosa; A = acetabolo; GV = ganglio della ventosa; P = peduncolo della ventosa; B = braccio sessile; MN = cavità contenente il midollo assile.

Fig. 2. – Sezione sagittate del peduncolo della ventosa di *Loligo vulgaris* a livello del ganglio della ventosa stessa. In questo centro nervoso si riconoscono alcuni pirenofori situati alla periferia e l'intreccio neuropilare. Nella compagine di questo sono presenti grosse fibre nervose che originate nel ganglio stesso sono destinate a distribuirsi alla muscolatura intrinseca della ventosa.

Fig. 3. – Fibra nervosa gigantesca (85 micron) reperita nella muscolatura acetabolare della ventosa di *Loligo vulgaris*. Si noti al margine superiore della fibra la emissione di una esigua collaterale che si esaurirà dopo breve decorso a ridosso della muscolatura acetabolare. Le fibre nervose a diametro gigantesco come quella quì riprodotta si originano per fusione sinciziale dai neuriti di numerose cellule nervose il cui pirenoforo è situato nel ganglio della ventosa (vedi anche fig. 2).

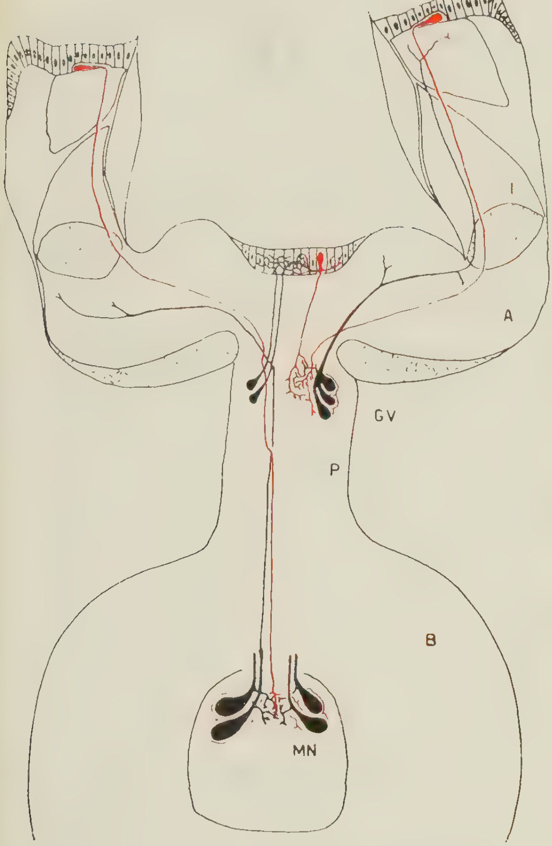


Fig. 1

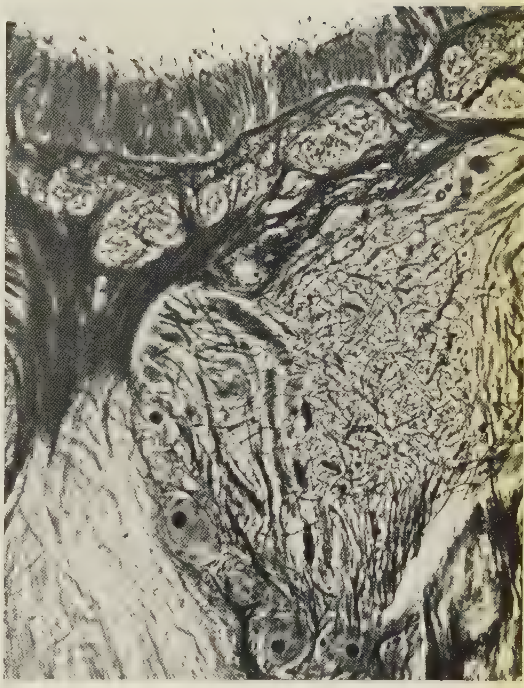


Fig. 2

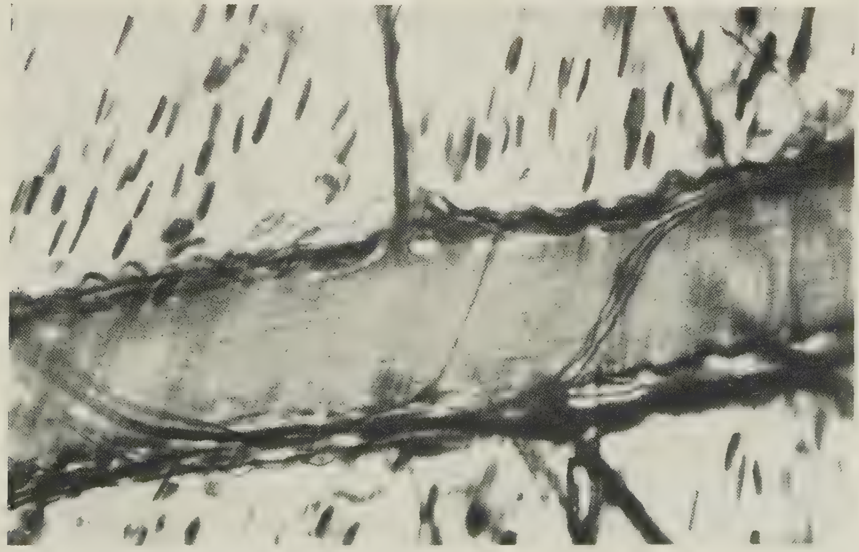


Fig. 3

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio anziano Cassinis è lieto di informare la Classe che il Presidente Giordani potrà ben presto riprendere il suo posto e, interpretando l'unanime sentimento dei Colleghi, propone di inviare al Presidente stesso un messaggio di saluto e d'augurio.

La proposta del Socio anziano Cassinis viene accolta all'unanimità.

Il Presidente comunica quindi la dolorosa notizia della morte, avvenuta a Napoli il 16 novembre u. s., del Socio Nazionale Umberto Pierantoni della Categoria V (Sezione Zoologia) e, dopo aver brevemente ricordato, con commosse parole, la nobile figura di uomo e di Maestro dello scienziato scomparso, assicura che la Classe rinnoverà alla famiglia Pierantoni i sentimenti del suo più vivo cordoglio.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che la Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche ha approvato, nella seduta di Classe del 14 novembre u. s., il seguente ordine del giorno;

« L'Accademia Nazionale dei Lincei, considerando che lo spettacolo *Suoni e Luci*, iniziato la scorsa estate nel Foro Romano, è in contrasto con il carattere di quelle venerande rovine e ne compromette la dignità archeologica ed estetica, fa voti perché le autorità competenti revochino la concessione già fatta e per l'avvenire si astengano dal conceder permessi per spettacoli del genere, che sviliscono il patrimonio artistico nazionale, senza recare alcun particolare vantaggio all'incremento del turismo ».

Poiché la predetta Classe ha ravvisato l'opportunità che il voto risulti quale emanazione dell'intera Accademia, la Cancelleria ha provveduto ad inviarne copia al domicilio di tutti i Soci delle due Classi. Della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali hanno dato la loro adesione per iscritto i seguenti Colleghi: Abetti, Carnera, Cappelletti, Polvani e Trotter.

Il Collega Polvani ha anzi prospettato l'opportunità di non fare solo allusione al valore artistico del patrimonio nazionale, ma anche a quello storico e ha proposto che la frase finale del voto sia così modificata: « . . . spettacoli del genere, che sviliscono il valore artistico e storico del patrimonio nazionale, senza alcun particolare vantaggio all'incremento del turismo ».

Il Presidente comunica quindi che il Socio presentatore del suddetto ordine del giorno, prof. Lugli, della Classe di Scienze Morali Storiche e Filologiche, ha chiesto di poterlo illustrare ai Colleghi di Scienze Fisiche e invita pertanto il predetto Socio a prendere la parola.

Il Socio Lugli, dopo aver premesso che il voto, approvato dalla Classe di Scienze Morali nella seduta del 14 novembre e successivamente trasmesso

al domicilio di tutti i Soci di quella Classe, ha raccolto ben 117 adesioni, mette in evidenza che l'Accademia non intende entrare nel merito del testo dello spettacolo, quantunque anch'esso sia suscettibile di molte riserve, ma tutelare essenzialmente la dignità del Foro Romano. Questo venerando complesso monumentale, composto da più di mille monumenti singoli, ognuno dei quali ha una sua gloriosa storia, è infatti deturpato dal maggio all'ottobre di ogni anno da centinaia di riflettori, cavi elettrici e altoparlanti, come risulta dalla documentazione fotografica che il Socio Lugli pone a disposizione dei Colleghi. Tale incresciosa situazione dovrebbe, secondo la concessione governativa, protrarsi per ben otto anni, il che non sembra ammissibile. Si sarebbe potuto forse tollerare un simile stato di cose per un breve periodo, oppure in un altro ambiente, come per esempio nella Villa Torlonia di Frascati, ove si sono svolti interessanti spettacoli fondati essenzialmente sul gioco delle luci e delle acque. Ma non si può assolutamente ammettere che il Foro, monumento unico al mondo, sia trasformato per cinque mesi all'anno in guisa tale da perdere gran parte del suo fascino naturale. Nè tale iniziativa può essere giustificata da un eventuale incremento del turismo, perché proprio i turisti stranieri hanno lamentato questo stato di cose.

Il Presidente ringrazia il Collega Lugli e pone ai voti l'ordine del giorno che viene approvato all'unanimità con l'integrazione proposta dal Socio Polvani.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Finzi, Stefanelli, Leonardi, Segre, Califano, Signorini (anche a nome del Collega Picone), Colonnetti e Caglioti.

Il Socio Signorini presenta, per conto del Collega Picone, le seguenti due Memorie: «Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné» di J. Sebastião e Silva, e «Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients holdériens» di Halina Milicer Gruzewska.

Per l'esame dei suddetti lavori viene nominata una Commissione composta dallo stesso prof. Picone e dai Soci Sansone e Miranda.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Baffoni G. M. – Variazioni dell'attività mitotica e modificazioni cellulari nel prosencefalo e nel mesencefalo di larve di anfibi anuri trattate con ormone tiroideo (pres. dal Corrisp. A. Stefanelli).

Fadiga E. e Brookhart J. M. – Risposte da motoneuroni spinali di Rana per la stimolazione iterativa di porzioni diverse della membrana cellulare (pres. dal Socio G. C. Pupilli).

Torelli M. – Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 13–14 maggio 1957 (pres. dal Corrisp. M. Cimino).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Penta, anche a nome dei Colleghi G. B. Dal Piaz ed Evangelisti, legge la relazione sulla Memoria del dott. F. Falini dal titolo « Sulle condizioni di formulazione dei giacimenti limnici di combustibili fossili ».

Messa ai voti la relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del citato lavoro nelle Memorie accademiche, è approvata all'unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente comunica che è uscito il fascicolo 3–4 del volume XXVII dei Rendiconti (Ferie 1959 – settembre–ottobre), al quale seguirà presto il fascicolo di novembre, ed esprime ai Segretari accademici un vivo ringraziamento per la preziosa opera che essi dedicano ai Rendiconti, il cui ritmo è veramente lusinghiero.

Presenta poi le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza un volume della « Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin » dal titolo « Leonhard Euler », edito in occasione del 250° anniversario della nascita del grande scienziato; uno studio del dottor Théodor Schneider intitolato « Introduction aux nombres transcendants »; tre Note di Meccanica del Collega Colonnetti sul tema « Relaxation et écrouissage », pubblicate dalla Académie des Sciences di Parigi, e la commemorazione di Vito Volterra, tenuta a Palermo dal Collega Picone il 15 settembre 1956, nella ricorrenza del cinquantenario della Società Italiana per il Progresso dell Scienze.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe che l'Accademia è stata invitata alle seguenti manifestazioni scientifiche:

A) VII Giornata della Società Geologica della Repubblica Popolare Tedesca (Berlino–Est, probabilmente 17–22 maggio 1960);

B) International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science (Stanford – U.S.A. – 24 agosto–2 settembre 1960);

C) X Congresso Internazionale di Meccanica Applicata (Stresa, 31 agosto–4 settembre 1960).

Ritiene poi utile dare notizia ai Colleghi di altri Congressi, dei quali egli è a conoscenza, come, ad esempio, il Congresso della Associazione Internazionale delle Università, che avrà luogo a Città del Messico dal 6 al 12 settembre 1960; il IX Congresso Internazionale di Fotogrammetria, che si svolgerà dal 5 al 16 settembre dello stesso anno a Londra, la XII Assem-

blea Generale dell'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale, indetta a Helsinki dal 25 luglio al 6 agosto e, infine, la XII Conferenza Generale dei Pesi e Misure che si terrà a Sèvres nel mese di ottobre 1960.

Il Presidente informa quindi i Colleghi che il Socio Puntoni non è potuto intervenire alla presente seduta avendo dovuto recarsi a Bologna ove, presso quella Università, in occasione dell'inaugurazione dell'anno accademico, ha luogo, proprio oggi, la commemorazione dell'opera che il compianto suo Padre, prof. Vittorio Puntoni, Socio Nazionale dell'Accademia, esplicò per il riassetto edilizio dell'Ateneo bolognese durante ben ventun anni di rettorato.

Il Presidente propone di inviare sia al Rettore dell'Università di Bologna, che al Collega Puntoni, messaggi di adesione.

La proposta è accolta all'unanimità.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 dicembre 1959

BARTELS J., ROMANA A. and VELDKAMP J. — *Geomagnetic indices K and C, 1956*. Published with financial assistance from UNESCO. Amsterdam, International Union of Geodesy and Geophysics, Association of Geomagnetism and Aeronomy, 1959. Pp. IX–157, in–8°, con tavv. (JAGA Bulletin, n. 12 K).

BOSSOLASCO Mario. — *7. I. Ergebnisse der Strahlungsmessungen auf den Westalpen und auf den Apenninen*. Estr. da « Berichte des Deutschen Wetterdienstes », n. 54 (5. Internationale Tagung für Alpine Meteorologie in Garmisch - Partenkirchen vom 14. bis 16. September 1958).

BOSSOLASCO M. e CICCONI G. — *Le condizioni di eccezionale visibilità sul Mar Ligure del 17 ottobre 1958*. Estr. da « Geofisica e Meteorologia », vol. VII, 1959, nn. 3–4.

BOSSOLASCO M. e ELENA A. — *On some characteristics of the* E_s*–layer*. Estr. da « Planet. Space Sci. », vol. I, 1959.

Botanika v Kazahstane. Sbornik statej, posvjaščennyj IX Meždunarodnomy Botaničeskomu Kongressu v Kanade. Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1959. Pp. 159, in–8°, con tavv.

BULYGIN I. A. — *Issledovanie zakonomernostej i mehanizmov interoceptivnyh refleksov*. Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk BSSR, 1959. Pp. 311, in–8°, con figg.

CICCONI G. — Vedi: BOSSOLASCO M. e CICCONI G.

COLONNETTI Gustavo. — *Aprire ai periti industriali la via degli studi superiori*. Estr. da « La Stampa », 1959, 29 maggio.

— *A Torino i primi corsi di specializzazione nella nuovissima « tecnica delle misure »*. Estr. da « La Stampa », 1959, 29 settembre.

— *Dare unità ed impulso alle ricerche scientifiche*. Estr. da « La Stampa », 1959, 22 ottobre.

— *Il Politecnico di Torino celebra da oggi i cent'anni*. Estr. da « La Stampa », 1959, 24 settembre.

— *Relaxation et écronissage*. [Note 3]. Estr. da « Comptes–rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 248, 1959, aprile; t. 248, 1959, giugno; t. 249, 1959, agosto.

EYMARD Pierre. — Vedi: SCHNEIDER Théodor.

GOREŹKO P. A. — *Vzaimosvjaz' processov rezanija i rastjaženija metallov*. Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk Belorusskoj SSR, 1959. Pp. 71, in–8°.

LUYTEN Willem J. — *Proper motions for 101 faint blue stars*. Minneapolis, The Observatory of the University of Minnesota, 1959. Pp. 7, in–4° (A search for faint blue stars, XVII).

PICONE Mauro. — *Commemorazione di Vito Volterra, pronunziata a Palermo il 15 settembre 1956, cinquantesimo anniversario della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*. Estr. da « La Ricerca Scientifica », a. XXVI, 1956, n. 11 (Pubblicazioni dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, n. 463).

POLACCO Giuseppe. — *Complementi di trigometria piana*. Roma, presso l'Autore, 1957. Pp. 48, in–4° (Memoria n. 3). (In ciclostile).

— *Del moto e della relatività in generale*. Libro I: *Parte generale*; libro IV: *Degli ellissoidi d'inerzia e della gravità*. Roma, presso l'Autore, 1959. Fasc. 2, in–4°, con figg.

— *Funzione di variabile complessa*. Roma, presso l'Autore, 1957. Pp. 29, in–4° (Memoria n. 2). (In ciclostile).

— *Valori reali, immaginari e complessi*. Roma, presso l'Autore, 1957. Pp. 43, in–4° (Memoria n. 1). (In ciclostile).

REZNJAKOV A. B. — *Metod podobija. Suščnost' i praktičeskoe primenenie*. Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1959. Pp. 151, in–8°.

ROMANA A. — Vedi: BARTELS J., ROMANA A. and VELDKAMP J.

Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Unter Verantwortliche Redaktion von Kurt Schröder. Berlin, Akademie-Verlag, 1959. Pp. X-336, in-8°, con tavv.

SCHNEIDER Théodor. — *Introduction aux nombres trancendants.* Traduit de l'allemand par Pierre Eymard. Paris, Gauthier-Villars, 1959. Pp. 151, in-8°.

SCHRÖDER Kurt. — Vedi: *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen.*

SQUARZINA Federico. — *Brevi cenni sulla produzione italiana nel secolo XX di Zolfo e Pirite, Metalli e loro minerali, Combustibili solidi, Petrolio e Gas idrocarburati, Forze endogene.* P. I: *Dalla fine dell'800 al termine della prima guerra mondiale.* Estr., con aggiunte, da « L'Industria Mineraria », 1959, maggio-luglio.

SZCZEMOWKI Bolesław. — *Solution of boundary in two-dimensional potential motion in incompressible perfect fluid.* Estr. da « Archiwum Budowy Maszyn », t. VI, 1959, n. 2.

USK I. A. — *Slancevyj bitum.* Pod redakciej S. I. Faingol'da i K. R. Vallasa. Tallin, Akademija Nauk Estonskoj SSR, Institut Himii, 1959. Pp. 249, in-8°.

VAGLIASINDI Carmelo. — *Il glacialismo fenomeno tettonico ciclico.* Nota introduttiva. Randazzo, Arti Grafiche C. Palermo e Figli, 1959. Pp. 16, in-4°.

VELDKAMP J. – Vedi: BARTELS J., ROMANA A. and VELDKAMP J.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

B

C

N

P

R

S

V

Z

INDICE PER MATERIE

A

B

C

M

O

P

R

Z

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

Luglio–Agosto 1959.

NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1959.

NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1959.

NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

COMMEMORAZIONE

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1959.

NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI